TD MF n°4

Exercice 1: Le vortex de Lamb-Oseen[1].

On considère un vortex de démarrage, engendré par la mise en rotation d'une surface solide dans un fluide. Le principe de l'expérience est présenté sur la figure 1-(a) et un exemple de tourbillon vu en coupe est présenté sur la figure 1-(b).

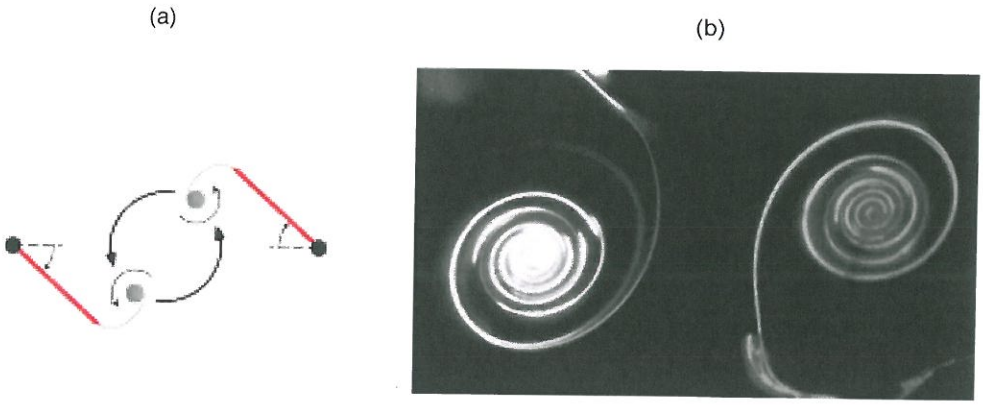

Figure 1: Génération d'un vortex de Lamb-Oseen: (a) principe de l'expérience (b) Exemple de vortex vu en coupe à l'aide de colorants fluorescents.

On se propose ici d'étudier la structure spatiale de ce tourbillon et son évolution temporelle. Nous faisons les hypothèses suivantes:

- Dans le repère du laboratoire, le tourbillon peut être modélisé par un écoulement plan instationnaire à symétrie de révolution de vitesse:

$$\underline{U} = u_\theta\,(r,t)\,\underline{e}_\theta$$

- Le fluide est newtonien, incompressible, homogène et l'on néglige les forces de volume.

1/ Ecrire l'équation locale d'évolution de l'impulsion et en déduire le champ de pression ainsi que l'équation d'évolution de u_θ.

2/ Chercher une solution autosimilaire pour u_θ de la forme $u_\theta = \frac{\Gamma}{r} f(\eta)$ avec $\eta = \frac{r}{\sqrt{\nu t}}$ qui vérifie la condition initiale $u_\theta(r, t = 0) = \frac{\Gamma}{2\pi r}$, où Γ est la circulation du tourbillon. Justifier la forme de la variable d'autosimilarité η.

3/ A l'aide de ces résultats, utiliser les mesures de vitesse présentées sur la figure 2 pour déterminer la taille du coeur du tourbillon et sa circulation Γ.

4/ Déterminer le champ de vorticité et montrer que partant d'un champ irrotationnel, la viscosité rend l'écoulement rotationnel.

5/ Commenter l'évolution finale de la paire de tourbillons.

[1]Les données expérimentales de ce sujet sont issues de la thèse de Patrice Meunier, réalisée avec Thomas Leweke.

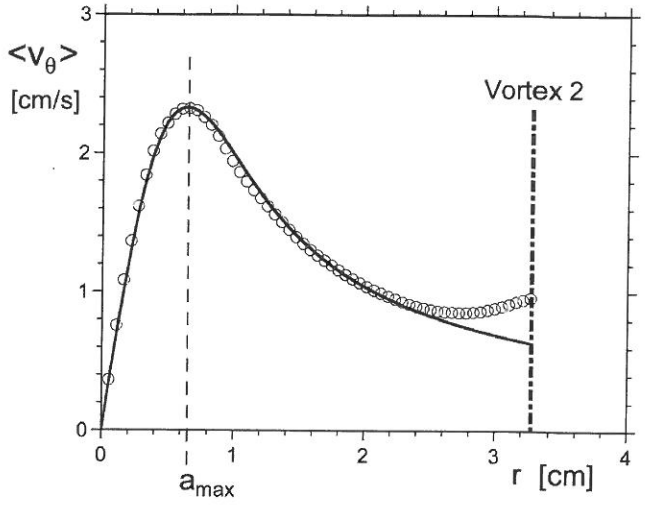

Figure 2: Champ de vitesse autour d'un tourbillon. Le trait noir continu représente un fit gaussien correspondant à la solution self-similaire.

Équation de Navier-Stokes

$$\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}+v_x\frac{\partial v_r}{\partial x}-\frac{v_\theta^2}{r}\right)$$
$$=-\frac{\partial p}{\partial r}+\eta\left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 v_r}{\partial x^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial r}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}-\frac{v_r}{r^2}\right)+\rho f_r,$$
$$\rho\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+v_x\frac{\partial v_\theta}{\partial x}+\frac{v_r v_\theta}{r}\right)$$
$$=-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}+\eta\left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial x^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}-\frac{v_\theta}{r^2}\right)+\rho f_\theta,$$
$$\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_x}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_x}{\partial \theta}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)$$
$$=-\frac{\partial p}{\partial x}+\eta\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_x}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_x}{\partial r}\right)+\rho f_x.$$