

Mécanique des solides

Préceptorat n° 1

Élasticité et Surfaces : crack !

Ce tutorat est inspiré de la thèse de Joël Marthelot (125) effectuée conjointement au laboratoire PMMH et à Saint-Gobain : <https://jmarthelot.weebly.com/cracks.html>

Le but de ce tutorat est d'illustrer comment des arguments très simples basés sur une minimisation d'énergie permettent de "résoudre" des problèmes d'élasticité complexes. Cette approche ne vise pas à donner une réponse exacte car les préfacteurs sont négligés ainsi que les effets de second ordre. En revanche, cela permet d'obtenir rapidement des lois analytiques qui peuvent aider le chercheur à valider (ou non) des mécanismes physiques. D'un point de vue ingénierie, une loi d'échelle permet d'estimer très rapidement un ordre de grandeur et de sélectionner une solution technique réaliste.

Néanmoins, les approches en lois d'échelles ne sont pas universelles et ne donnent pas une réponse à tous les problèmes de mécanique ! Un développement calculatoire plus laborieux ou une simulation numérique doivent être alors rappelés en renfort.

1 L'expérience du rabot (clivage)

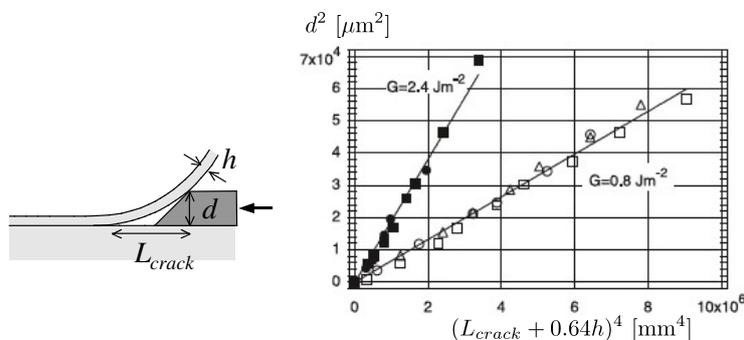


FIGURE 1 – Test de clivage : une lame vient fissurer le matériau, la mesure de la longueur de fissure L_{crack} permet de déterminer l'énergie de fracture du matériau. Mesures expérimentales sur des multicouches déposées sur du verre dans les laboratoires de Saint-Gobain (Barthel *et al.* 2005), la petite correction $0.64h$ provient d'un calcul plus précis dans le cas où h n'est plus négligeable devant L_{crack} .

En mécanique de la rupture, on considère que casser un matériau coûte une certaine énergie de fracture égale au produit de la surface créée par un coefficient Γ (exprimé en J/m^2).

Prenons l'exemple des tests de clivage basés sur les travaux d'Obbreimoff (1930) qui sont couramment pratiqués pour mesurer l'énergie de rupture d'un matériau. Il s'agit de soulever une couche mince à l'aide d'une lame d'épaisseur d et de mesurer la longueur de la fissure à l'avant de la lame (Fig. 1). Un menuisier appellerait cette technique le "test du rabot".

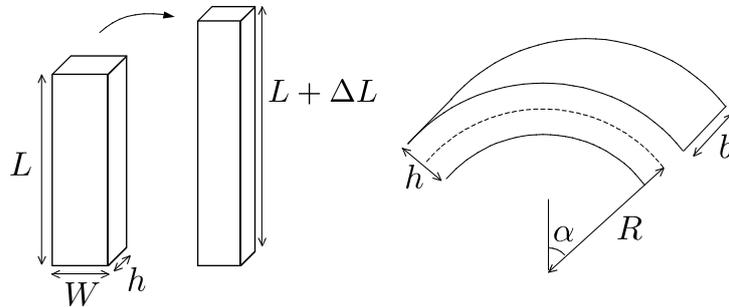
Comment en déduire l'énergie de fracture Γ ?

Le travail de l'opérateur va dans un premier temps entraîner la flexion de la couche clivée. Quelle est, en loi d'échelle, l'énergie élastique mise en jeu ?

Solution: Partons d'une tige de longueur initiale L tirée uniaxialement. L'incrément de longueur ΔL conduit au taux de déformation $\epsilon = \Delta L/L$. L'énergie d'extension mise en jeu est alors donnée par :

$$\mathcal{U}_{ext} \sim E h L b \epsilon^2,$$

où h et b sont l'épaisseur et la largeur de la poutre et dans lequel on oublie le préfacteur $1/2$.



Cette loi traduit simplement la loi de Hooke, $\sigma = E\epsilon$ intégrée sur le volume déformé Lbh . Comment en déduire l'énergie de flexion d'une poutre ? Si R est le rayon de courbure médian de la poutre, cette dernière est étirée à l'extérieur de la courbure et comprimée vers l'intérieur. Le taux de déformation typique est donné par : $\epsilon \sim [\alpha(R+h/2) - \alpha R]/\alpha R \sim h/R$, ce qui conduit à l'énergie de flexion :

$$\mathcal{U}_b \sim \frac{E h^3}{R^2} b L$$

Revenons au problème du clivage. La courbure typique de la lamelle vaut $1/R \sim d/L_{crack}^2$ (ce qui correspond à la dérivée seconde). L'énergie de flexion est ainsi donnée par

$$\mathcal{U}_b \sim E h^3 b \frac{d^2}{L_{crack}^3}$$

Le front de fracture va-t-il progresser ? Oui, si le gain en énergie de flexion compense le coût en énergie de fracture. Sinon, la lamelle restera soulevée, mais le front n'avancera pas. Supposons que le front avance d'une quantité dx . Le prix à payer en énergie de fracture et simplement donné par $\Gamma b dx$, où b est la largeur de la lamelle.

Quel est le gain en énergie de flexion ? Quelle est la longueur de fracture d'équilibre ? Ce résultat est-il en accord avec les données expérimentales ?

Solution:

$$Eh^3b \frac{d^2}{L_{crack}^4} dx$$

alors que le prix en énergie de fracture vaut :

$$\Gamma b dx$$

Dans un régime stationnaire, les deux termes s'équilibrent ce qui conduit à :

$$L_{crack} \sim d^{1/2} \left(\frac{Eh^3}{\Gamma} \right)^{1/4}, \text{ soit } \Gamma \sim \frac{Eh^3 d^2}{L_{crack}^4}.$$

Ce résultat est ainsi en parfait accord avec les données expérimentales de la figure 1.

2 Faiençage

Les objets en céramique ont tendance à craqueler au cours du temps. Parfois c'est l'artiste lui-même qui choisit un mode de cuisson qui induit ces craquelures. Il en est de même pour les peintures ou les sols séchés (Fig. 2). Pour plus d'information sur ces craquelures, vous pourrez consulter le site web de Ludovic Pauchard :

www.fast.u-psud.fr/~pauchard/

Des motifs similaires sont très faciles à réaliser dans sa cuisine, il suffit pour cela de faire sécher une couche de suspension de maïzena concentrée dans une assiette. Une vision plus artistique par nos collègues de Amàco est disponible sur le site suivant :

<https://vimeo.com/144339325>

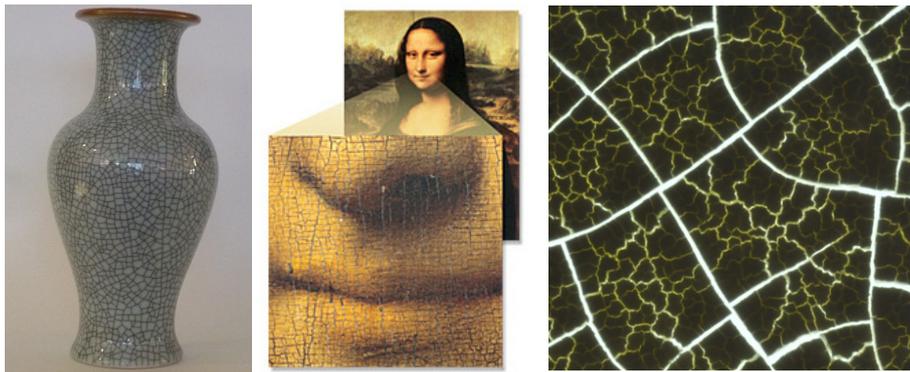


FIGURE 2 – Craquelures à la surface d'un vase en porcelaine, sur une peinture ancienne ou sur une couche de "boue" séchée (ici il s'agit de maïzena).

Pourquoi ces craquelures apparaissent-elles ? La dilatation thermique à la sortie du four ou la dessiccation induisent des contraintes résiduelles à la surface de la céramique, de la peinture ou de la boue. Ses contraintes sont généralement en tension et favorisent la propagation de fissures. Certains matériaux conduisent à l'effet opposé et le revêtement se dilate. On peut

alors observer des cloques de délaminage.

Nous nous limiterons ici au cas modèle des “channels cracks” qui affectent une couche sur toute son épaisseur. Nous supposons que l’adhésion du film sur le substrat est très forte. Afin de déterminer la condition de propagation de telles fissures, considérons une couche d’épaisseur h précontrainte bi-axialement avec une contrainte σ_0 adhérant parfaitement sur un substrat rigide (Fig. 3).

Si un crack de longueur L s’est propagé le long de la couche, sur quel volume typique la contrainte c’est-elle relâchée ? En déduire la variation d’énergie élastique lorsque la fissure avance d’une quantité dx .

Si G_c correspond à l’énergie de fracture à travers la couche, à quelle condition la fissure peut-elle continuer à avancer ? Expérimentalement on observe que le film est stable en dessous d’une épaisseur critique h_c (Fig. 3). Comment s’écrit cette épaisseur en loi d’échelle ?

À partir de quelle distance deux cracks interagissent-ils ? Quelle est la taille minimale des fragments ? Pourquoi s’interceptent-ils à 90° ?

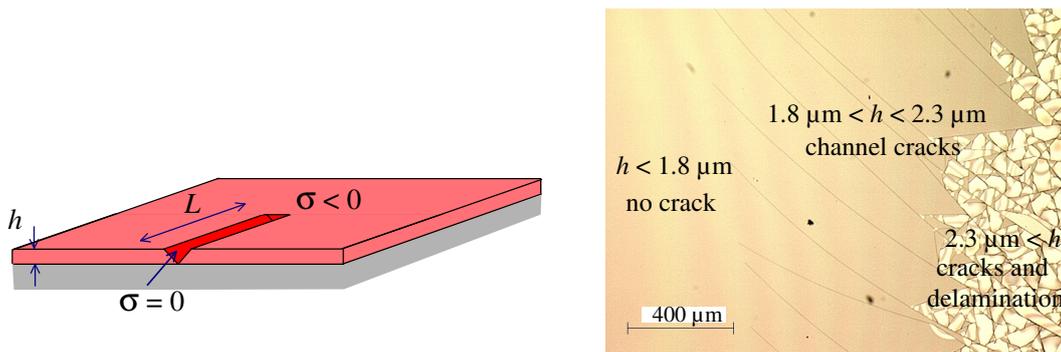


FIGURE 3 – a) Situation modèle d’un crack sur une couche précontrainte adhérant parfaitement à un substrat rigide. b) Expérience réalisée sur un substrat de silicium recouvert d’un film vitreux d’épaisseur non uniforme (cliché Joël Marthelot).

Solution: La couche adhérant sur le substrat rigide, elle ne peut relaxer latéralement que sur une largeur typique d’ordre h . Le volume mis en jeu est donc Lh^2 . L’énergie relaxée est donc proportionnelle à $dx h^2 \sigma_0^2 / E$.

Le prix à payer est tout simplement $G_c h dx$.

Le gain l’emporte donc sur le coût pour : $h \sigma_0^2 / E > G_c$. C’est à dire pour $h > h_c$ avec $h_c \sim G_c E / \sigma_0^2$.

Les cracks ne se voient que sur une distance d’ordre h qui fixe également l’échelle finale des fragments. L’interception à 90° est juste une signature de la nature tensorielle des contraintes. Un crack droit ne relaxe la contrainte que dans une direction. Autour d’un crack, la tension est donc plus forte dans la direction perpendiculaire.

3 Des fissures surprenantes

D'après le résultat sur le faïençage, nous nous attendons à ce qu'un film mince demeure stable en dessous de h_c . Les expériences de Joël Marthelot montrent cependant que ce n'est pas toujours vrai. Joël a en effet observé la propagation de fissures inattendues sur des films de silicate déposés sur des substrats en silicium dans le cas où l'énergie d'adhésion est modérée, typiquement 500 mJ/m^2 . La régularité des motifs géométriques obtenus est surprenante : spirales, allées oscillantes, bandelettes ou autres formes caractérisées par une largeur typique W (Fig. 4). Les mesures expérimentales montrent que W est proportionnelle à l'épaisseur de la couche ($W \simeq 30h$) indépendamment de tout autre paramètre physique (Fig. 5). Nous allons essayer de déterminer quels ingrédients physiques fixent cette largeur.

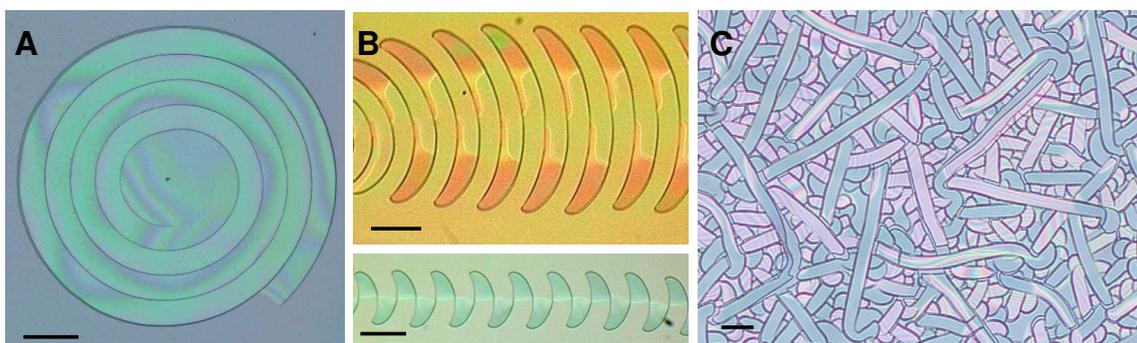


FIGURE 4 – Fissuration de films de silicate (épaisseur de quelques microns) déposés sur des wafers de silicium dans le cas d'une adhésion modérée (clichés Joël Marthelot). Barre d'échelle : $100 \mu\text{m}$. (a) Spirale d'Archimède, (b) Allées oscillantes, (c) Bandelettes (de nombreux défauts étaient initialement présents). Des vidéos de ces expériences sont disponibles sur : <https://www.youtube.com/watch?v=ChpGr-PhTSS>

3.1 Doublets de fissures droites

L'observation de la propagation des fissures nous indique un changement de couleur de la couche. *À quoi cela peut-il être dû ? Qualitativement, que gagnons-nous et qu'avons nous à payer lorsque le front de fissure se propage ?*

Solution: Le changement de couleur est simplement dû à des interférences lumineuses, ce qui indique que la couche se décolle. Du coup, nous devons payer l'énergie de fracture à travers la couche $G_c h$ et l'énergie d'adhésion ΓW . Par contre nous récupérons un peu d'énergie en $h^2 \sigma_0^2 / E$ le long des fissures, mais surtout un terme en $h W \sigma_0^2 / E$ sur toute la largeur de bande décollée. Si Γ n'est pas trop élevée, on gagne ainsi beaucoup à décoller la couche.

Déterminer le motif de fissure dans un cas général est particulièrement complexe. L'expérience montre en effet que la forme des défauts à partir desquels les fissures démarrent joue un rôle prépondérant sur la forme des motifs obtenus. Par chance, il est cependant possible d'obtenir

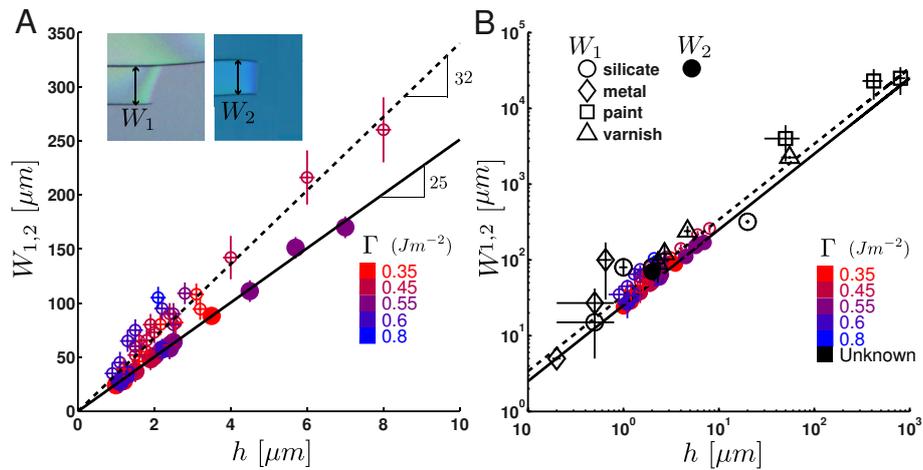


FIGURE 5 – Largeur caractéristique des motifs (le pas de la spirale, la longueur d’onde des allées, la largeur des bandelettes) en fonction de l’épaisseur de la couche pour des systèmes variés. La figure B reprend les données de la figure A en échelle log-log et des données obtenues avec d’autres systèmes ont été ajoutées (symboles en noir).

des paires de fissures qui avancent tout droit et simultanément, conduisant ainsi à une bande de largeur W (Fig. 6).

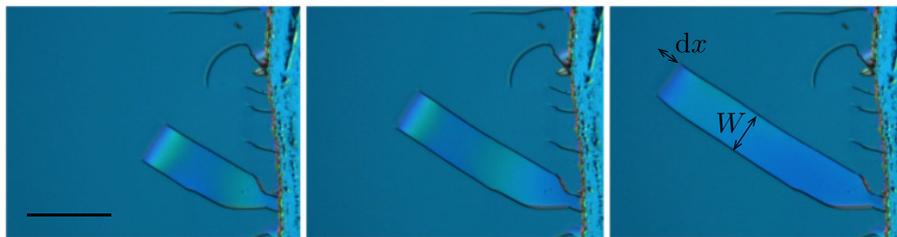


FIGURE 6 – Doublet de fissure amorcé le long d’une rayure de la couche (barre d’échelle 100 μm). Intervalle entre les clichés : 5s.

Réaliser un bilan de l’énergie élastique libérée lorsque le front avance de dx . Quel est le prix à payer si G_c désigne l’énergie de fracture à travers la couche (par unité de surface) et Γ l’énergie d’adhésion de la couche sur le substrat. Montrer qu’il existe une largeur critique W_{min} au-delà de laquelle la propagation est favorable. Est-ce que cela est compatible avec les résultats expérimentaux ? On pourra estimer un ordre de grandeur de la valeur de W_{min} pour des valeurs expérimentales typiques, $h = 2 \mu\text{m}$, $\sigma_0 = 55 \text{ MPa}$, $E = 4 \text{ GPa}$, $G_c = 1.5 \text{ J/m}^2$ et $\Gamma = 0.5 \text{ J/m}^2$.

Solution: Si on n’est pas très rigoureux sur les préfacteurs, l’énergie libérée est donnée par :

$$h^2 \sigma_0^2 / E dx + hW \sigma_0^2 / E dx$$

Le 1er terme est le même que pour les channels cracks, le second correspond à la relaxation des contraintes sur toute la surface.

Le coût est lui donné par :

$$2G_c h dx + \Gamma W dx$$

puisqu'il faut casser la couche à droite et à gauche et la décoller.

L'avancée du front donc est favorable si :

$$W > W_{min} \sim \frac{2G_c - h\sigma_0^2/E}{h\sigma_0^2/E - \Gamma} h$$

C'est intéressant, mais ça ne dit pas pourquoi on a une largeur d'équilibre uniquement dépendante de l'épaisseur.

AN : $3 \mu\text{m}$ c'est bien plus petit que ce qu'on observe expérimentalement.

3.2 Deux termes correctifs

Aller au-delà du résultat précédent n'est pas très intuitif. Il nous faut en effet estimer deux termes correctifs au bilan précédent et estimer leur variation relative en fonction de W . Nous avons supposé que toute l'énergie résiduelle était libérée sous la languette décollée. Cela n'est pas complètement vrai car les conditions aux limites au niveau du front empêchent la bandelette de se contracter latéralement (Fig. 7a).

Montrer que nous devons revoir notre gain d'énergie élastique à la baisse d'une quantité $-\alpha h W^2 \sigma_0^2/E$, où α est un préfacteur numérique.

La bandelette décollée est cependant libre de se soulever (Fig. 7b), ce qui permet de libérer un peu plus d'énergie qu'initialement prévu. Montrer que cet incrément d'énergie s'écrit sous la forme $\beta h^2 W \sigma_0^2/E$. Comment varient ces deux termes avec la largeur de la bande ? Montrer que leur comparaison peut conduire à une largeur d'équilibre.

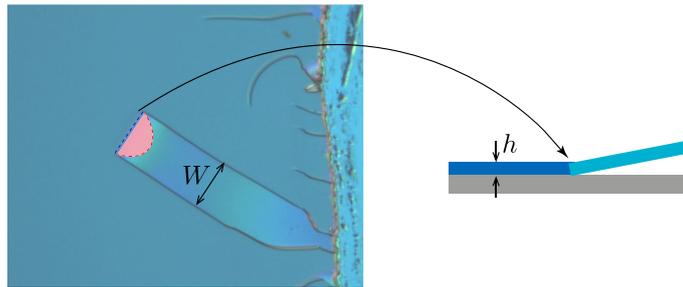


FIGURE 7 – Deux corrections à l'énergie élastique relaxée. (gauche) Les conditions aux limites empêchent la relaxation complète des contraintes résiduelles sur la partie rose. (droite) Le fait que la languette décollée peut se soulever permet de libérer un peu d'énergie.

3.3 Choix du chemin de fissure

Dans l'exemple de la figure 6, nous observons que les doublets de fissures commencent par diverger avant d'atteindre une valeur d'équilibre. Parfois c'est l'effet inverse qui se produit et des fissures éloignées tendent à converger. Afin de confirmer notre intuition précédente sur la largeur d'équilibre, considérons à présent une paire de fissures symétriques qui avancent sur une longueur ds selon un angle local θ par rapport à l'axe de symétrie (Fig. 8).

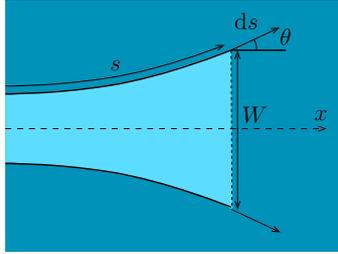


FIGURE 8 – Cas plus général où les fissures avancent symétriquement selon un angle θ .

Quel est le coût à payer pour faire avancer la paire de fissures sur ds ? Quel est le gain en énergie relaxée (en tenant compte des corrections précédentes) ? Tracer qualitativement les courbes coût et du gain en fonction de θ pour des valeurs croissantes de σ_0 en distinguant les deux cas $W < \frac{\beta}{2\alpha} h$ et $W > \frac{\beta}{2\alpha} h$. Toujours qualitativement, dans quelle situation les fissures vont-elles se propager ? Quel est l'angle d'ouverture sélectionné. En déduire que $W = \frac{\beta}{2\alpha} h$ correspond à une largeur d'équilibre. Un calcul par éléments finis indique une valeur numérique de $\beta/2\alpha$ de l'ordre de 20.

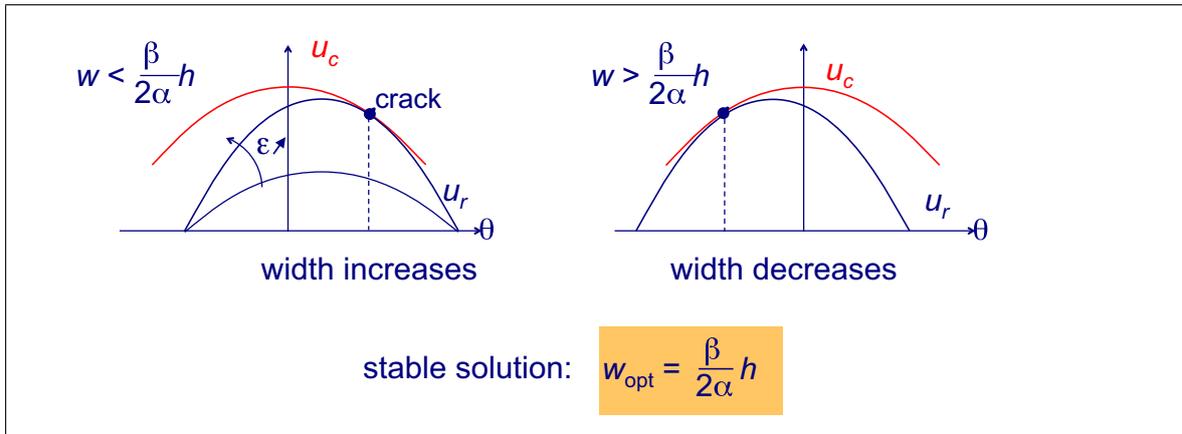
Solution: Pour le coût, c'est facile, on obtient :

$$(2G_ch + \Gamma W \cos \theta) ds$$

Un peu plus laborieux pour le gain :

$$\frac{\sigma_0^2}{E} h [h + W \cos \theta - 2(2\alpha W - \beta h) \sin \theta]$$

On peut alors tracer qualitativement les courbes coût et gain en fonction de θ . Tant que le gain est en dessous, les fissures n'avancent pas. En augmentant progressivement σ_0 , l'amplitude de la courbe gain (en bleu) augmente et finit par toucher la courbe coût (en rouge). À ce moment le crack se propage. Si $W < \frac{\beta}{2\alpha} h$, l'angle correspondant est positif : les fissures s'écartent. Au contraire, si $W > \frac{\beta}{2\alpha} h$, l'angle est négatif : les fissures se rapprochent. $W = \frac{\beta}{2\alpha} h$ correspond ainsi à une largeur d'équilibre.



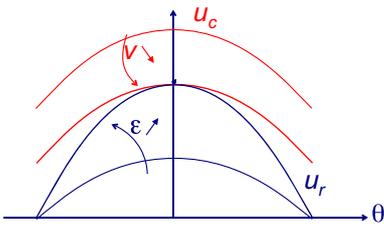
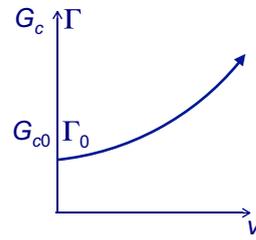
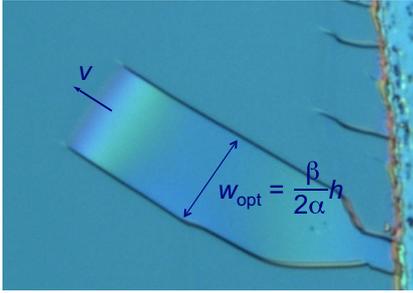
3.4 Concilier nos deux approches

Dans un premier temps, nous avons déterminé une largeur critique au-delà de laquelle les fissures peuvent se propager. Selon ce critère, la largeur a cependant tout intérêt à augmenter. Dans un second temps, nous avons déterminé une largeur d'équilibre indépendante de la physique du problème (mais qui suppose que le front peut avancer). Comment rendre ces deux approches compatibles ?

Il nous reste un degré de liberté : la vitesse de propagation du front. À cause de dissipations visco-élastiques ou de la diffusion d'espèces chimiques au sein de la zone de process, une énergie de fracture ou de décollement tend à augmenter avec la vitesse. Ainsi si σ_0 est fixé par la préparation de la couche, G_c et Γ augmentent avec la vitesse de propagation à partir de leur valeur G_{c0} et Γ_0 à vitesse nulle.

En déduire que l'égalité $W_{\min} = \frac{\beta}{2\alpha}h$ dicte la vitesse de propagation. À quelle condition les fissures vont-elles se propager ?

Solution: Tout est dans la figure suivante :



speed selection $\frac{2G_c(v) - h\sigma_0^2/E}{h\sigma_0^2/E - \Gamma(v)} = \frac{\beta}{2\alpha}$

propagation if $\frac{\sigma_0^2}{E} \gtrsim \frac{4\alpha}{\beta} G_c + \Gamma_0$