

# Mécanique des Solides et des Matériaux 2

## Préceptorat n° 2

### Contact et frottement de surfaces rugueuses

Léonard de Vinci au 15ème siècle puis deux physiciens français des 16ème et 17ème siècles (Guillaume Amontons [1663-1705] et Charles-Augustin Coulomb [1736-1806]) ont fait l'observation expérimentale que la force de frottement  $F$  entre deux surfaces solides était proportionnelle à la force normale  $P$  appliquée et indépendante de l'aire de contact macroscopique. Connue sous le nom de loi de frottement d'Amontons et Coulomb, la relation qui en découle ( $F = \mu P$  où  $\mu$  est le coefficient de frottement) reste encore aujourd'hui très usitée par les ingénieurs. Il a cependant fallu attendre les années 1950 pour que les premières explications physiques à ces lois soient proposées à partir de considérations liées à la rugosité des surfaces.

Dans le cadre de ce préceptorat, on verra en particulier comment la loi de Coulomb peut être vue comme une conséquence de la distribution statistique des hauteurs des aspérités présentes sur les surfaces rugueuses. On s'intéressera ensuite au cas de substrats viscoélastiques où les effets dissipatifs liés à la déformation du substrat à l'échelle des aspérités est une des composantes de la force de frottement.

## 1 Contact d'une sphère rigide sur un solide mou

On considère une sphère rigide lisse de rayon  $R$  qui s'enfonce sur une distance  $\delta$  et sous une charge  $P$  au contact d'un plan lisse déformable de module d'Young  $E$ . Le rayon  $a$  du contact est supposé petit devant le rayon  $R$  de la sphère.

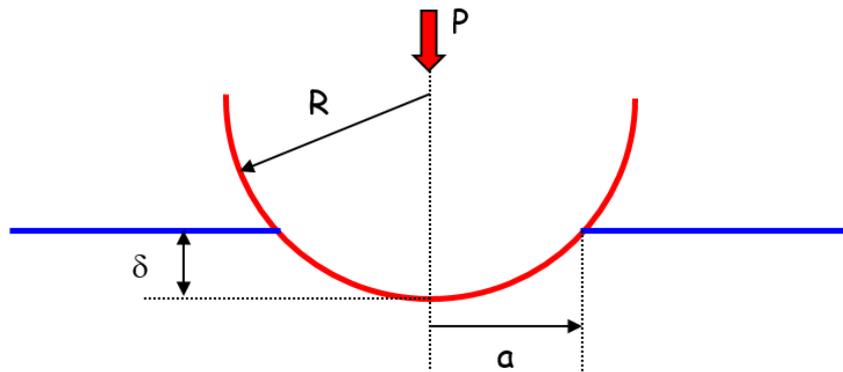


Figure 1: Contact entre une sphère rigide et un plan élastique de module d'Young  $E$ .

### 1.1 Contact Hertzien non adhésif

En première approche, on néglige les effets d'adhésion entre les deux surfaces.

1. A partir de considérations géométriques, déterminez que la relation liant l'enfoncement  $\delta$  au rayon du contact  $a$  est  $\delta = a^2/R$ .

2. Déterminez en loi d'échelle l'énergie élastique mise en jeu dans la déformation du contact. Déduisez-en la relation entre la force normale  $P$  et le rayon du contact  $a$ .

## 1.2 Contact adhésif

On considère maintenant l'existence de forces d'adhésion entre les surfaces. Sous un enfoncement donné, les interactions adhésives entre les surfaces vont avoir pour effet d'augmenter l'aire de contact. Le gain en énergie d'adhésion va ainsi compenser le coût en énergie élastique engendré par la déformation.

1. Si  $w$  est l'énergie d'adhésion par unité de surface, quel est le gain d'énergie résultant du contact entre la sphère et le plan?
2. A partir du bilan de l'énergie mécanique (élastique et potentielle) mise en jeu dans le contact, déduisez-en en loi d'échelle la relation entre le rayon de contact et la force appliquée.

## 2 Contact élastique d'une surface rugueuse statistique

On considère un modèle simplifié de surface rugueuse constituée d'une collection d'aspérités rigides de rayon  $R$  distribuées en hauteur (Fig. (2)). Le nombre total d'aspérités sur la surface de taille nominale  $\mathcal{A}$  est  $N$ . La probabilité de trouver une aspérité à une altitude comprise entre  $z$  et  $z + dz$  par rapport au plan moyen de la surface est donnée par  $\phi(z)dz$  où  $\phi(z)$  est la fonction de densité de probabilité décrivant la distribution de hauteur des sommets.

Ce plan rugueux est mis en contact sous une force  $P$  avec un plan lisse élastique. On note  $d$

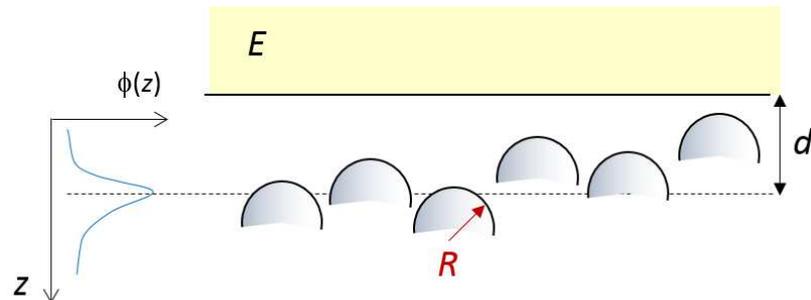


Figure 2: Contact entre un plan élastique et une surface rugueuse statistique constituée d'aspérités sphériques distribuées en hauteur.

la séparation entre la surface du plan déformable et le plan moyen de la surface rugueuse. Pour une séparation donnée  $d$ , un contact va s'établir au niveau des aspérités dont la hauteur est supérieure à  $d$ . La probabilité de former un contact au niveau d'une aspérité de hauteur  $z$  est donc

$$prob(z > d) = \int_d^{\infty} \phi(z) dz \quad (5)$$

### 2.1 Contact non adhésif

1. En supposant que les aspérités sont indépendantes les unes des autres et ont individuellement un comportement Hertzien, établissez que la valeur de l'aire de contact totale  $A$  et celle de la force normale  $P$  pour une séparation donnée  $d$  des surfaces est donnée par

$$A(d) = \pi NR \int_d^\infty (z - d) \phi(z) dz \quad (6)$$

$$P(d) = NER^{1/2} \int_d^\infty (z - d)^{3/2} \phi(z) dz \quad (7)$$

2. On normalise la hauteur des aspérités par l'écart-type  $\sigma$  de la distribution des hauteurs et l'on note  $\eta$  la densité surfacique d'aspérités avec  $N = \eta\mathcal{A}$  où  $\mathcal{A}$  est l'aire de contact nominale. On définit ainsi

$$\begin{aligned} \text{le nombre total de contacts: } n &= \eta\mathcal{A}F_0(h) \\ \text{l'aire de contact réelle: } A &= \pi\eta\mathcal{A}R\sigma F_1(h) \\ \text{la force normale: } P &= \eta\mathcal{A}ER^{1/2}\sigma^{3/2}F_{3/2}(h) \end{aligned} \quad (8)$$

où  $h = z/\sigma$  est la séparation normalisée et

$$F_n(h) = \int_h^\infty (s - h)^n \phi^*(s) ds \quad (9)$$

avec  $\phi^*(z)$  la distribution normalisée des hauteurs, c'est à dire la distribution normalisée de façon à ce que l'écart-type soit égal à l'unité.

On considère le cas d'une distribution exponentielle des hauteurs pour laquelle la fonction  $F_n(h)$  est simplement donnée par  $F_n(h) = n!e^{-h}$ .

- Déterminez les expressions correspondantes du nombre de contacts  $n$ , de l'aire de contact totale  $A$  et de la force  $P$  (on prendra  $(3/2)! \approx 1$ ).
- Commentez en particulier la relation  $A(P)$  et la valeur moyenne de la pression de contact au niveau des contacts.

A titre d'exemple, la Fig. (3) donne un exemple de résultat expérimental obtenu à partir d'un contact entre une surface d'élastomère silicone et une lentille de verre décorée d'aspérités rigides. Expérimentalement, on obtient  $A \propto P^{0.85}$ . Le fait que l'exposant soit inférieur à l'unité et uniquement lié à la courbure de la lentille de verre (l'exposant tend vers 1 quand on réduit la courbure pour se rapprocher du contact de surfaces nominale-ment planes).

## 2.2 Contact plastique

On considère maintenant le cas où une déformation plastique peut se produire à l'échelle de certains contacts. On considère que celle-ci a lieu quand la valeur moyenne de la pression de contact atteint une valeur limite  $H$  appelée dureté ( $EN$ : *hardness*) et caractérisant l'écoulement plastique au sein du contact (de fait  $H$  s'approche du seuil de plastification  $\sigma_y$ ).

- Déterminez en fonction de  $R$ ,  $E$  et  $H$  l'indentation critique  $\delta_p$  correspondant à l'apparition d'une déformation plastique au sein d'un micro-contact.
- En vous fondant sur les expressions (8) et (9) déterminez la valeur de l'aire totale  $A_p$  des contacts déformés plastiquement. On supposera pour cela que les relations du contact élastique restent pertinentes en ordre de grandeur. Que peut-on dire du rapport  $A_p/A$ ?

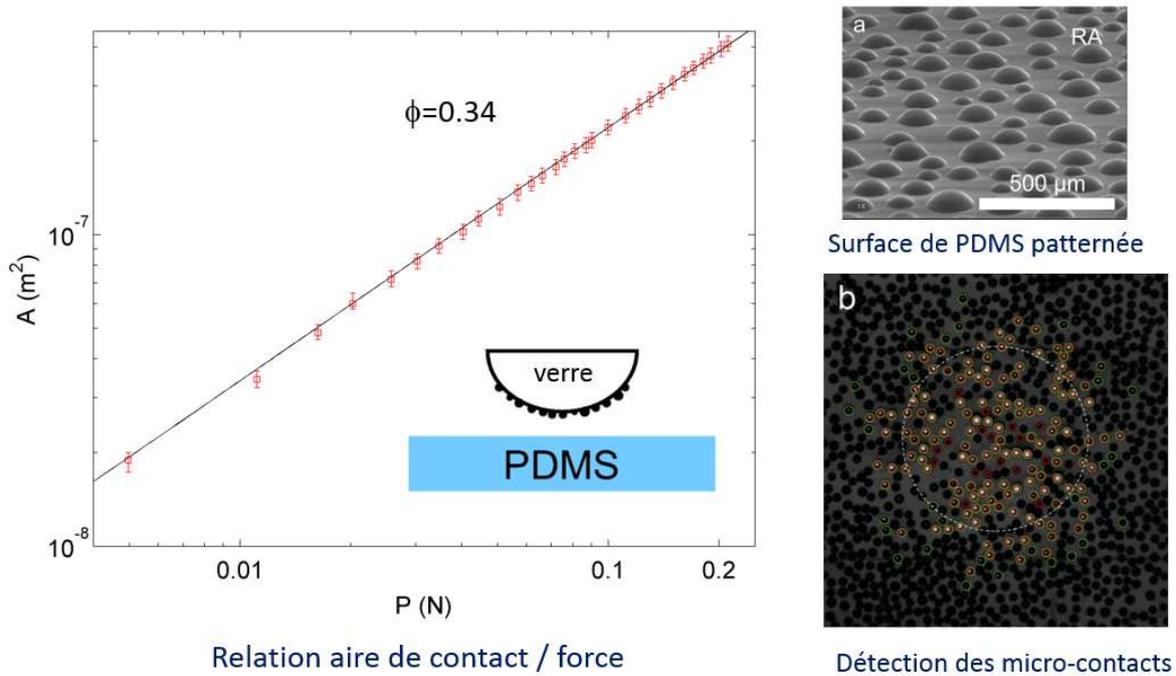


Figure 3: Contact entre une surface lisse d'élastomère silicone (PDMS) et une lentille de verre décorée d'aspérités sphériques rigides taux de couverture de la surface:  $\Phi = 0.34$ ). Les micro-contacts formés entre les surfaces sont détectées optiquement.

3. La Fig. (4) donne pour des surfaces d'aluminium la frontière entre les domaine élastique et plastique en fonction de pression de contact et de l'indice de plasticité  $\Psi = E/H(\sigma/R)^{1/2}$ . Qu'en déduit-on?

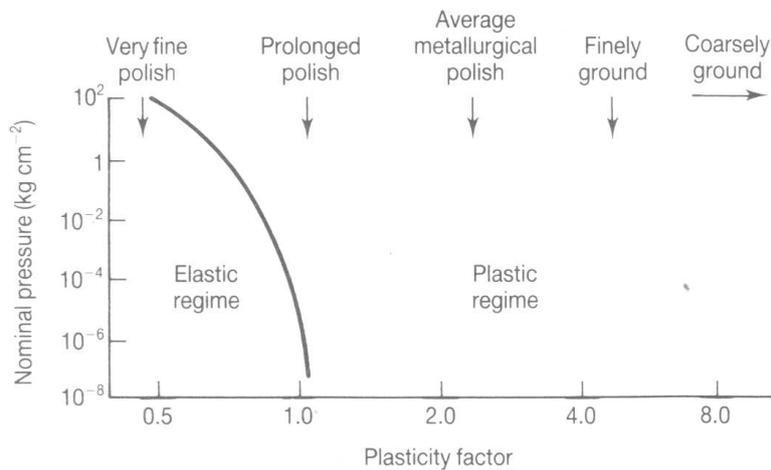


Figure 4: Domaines de déformation élastique et plastique de micro-contacts entre surfaces d'aluminium rugueuses. La limite entre le régime élastique et plastique (définie en prenant un critère arbitraire  $A_p/A$ ) est reportée en fonction de la contrainte nominale et de l'indice de plasticité  $\Psi$ ).

### 2.3 Contact adhésif

1. En vous fondant sur les expressions établies pour le contact adhésif d'une sphère, établissez pour une surface rugueuse les expressions donnant la nombre total  $n$  de contacts, l'aire de contact totale  $A$  et la force normale  $P$  en fonction de l'approche  $h = d/\sigma$  des surfaces. Montrer que la condition pour que les surfaces soient collantes s'écrit:

$$\frac{w R^{1/2}}{E \sigma^{3/2}} > 1 \quad (10)$$

## 3 Frottement

1. On s'intéresse maintenant au frottement de contacts rugueux. En première approche, on suppose que la force de frottement  $F_t$  est proportionnelle à l'aire de contact réelle entre les deux surfaces soit

$$F_t = \tau A \quad (11)$$

où le terme  $\tau$  correspond à une contrainte de cisaillement interfaciale censée représenter physiquement les processus dissipatifs mis en jeu dans le contact. En ne considérant tout d'abord que le cas de surfaces élastiques non adhésives, que peut-on dire de la dépendance de la force de frottement vis à vis de la force normale? Qu'en serait-il si toutes les aspérités étaient à la même hauteur? Qu'en est-il si les micro-contacts se déforment plastiquement?

2. On considère maintenant le cas où la surface déformable est viscoélastique. Une aspérité rigide se déplaçant à une vitesse  $v$  va ainsi déformer le massif viscoélastique à une fréquence caractéristique de l'ordre de  $\nu = v/a$  où  $a$  correspond à la taille caractéristique des micro-contacts. Si cette fréquence est proche de  $1/\tau$  où  $\tau$  est le temps caractéristique de relaxation viscoélastique, une partie du travail de la force exercée par l'aspérité va donc être dissipée sous forme de pertes visqueuses. Ce type d'explication est souvent invoqué pour expliquer l'existence d'un pic dans les lois frottement/vitesse de caoutchoucs avec des surfaces rugueuses (cf Fig. (5)).

On se propose d'évaluer en ordre de grandeur la force de frottement correspondante dans le cas d'une surface rugueuse non adhésive.

- (a) On considère dans un premier temps une aspérité rigide isolée de rayon  $R$ . En première approche, on ne prend en compte que le travail de la force normale quand on déplace latéralement la sphère tout en supposant que le contact reste régi par les équations de Hertz. On rappelle les expressions de Hertz pour la pression de contact  $p(r)$  et le déplacement vertical  $u_z$  des points de la surface à l'intérieur du contact:

$$p(r) = \frac{3P}{2\pi a^2} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^{1/2} \quad (12)$$

$$u_z(r) = \delta - r^2/2R = \delta - (x^2 + y^2)/2R \quad (13)$$

où  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  est la coordonnée radiale par rapport au centre de la sphère et  $a$  le rayon du contact. Sur la base de ces expressions, établissez que le travail effectué par la sphère lors d'un déplacement latéral élémentaire  $\delta$  peut s'écrire

$$W = \frac{\delta}{R} \int \int p(x, y) x dx dy \quad (14)$$

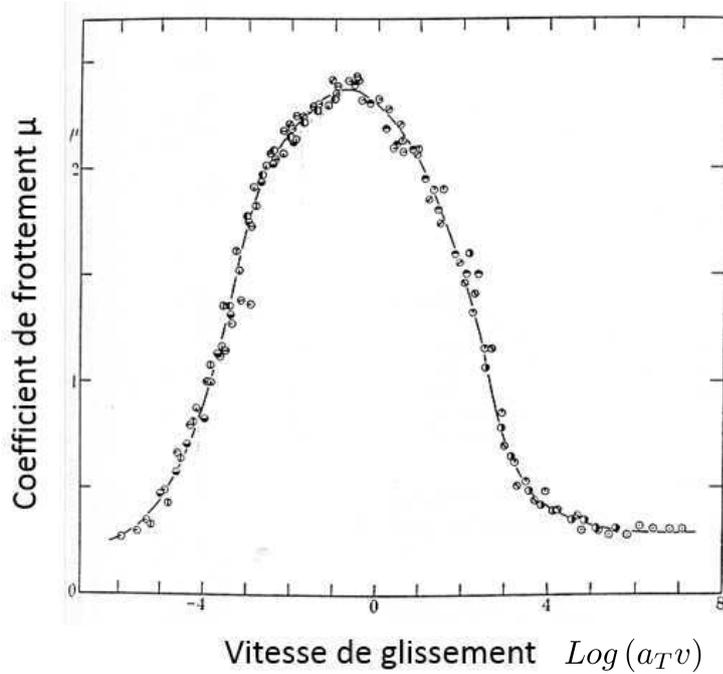


Figure 5: Loi frottement/vitesse d'un caoutchouc avec une surface de verre sablée. Le maximum de frottement se produit à la vitesse à laquelle la fréquence caractéristique  $\nu = v/a$  excitée par les rugosités micrométriques de la surface sablée est voisine de la fréquence du maximum de dissipation viscoélastique de l'élastomère à la température considérée.

- (b) En ne prenant en compte le travail de la force normale que dans la portion de sphère où le substrat est comprimé (c'est à dire pour  $x > 0$  dans un repère attaché à la sphère), déterminez l'expression de la force de frottement  $F_t \equiv W/\Delta$  en fonction de  $P$ ,  $R$  et  $a$ .
- (c) Étendre en loi d'échelle ce résultat au cas d'une surface rugueuse statistique (distribution exponentielle de hauteur). On suppose que la force de frottement est égale à la somme des contributions des aspérités. Que peut-on dire du caractère Coulombien ou non du frottement?