

Analyse spectrale par Transformée de Fourier Rapide

Ce TP est destiné à vous sensibiliser aux limitations et précautions inhérentes à l'utilisation d'un oscilloscope numérique. Pour cela, vous allez étudier en détail, l'analyse spectrale par transformée de Fourier discrète mise en œuvre par l'algorithme FFT (Fast Fourier Transform). Vous appliquerez enfin cet algorithme pour, à titre d'exemple d'application, tracer directement le diagramme de Bode d'un filtre du 2^{ème} ordre .

Matériel nécessaire :

- oscilloscope numérique Tektronix MDO3024
- générateur de signaux arbitraires HP33120A
- Ensemble bobine+condensateur.

Table des matières

1	Influence de la fréquence d'échantillonnage sur la résolution temporelle et spectrale	2
2	Influence de la fenêtre temporelle sur le calcul de la FFT.	2
2.1	Principe de la transformée de Fourier numérique (Discrete Fourier Transform)	2
2.2	Application	3
2.3	Utilisation des fenêtres de pondération (apodisation)	3
3	Le sous-échantillonnage	4
4	Étude du contenu spectral d'un signal périodique	4
5	Spectre d'une impulsion	5
5.1	Étude d'un sinus cardinal temporel	5
5.2	Étude d'une impulsion temporelle	5
6	Réponse en fréquence d'un filtre RLC	6

1 Influence de la fréquence d'échantillonnage sur la résolution temporelle et spectrale

L'objectif de cette manipulation est d'appréhender l'importance du choix de la fréquence d'échantillonnage lors de l'utilisation d'un oscilloscope numérique dont le nombre de points stockés en mémoire est limité. Pour faciliter les manipulation réglez l'oscilloscope pour un échantillonnage sur 1000 points (menu : Horizontal / Acquire / Record length).

Le signal à étudier est une sinusoïde pure de fréquence $f = 10 \text{ kHz}$ et d'amplitude 5 Vpp .

1. Mesurez la fréquence du signal en mode temporel (pensez aux curseurs) et étudiez l'influence de la base de temps utilisée sur la résolution temporelle, sachant que l'oscilloscope échantillonne le signal sur 1000 points de mesure pendant la durée d'un balayage.
2. Passez en mode analyse spectrale par FFT (Bouton Math en rouge). Familiarisez vous avec les menus et curseurs du mode FFT notamment pour régler la fréquence centrale et l'étendue de fréquence affichées).
3. Étudiez l'influence de la base de temps de l'oscilloscope, donc de la fréquence d'échantillonnage, sur la résolution spectrale. Pour cela, vous devrez modifier l'étendue spectrale et la fréquence centrale du spectre affiché. Notez le rôle des différents paramètres et leur liens.
4. Étudiez et mesurez également l'étendue maximale du domaine spectral visualisable pour différentes bases de temps. Justifiez vos observations.
5. Mesurez enfin **précisément** la fréquence du signal. La précision dépend bien sûr des différents paramètres étudiés précédemment.

2 Influence de la fenêtre temporelle sur le calcul de la FFT.

L'objectif de cette manipulation est de comprendre le rôle de la fenêtre d'échantillonnage, lors de la réalisation d'une transformée de Fourier numérique.

2.1 Principe de la transformée de Fourier numérique (Discrete Fourier Transform)

1. Rappelez la définition de la transformée de Fourier $S(\nu)$ de $s(t)$.
2. Pour effectuer une transformée de Fourier numérique, le signal est échantillonné pendant une durée T qui peut être inférieure à la durée totale du signal étudié. C'est même très souvent le cas.
Donnez un exemple de signal qui ne peut pas être échantillonné sur toute sa durée.
3. Si on utilise N points en mémoire, il en résulte la suite de nombres $x_k = s(k \frac{T}{N})$ avec $k \in [0, N - 1]$. On a pris ici l'instant du premier échantillonnage comme valeur zéro pour le temps.

Le signal n'est échantillonné et donc connu que pendant un temps T . Or la TF est une intégrale de $-\infty$ à $+\infty$. Pour pouvoir calculer quand même la transformée de Fourier, on considère que le signal est nul en dehors de l'intervalle de temps où il est mesuré.

$T_e = \frac{T}{N}$ correspond à la période entre deux échantillons temporels. D'un point de vue numérique T est toujours pris égal à 1 dans les calculs numérique de DFT car les grandeurs sont indicées. T n'est considéré que lors de l'affichage pour obtenir les bonnes échelles de temps.

Vérifiez en la calculant, que $S_e(\nu)$ la TF du signal échantillonné sur N points entre 0 et T s'écrit :

$$S_e(\nu) = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-j2\pi\nu k \frac{T}{N}}$$

4. La somme ainsi écrite est une fonction de la variable continue ν . Comme on est dans le monde du numérique, on cherche une fonction discrète, c'est-à-dire, une suite de nombres. Pour cela, on calcule $S_e(\nu)$ à certaines fréquences seulement, ce qui revient à échantillonner $S_e(\nu)$. En échantillonnant $S_e(\nu)$ de façon régulière sur N points comme le signal temporel, on définit la DTF (Discrete Fourier Transform) qui est la suite de nombres X_n .
 - Compte tenu de l'étendue spectrale maximale qu'il est possible d'atteindre en théorie (Théorème de Shannon), quelle est la résolution en fréquence ? N'oubliez pas que les N points de fréquence calculés couvrent les fréquences positives et négatives...
 - Avec cette résolution, vérifiez que l'on aboutit à :

$$\begin{aligned}
n &\in [0, N-1] \\
X_n &= \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-j2\pi nk/N} \\
X_n &= DFT_N(\{x_k\}, n)
\end{aligned} \tag{1}$$

Remarque 1 : l'indice N dans cette notation est redondant (il y a N échantillons x_k), il est là pour insister sur le fait que l'on calcule la DFT sur N points. Ce qui sera important dans la suite.

5. Problème : Que représente l'équation 1 ? Ce n'est en effet pas la TF du signal $s(t)$!

Reformulons le problème différemment : quel est le signal continu $s'(t)$ qui aurait pour spectre X_n qui est un spectre de raies.

- Quels types de signaux présentent un spectre de raies ?
- Quelle est la fréquence fondamentale de $s'(t)$?
- Déduisez en que $s'(t)$ est constitué du motif enregistré, répété dans le temps comme présenté figure 1.

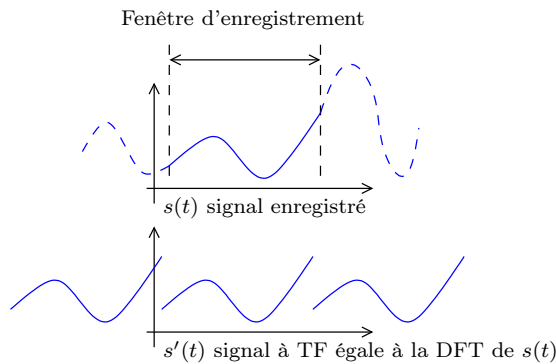


FIGURE 1 – Fenêtre d'enregistrement et signal équivalent.

(d) Que vaut la valeur X_0 pour un signal constant $s(t) = 1$? Qu'aurait-on aimé avoir ?

Il est possible de vérifier que pour $s(t) = 1$, $X_{i \neq 0} \approx 0$.

Finalement, la DFT est souvent définie comme :

$$X_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-j2\pi nk/N} \tag{2}$$

Avec cette définition, calculer la DFT de $s(t)$ revient à calculer la TF échantillonnée du signal de la figure 1.

Les oscilloscopes proposent le Mode FFT. La FFT est le nom d'un algorithme qui permet de calculer très rapidement la DFT telle que définie par l'équation (1).

2.2 Application

Dans le cas d'un signal sinusoïdal continu, on enregistre le signal pendant une durée T , comme indiqué sur la figure 2 (le plus souvent, T n'est pas un multiple de la période du signal).

- Représentez graphiquement le signal dont on calcule le spectre, sur quatre périodes T .
- Que se passe-t-il aux raccords des motifs ?
- Que cela change-t-il par rapport au spectre du signal sinusoïdal ? Il faut bien garder à l'esprit ici que c'est à ce dernier auquel on s'intéresse.

2.3 Utilisation des fenêtres de pondération (apodisation)

Pour éliminer les discontinuités induites par la répétition du motif, on multiplie le signal temporel acquis pendant la durée T par une fonction de pondération. Plusieurs types de pondération sont couramment utilisés. Ces pondérations sont appelées des fenêtres (windows).

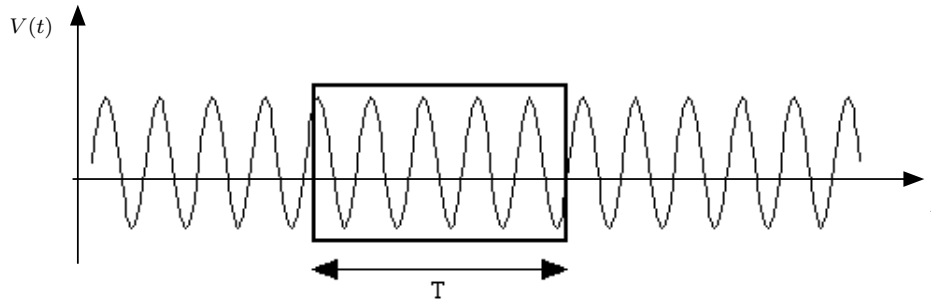


FIGURE 2 – Fenêtre d’acquisition temporelle

1. Réglez votre générateur pour qu’il émette une sinusoïde pure de fréquence $f = 10\text{ kHz}$ et d’amplitude 5 Vpp .
2. En se plaçant sur une fréquence d’échantillonnage de 500 kéch.s^{-1} pour la FFT, étudiez les effets des différentes fenêtres disponibles.
3. Interprétation :
 - (a) Dans le cas simple d’un signal sinusoïdal de fréquence f_0 , soit $s(t)$ le signal acquis. La fonction de pondération est représentée par une fonction temporelle $f(t)$.
Donnez simplement la transformée de Fourier $P(f)$ du signal pondéré $p(t)$ (pas de calcul long !!! Pensez aux propriétés du produit de convolution vis à vis de la TF).
 - (b) Que représente $P(f)$?

3 Le sous-échantillonnage

Nous vous proposons d’étudier les effets d’un sous-échantillonnage du signal, essentiellement dans le domaine spectral.

1. Réglez votre générateur pour qu’il émette une sinusoïde pure de fréquence $f = 10\text{ kHz}$ et d’amplitude 5 Vpp .
2. Visualisez le spectre en mode analyseur de spectre (FFT) en réglant la base de temps pour obtenir un échantillonnage de 500 kéch.s^{-1} .
3. Réglez l’excursion de fréquence affichée pour visualiser le pic à 10 kHz . Vérifiez sa fréquence.
4. Augmentez lentement la fréquence du générateur jusqu’à 250 kHz :

Remarque : le pic se déplace vers la droite, vers les hautes fréquences.

5. Que se passe-t-il si l’on augmente la fréquence du générateur, au-delà de 250 kHz ? Mesurez la fréquence observée, qu’en concluez-vous ?
6. Afficher le signal temporel. Qu’observez-vous ?

NB : L’instabilité de la courbe indique une mauvaise synchronisation liée à la différence des fréquences entre le signal réel qui déclenche le “trigger” et le signal affiché après reconstitution du signal échantillonné.

7. Observez ce qui se passe lorsqu’on continue à diminuer la fréquence d’échantillonnage.

4 Étude du contenu spectral d’un signal périodique

1. Réglez le générateur pour obtenir un signal carré de fréquence $f = 10\text{ kHz}$ et d’amplitude 5 Vpp .
Étudiez le spectre après FFT
Que pouvez-vous en déduire ?
2. Réglez le générateur pour obtenir un signal triangulaire de fréquence $f = 10\text{ kHz}$ et d’amplitude 5 Vpp .
Étudiez le spectre après FFT.
Que pouvez-vous en déduire ?

3. En comparant les 2 spectres précédents, que pouvez-vous dire au sujet de l'occupation spectrale respective des deux signaux ?
4. Quel peut être le rôle d'un filtrage passe-bas (par exemple gaussien) d'un signal carré, avant son utilisation pour une modulation ?
5. Est-il absolument nécessaire de récupérer toutes les raies spectrales du signal carré émis par le générateur, pour le reconstituer, après qu'il ait parcouru une distance importante à travers un câble ?

5 Spectre d'une impulsion

Nous allons maintenant aborder l'étude d'un train d'onde au spectre plus complexe. De tels signaux sont largement employés tant dans les mesures par impulsion, que dans les techniques de transport d'information.

L'étude du sinus cardinal périodique permet de mieux comprendre le rôle de la périodisation sur le spectre, rôle que l'on retrouve lors de l'étude d'un train d'onde périodique.

5.1 Étude d'un sinus cardinal temporel

1. Générez un sinus cardinal temporel périodique (signal disponible dans les fonctions de génération de signaux arbitraires) (Fig. 3)

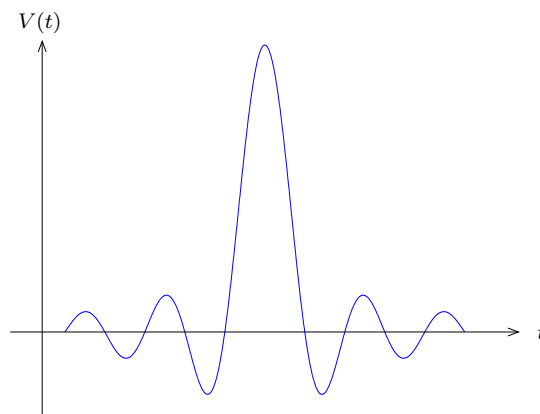


FIGURE 3 – Sinus cardinal temporel

2. Réglez la fréquence de répétition du signal périodique, de manière à n'observer qu'un seul motif de sinus cardinal sur l'écran de l'oscilloscope, et mesurez son spectre. Vérifiez l'adéquation avec le spectre théorique.
3. Recommencez la mesure précédente en réglant la fréquence de répétition du train d'onde, de manière à visualiser plusieurs motifs sur l'écran de l'oscilloscope.
4. Mesurez le spectre en faisant varier le nombre de motifs de 2 à 10. Qu'en concluez-vous ?

5.2 Étude d'une impulsion temporelle

1. Générez un train d'onde composé (Fig. 4) de n périodes d'un signal sinusoïdal à 10 kHz.
2. Réglez la fréquence de répétition du train d'onde, de manière à n'observer qu'un seul motif sur l'écran de l'oscilloscope.
3. Faites varier n de 1 à 30 en mesurant chaque fois le spectre de cette impulsion.
4. Vérifiez l'adéquation avec le spectre théorique, en décomposant le signal temporel et en étudiant la FFT de cette décomposition.
5. Recommencez la mesure avec une impulsion de la forme représentée sur la figure 5.
6. Quelle relation existe-t-il entre les deux signaux ? Interprétez cette relation d'un point de vue spectral.
7. Recommencez la mesure en réglant la fréquence de répétition du train d'onde de manière à visualiser plusieurs motifs sur l'écran de l'oscilloscope. Mesurez le spectre en faisant varier le nombre de motifs de 2 à 10. Qu'en concluez-vous ?

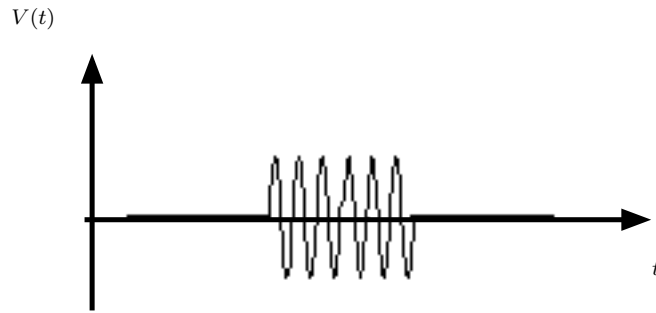


FIGURE 4 – Train d'onde

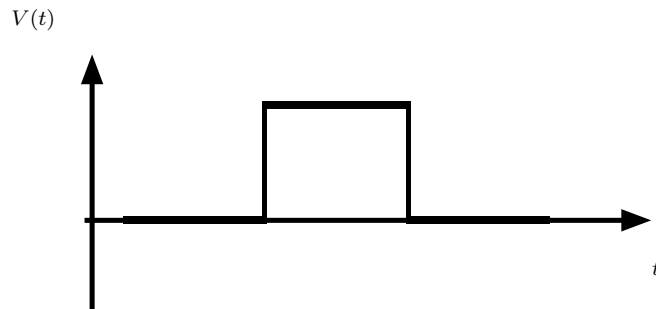


FIGURE 5 – Impulsion rectangulaire

6 Réponse en fréquence d'un filtre RLC

Cette dernière partie met en évidence l'intérêt de l'étude spectrale, par exemple pour tracer la réponse fréquentielle des circuits électroniques.

1. Réalisez le montage de la figure 6 avec $R = 1\text{ k}\Omega$, $L = 59, 100, \text{ ou } 200\text{mH}$ et $C = 22\text{ nF}$.

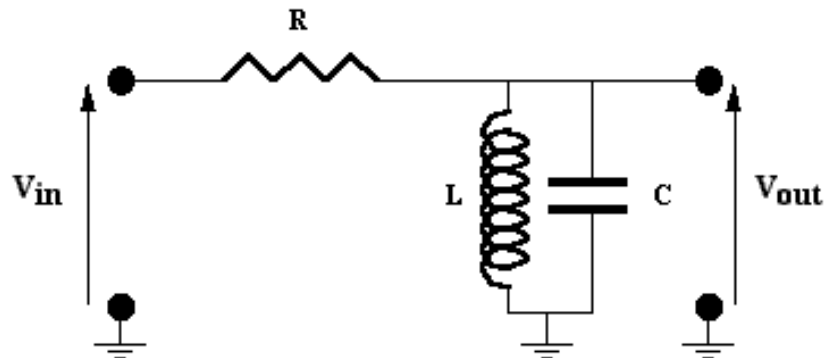


FIGURE 6 – Filtre RLC

2. Injectez en entrée V_{in} , un signal, dont la fréquence varie au cours du temps entre deux fréquences f_1 et f_2 ("sweep") et mesurez le spectre du signal présent en sortie du filtre V_{out} .

Le but est de tracer la réponse fréquentielle.

- (a) Première méthode : La vitesse de balayage est lente et vous utiliserez la mémoire d'affichage de l'oscilloscope.
- (b) Deuxième méthode : La vitesse de balayage est rapide et vous ne faites qu'un seul appel à la FFT pour déterminer la réponse en fréquence.

Discutez des avantages et inconvénients de chacune des méthodes.

3. Imaginez et mettez en œuvre au moins une autre méthode (utilisant la FFT bien sûr) permettant d'obtenir la réponse spectrale du filtre sans utiliser de balayage fréquentiel.