ESPCI
Systèmes linéaires, signaux et bruit
Correction du TD 1 : Stabilité d'un système linéaire

1 Système avec mémoire exponentielle

1. Ce système est clairement linéaire et invariant.
2. En prenant $e(t) = \mathrm{e}^{pt}$ et $s(t) = A\mathrm{e}^{pt}$ dans l'équation du système, on obtient

$$
\begin{aligned}
Ap\mathrm{e}^{pt} &= \mathrm{e}^{pt} - \gamma A \int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{-(t-t')/\tau} \mathrm{e}^{pt'} \mathrm{d}t' && (1)\\
&= \mathrm{e}^{pt} - \gamma A \mathrm{e}^{pt} \int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{-(\tau^{-1}+p)(t-t')} \mathrm{d}t' && (2)\\
&= \mathrm{e}^{pt} \left[1 - \gamma A \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-(\tau^{-1}+p)u} \mathrm{d}u \right] && (3)\\
&= \mathrm{e}^{pt} \left(1 - \frac{\gamma A}{p + \tau^{-1}} \right). && (4)
\end{aligned}
$$

   Ainsi, la fonction de transfert est

$$
A = H(p) = \frac{p + \tau^{-1}}{p^2 + \tau^{-1} p + \gamma}. \tag{5}
$$

3. Les pôles de la fonction de transfert sont

$$
p_{\pm} = -\frac{1}{2\tau} \left(1 \pm \sqrt{1 - 4\tau^2 \gamma} \right) \ ; \tag{6}
$$

   leur partie réelle est strictement négative, et le système est stable et causal, si $\gamma > 0$.
4. Déterminons la réponse indicielle de ce système, c'est à dire la réponse à la fonction de Heaviside en entrée, avec $s(0) = 0$ et $\dot{s}(0) = 0$. On a donc pour la transformée de Laplace $\hat{e}(p) = 1/p$ et donc

$$
\hat{s}(p) = H(p)\hat{e}(p) = \frac{p + \tau^{-1}}{p(p^2 + \tau^{-1} p + \gamma)}. \tag{7}
$$

   Pour inverser la transformée de Laplace, il faut déterminer les pôles du membre de droite et le décomposer en éléments simples. Ses pôles sont 0 et $p_{\pm}$ (Eq. (6)), on peut donc écrire

$$
\hat{s}(p) = \frac{A_0}{p} + \frac{A_+}{p - p_+} + \frac{A_-}{p - p_-} \tag{8}
$$

avec

$$A_0 = \frac{1}{\gamma\tau}, \tag{9}$$

$$A_+ = \frac{p_+ + \tau^{-1}}{p_+(p_+ - p_-)} = \frac{\tau\left(1 - \sqrt{1 - 4\tau^2\gamma}\right)}{1 - 4\tau^2\gamma + \sqrt{1 - 4\tau^2\gamma}}, \tag{10}$$

$$A_- = \frac{p_- + \tau^{-1}}{p_-(p_- - p_+)} = \frac{\tau\left(1 + \sqrt{1 - 4\tau^2\gamma}\right)}{1 - 4\tau^2\gamma - \sqrt{1 - 4\tau^2\gamma}}. \tag{11}$$

La réponse temporelle est donc

$$s(t) = \frac{1}{\gamma\tau} + A_+ \mathrm{e}^{p_+ t} + A_- \mathrm{e}^{p_- t}. \tag{12}$$

On vérifie par exemple que $s(0) = (\gamma\tau)^{-1} + A_+ + A_- = 0$, $\dot{s}(0^+) = p_+A_+ + p_-A_- = 1 = e(0^+)$ et $s(t \to \infty) = 1/(\gamma\tau)$, comme on pouvait le prédire avec l'équation du système.

La réponse indicielle présente un comportement oscillant si les pôles $p_\pm$ ont une partie imaginaire non nulle, ce qui arrive si $1 - 4\tau^2\gamma < 0$, c'est à dire $\gamma > 1/(4\tau^2)$.

5. En dérivant l'équation du système, on obtient

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}(t) = \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}(t) - \gamma s(t) + \frac{\gamma}{\tau}\int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{-(t-t')/\tau} s(t')\mathrm{d}t', \tag{13}$$

mais d'après l'équation du système,

$$\gamma \int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{-(t-t')/\tau} s(t')\mathrm{d}t' = e(t) - \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t), \tag{14}$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + \tau^{-1}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t) + \gamma s(t) = \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}(t) + \tau^{-1} e(t). \tag{15}$$

La fonction de tranfert (5) s'obtient directement à partir de cette relation.

2 Système avec mémoire quelconque

1. On procède de la même façon que dans le cas précédent en prenant $e(t) = \mathrm{e}^{pt}$, $s(t) = A\mathrm{e}^{pt}$. On arrive cette fois à

$$Ap = 1 - A\int_0^\infty m(u)\mathrm{e}^{-pu}\mathrm{d}u = 1 - A\hat{m}(p), \tag{16}$$

d'où on déduit la fonction de transfert

$$H(p) = \frac{1}{p + \hat{m}(p)}. \tag{17}$$

On peut aussi reconnaître directement dans la définition du système un produit de convolution, et utiliser la transformée de Laplace de ce produit.

2. D'après l'hypothèse et le théorème de la valeur initiale, $\lim_{p\to\infty} \hat{m}(p) = 0$, et donc $\lim_{p\to\infty} p + \hat{m}(p) = \infty$. Pour ne pas que $p + \hat{m}(p)$ ne s'annule sur $[0, \infty[$, il faut donc que $p + \hat{m}(p)$ soit positif en $p = 0$, c'est à dire

$$\hat{m}(0) = \int_0^\infty m(t)\mathrm{d}t > 0. \tag{18}$$