COURS DE MECANIQUE DU SOLIDE ET DES MATERIAUX (MSM2)

AMPHI 2:
RAPPELS MMC, ELASTICITE, METHODES ENERGETIQUES

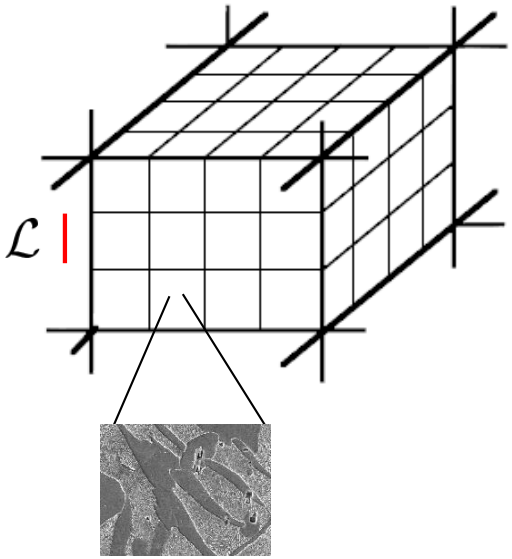
Matteo Ciccotti
Professeur ESPCI
Laboratoire SIMM
Esc H – H3.08

MENU DU JOUR…

- Rappels de MMC
  - Déformations
  - Contraintes
  - Loi dynamique
- Elasticité
  - Loi de Hooke
  - Différents modules élastiques
  - Energie élastique
- Méthodes de solution de problèmes MMC
  - Equations différentielles
  - Minimisation énergétique
  - Analyse de stabilité

2. LA MECANIQUE DU MILIEU CONTINU (MMC)

Description de la matière
à une échelle d'étude artificielle $\mathcal{L}$
dite **mésoéchelle**



Intermédiaire entre l'**échelle macroscopique** …
(structure du corps et distribution
des contraintes extérieures)

… et l'**échelle microscopique**
(nature atomique, microstructure du matériau)

La description au niveau macroscopique devient l'ensemble d'un **champ de contrainte** et d'un **champ de déformation**, les deux étant fonctions continues et régulières à l'intérieur d'un corps homogène.

La nature des contraintes et déformations dans un corps solide est mathématiquement représentée par des **tenseurs**, qui peuvent être représentés par des matrices : $\overline{\overline{\sigma}}$ et $\overline{\overline{\varepsilon}}$

2.1 LE TENSEUR DE (PETITE) DEFORMATION

La déformation décrit le changement de forme locale (distance et angles)

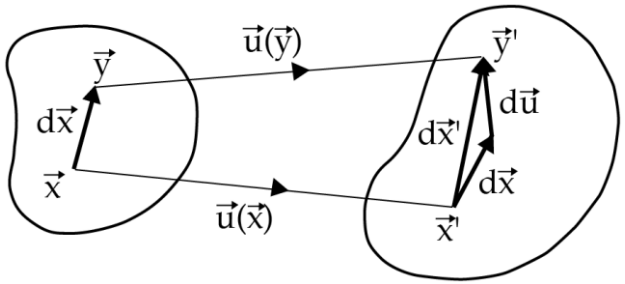
$$\varepsilon \sim \frac{du}{dx}$$

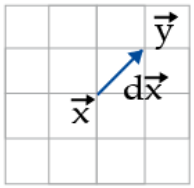
Sans dimension

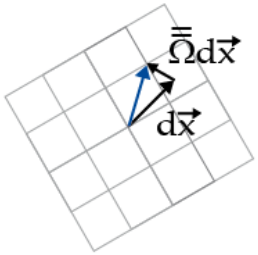
$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \qquad \bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

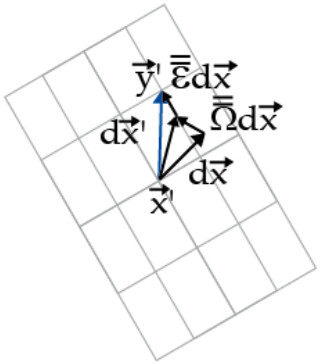
Symétrique

$$d\vec{u} = d\vec{x}' - d\vec{x} = \bar{\bar{\varepsilon}}\, d\vec{x} + \bar{\bar{\Omega}}\, d\vec{x}$$









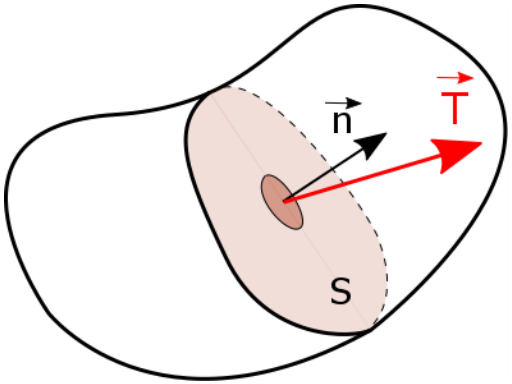
2.2 LE TENSEUR DE CONTRAINTE

Le vecteur de contrainte dépend de la facette considérée!
Le tenseur de contrainte fournit la relation linéaire entre le vecteur normal à la facette et le vecteur de contrainte relatif.

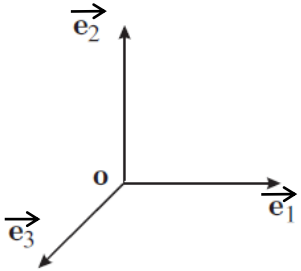
$$\sigma \sim \frac{F}{S} \qquad \left[Pa = \frac{N}{m^2} \right]$$

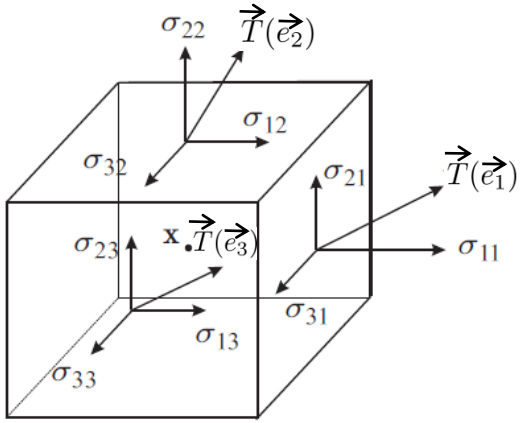
$$\vec{T} = \bar{\bar{\sigma}}\vec{n} \qquad \bar{\bar{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

Symétrique



Cauchy (1927)





REPERE PROPRE ET INVARIANTS

Comme tout **tenseur symétrique**, contrainte et déformation sont **diagonalisables**: dans le **repère propre** les vecteurs de contraintes sont colinéaires aux normales. La matrice représentative est alors diagonale, avec trois **valeurs propres** $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

Représentation géométrique 2D

On peut construire d'autres invariants, mais un tenseur symétrique de rang 2 en 3D aura seulement **trois invariants indépendants** :

$$\boxed{I_1 = \mathrm{Tr}\ \overline{\overline{\sigma}} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}$$

$$I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1$$

$$I_3 = \det\ \overline{\overline{\sigma}} = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$$

…ou encore…

$$\boxed{I_2^* = \mathrm{Tr}\ (\overline{\overline{\sigma}}^2) = \sigma_{ij}\sigma_{ij} = I_1^2 - 2I_2}$$

$$I_3^* = \mathrm{Tr}\ (\overline{\overline{\sigma}}^3) = I_1^3 - 3I_1I_2 + 3I_3$$

Définitions :

$$|\overline{\overline{\sigma}}| \equiv \sqrt{\mathrm{Tr}\ (\overline{\overline{\sigma}}^2)}$$ Norme

$$\overline{\overline{\mathrm{signe}}}\ (\overline{\overline{\sigma}}) \equiv \frac{\overline{\overline{\sigma}}}{|\overline{\overline{\sigma}}|}$$ Signe

SPHERIQUE ET DEVIATEUR

Comme **les lois physiques sont indépendantes du repère** choisi, elle doivent pouvoir être écrites en termes d'invariants.

Il est judicieux de décomposer contrainte et déformation en deux parties:

1) Sphérique (partie isotrope) :

$$\overline{\overline{S}}_\sigma = \sigma_m \overline{\overline{I}} \qquad \sigma_m = \frac{\mathrm{Tr}\ \overline{\overline{\sigma}}}{3} = -p$$

Pression

$$\varepsilon_m = \frac{\mathrm{Tr}\ \overline{\overline{\varepsilon}}}{3} = \frac{1}{3}\frac{dV}{V}$$

Dilatation

2) Déviateur (partie anisotrope) :

$$\overline{\overline{D}}_\sigma = \overline{\overline{\sigma}} - \overline{\overline{S}}_\sigma \qquad \sigma_d = \sqrt{\frac{\mathrm{Tr}(\overline{\overline{D}}_\sigma^2)}{3}} = \frac{|\overline{\overline{D}}_\sigma|}{\sqrt{3}}$$

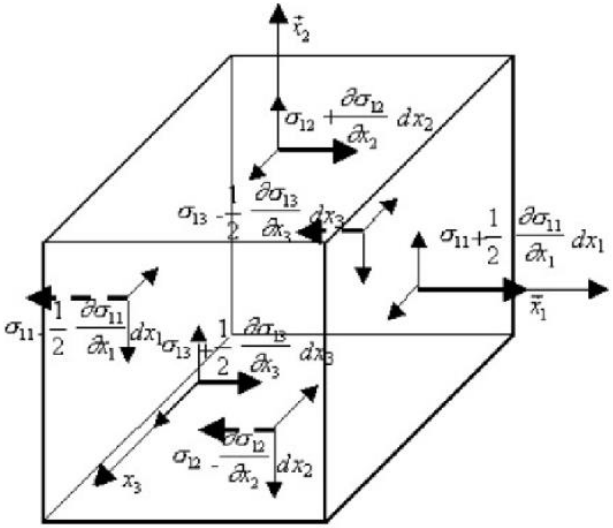
$$\overline{\overline{\sigma}} = \overline{\overline{S}}_\sigma + \overline{\overline{D}}_\sigma = \sigma_m \overline{\overline{I}} + \sqrt{3}\sigma_d\ \overline{\overline{\mathrm{signe}}}\left(\overline{\overline{\sigma}}\right)$$

Exemple: Loi de Hooke

$$\boxed{\overline{\overline{S}}_\sigma = 3K\overline{\overline{S}}_\varepsilon \qquad \overline{\overline{D}}_\sigma = 2\mu\overline{\overline{D}}_\varepsilon}$$

2.3 LOI DE LA DYNAMIQUE ET EQUILIBRE STATIQUE

En considérant la **loi de la dynamique** sur un petit élément de MMC, nous sommes obligés de considérer las **résultante des forces appliquées par les éléments voisins**:



$$\sum_{faces} \overrightarrow{T}\, dS + \overrightarrow{f}\, dV = \rho \overrightarrow{a}\, dV$$

$$\overrightarrow{\mathrm{div}}\, \overline{\overline{\sigma}} + \overrightarrow{f} - \rho \overrightarrow{a} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i - \rho a_i = 0$$

Cas particuliers:

$$\overrightarrow{\mathrm{div}}\, \overline{\overline{\sigma}} + \overrightarrow{f} = 0$$

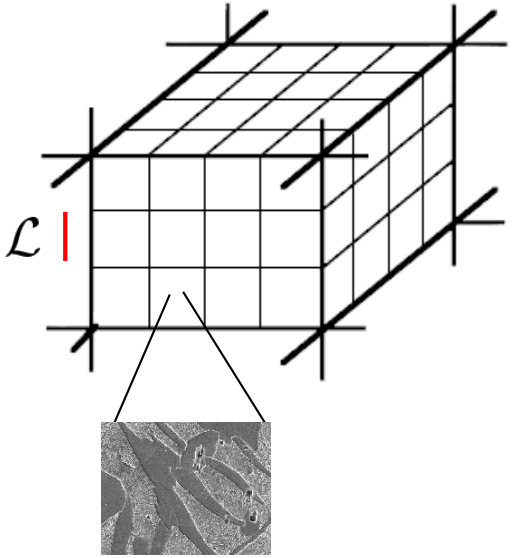
Equilibre statique

$$\overrightarrow{\mathrm{div}}\, \overline{\overline{\sigma}} = 0$$

+ **absence forces extérieures** (volumiques)

2.4 LES LOIS DE COMPORTEMENT

Tout les détails de l'échelle microscopique sont **homogénéisés** dans la description de **l'état mécanique local (contrainte et déformation)** et dans une **loi de comportement liant les deux**:



$$\mathcal{F}\left(\overline{\overline{\sigma}}, \dot{\overline{\overline{\sigma}}}, \overline{\overline{\varepsilon}}, \dot{\overline{\overline{\varepsilon}}}\right) = 0$$

Exemple: élastique, visco-élastique, plastique, etc…

On traitera principalement des milieux continus:
- **Homogènes** (mêmes propriétés en tout point)
- **Isotropes** (mêmes propriétés dans toutes les directions)

Occasionnellement matériaux **orthotropes**
(3 directions orthogonales, exemple: bois, composites à fibres)

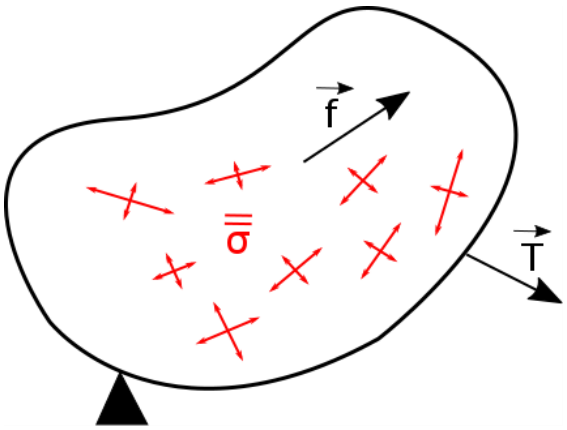
2.4.1 LE PROBLEME GENERAL DE LA MECANIQUE

Le problème général de la mécanique sera de trouver au même temps un **champ de déplacement** et un **champ de contraintes** qui:

1) respectent la **continuité** du corps déformable

2) respectent la **loi d'équilibre mécanique**

3) respectent les **conditions aux limites** (déplacements et contraintes imposées aux frontières)



4) soient **liés** à chaque point **par la loi de comportement** du matériau.

Les champs de déplacement et de contrainte seront fonctions régulières à l'intérieur des frontières (bords, interfaces, fissures).

3 ELASTICITE': REPPELS SUL LA LOI DE HOOKE MODULES ELASTIQUES - MATERIAU ISOTROPE

Deux modules au choix entre les suivants:

K	Module de compressibilité
E	Module d'Young – Traction uniaxiale
ν	Rapport de Poisson – Contraction latérale en traction uniaxiale
λ	Premier coefficient de Lamé
μ	Second coefficient de Lamé – Module de cisaillement
M	Module oedométrique (Compression confinée, onde compression)

	(λ, μ)	(E, μ)	(K, λ)	(K, μ)	(λ, ν)	(μ, ν)	(E, ν)	(K, ν)	(K, E)
$K =$	$\lambda + \frac{2\mu}{3}$	$\frac{E\mu}{3(3\mu - E)}$			$\lambda\frac{1+\nu}{3\nu}$	$\frac{2\mu(1+\nu)}{3(1-2\nu)}$	$\frac{E}{3(1-2\nu)}$		
$E =$	$\mu\frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}$		$9K\frac{K-\lambda}{3K-\lambda}$	$\frac{9K\mu}{3K+\mu}$	$\frac{\lambda(1+\nu)(1-2\nu)}{\nu}$	$2\mu(1+\nu)$		$3K(1-2\nu)$	
$\lambda =$		$\mu\frac{E-2\mu}{3\mu-E}$		$K - \frac{2\mu}{3}$		$\frac{2\mu\nu}{1-2\nu}$	$\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$	$\frac{3K\nu}{1+\nu}$	$\frac{3K(3K-E)}{9K-E}$
$\mu =$			$3\frac{K-\lambda}{2}$		$\lambda\frac{1-2\nu}{2\nu}$		$\frac{E}{2+2\nu}$	$3K\frac{1-2\nu}{2+2\nu}$	$\frac{3KE}{9K-E}$
$\nu =$	$\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$	$\frac{E}{2\mu} - 1$	$\frac{\lambda}{3K-\lambda}$	$\frac{3K-2\mu}{2(3K+\mu)}$					$\frac{3K-E}{6K}$
$M =$	$\lambda + 2\mu$	$\mu\frac{4\mu-E}{3\mu-E}$	$3K - 2\lambda$	$K + \frac{4\mu}{3}$	$\lambda\frac{1-\nu}{\nu}$	$\mu\frac{2-2\nu}{1-2\nu}$	$E\frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$	$3K\frac{1-\nu}{1+\nu}$	$3K\frac{3K+E}{9K-E}$

MODULES D'YOUNG ET RAPPORT DE POISSON

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_{\parallel}}$$

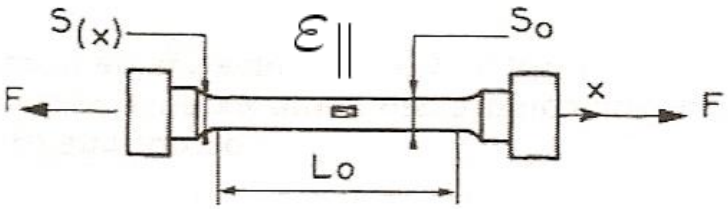
Module d'Young

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_{\parallel}}$$

Rapport de Poisson

$$-1 < \nu < 1/2$$

Traction uniaxiale



$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \dfrac{1}{E}[\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})] \\ \varepsilon_{22} = \dfrac{1}{E}[\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{33})] \\ \varepsilon_{33} = \dfrac{1}{E}[\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})] \\ \varepsilon_{12} = \dfrac{\sigma_{12}}{2\mu} \qquad \varepsilon_{13} = \dfrac{\sigma_{13}}{2\mu} \qquad \varepsilon_{23} = \dfrac{\sigma_{23}}{2\mu} \end{cases}$$

$$\overline{\overline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E}\overline{\overline{\sigma}} - \frac{\nu}{E}\mathrm{Tr}(\overline{\overline{\sigma}})\,\overline{\overline{I}}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij}$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

MODULES DE COMPRESSIBILITE ET CISAILLEMENT

Décomposition en sphérique et déviateur

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\varepsilon_{kk}}{3}\delta_{ij} + \left(\varepsilon_{ij} - \frac{\varepsilon_{kk}}{3}\delta_{ij}\right) \qquad \overline{\overline{\varepsilon}} = \overline{\overline{S}}_\varepsilon - \overline{\overline{D}}_\varepsilon = \varepsilon_m \overline{\overline{\delta}} + \varepsilon_d \overline{\overline{\pi}}_\varepsilon$$

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} = K\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\left(\varepsilon_{ij} - \frac{\varepsilon_{kk}}{3}\delta_{ij}\right)$$

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$$

Module de compressibilité

$$\overline{\overline{\sigma}} = \overline{\overline{S}}_\sigma + \overline{\overline{D}}_\sigma = \sigma_m \overline{\overline{\delta}} + \sigma_d \overline{\overline{\pi}}_\sigma$$

$$\boxed{\overline{\overline{S}}_\sigma = 3K\overline{\overline{S}}_\varepsilon \qquad \overline{\overline{D}}_\sigma = 2\mu\overline{\overline{D}}_\varepsilon \qquad \overline{\overline{\pi}}_\sigma = \overline{\overline{\pi}}_\varepsilon}$$

Découplage

$$\sigma_m = 3K\varepsilon_m = K(dV/V)$$

Module de compressibilité

$$K = \frac{-dP}{\frac{dV}{V}} = -V\frac{dP}{dV}$$

$$\sigma_d = 2\mu\varepsilon_d$$

Module de cisaillement

ELASTICITE' 2D (SYMETRIE EN x_3)

1) Déformation plane (objets très épaisses en x_3)

$$u_3 = 0 \qquad u_1, u_2 \text{ indep. de } x_3 \qquad \varepsilon_{ij} = 1/2(\partial u_i/x_j + \partial u_j/x_i)$$

$$\varepsilon_{33} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0$$

$$\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12} \quad \text{indépendant de } x_3$$

$$\varepsilon_{33} = 1/E(\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})) = 0$$

Hooke

$$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$$

$$\overline{\overline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \overline{\overline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \frac{1}{E'}(\sigma_{11} - \nu'\sigma_{22}) \\ \varepsilon_{22} = \frac{1}{E'}(\sigma_{22} - \nu'\sigma_{11}) \\ \varepsilon_{12} = \frac{\sigma_{12}}{2\mu} \end{cases} \qquad E' = \frac{E}{1-\nu^2} \qquad \nu' = \frac{\nu}{1-\nu}$$

Modules effectifs

ELASTICITE' 2D (SYMETRIE EN x_3)

2) Contrainte plane (objets très fins en x_3)

$$\sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$$

$$\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12} \quad \text{indépendant de } x_3$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \dfrac{1}{E}(\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}) \\ \varepsilon_{22} = \dfrac{1}{E}(\sigma_{22} - \nu\sigma_{11}) \\ \varepsilon_{12} = \dfrac{\sigma_{12}}{2\mu} \qquad \mu = \dfrac{E}{2(1+\nu)} \end{cases}$$

Hooke

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})$$

$$\varepsilon_{23} = 0 \qquad \varepsilon_{13} = 0$$

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \end{pmatrix}$$

$$E' = E \qquad \nu' = \nu$$

Modules effectifs