

Mécanique des Solides et des Matériaux 2

Préceptorat n°2

La rupture ductile des métaux

Comment se cassent les métaux ? Une affaire de cavités

Lorsque nous faisons un essai de traction sur un acier, celui-ci peut se déformer beaucoup avant de finalement rompre, contrairement à ce que nous observons pour un matériau fragile comme le verre qui casse (presque) sans déformation apparente. Ce mode de rupture associé à un fort niveau de déformation (plastique) est dit ductile. Le faciès de rupture - c'est-à-dire le lieu de la rupture finale - montre un réseau de cavités avec parfois des inclusions à l'intérieur (Fig. 1a). Plus en détails, nous pouvons voir au cours de l'essai que les inclusions initialement présentes dans le matériau sont à l'origine de cavités, qui grossissent pour finalement se rejoindre (Fig. 1b) et conduire à la rupture finale du matériau.

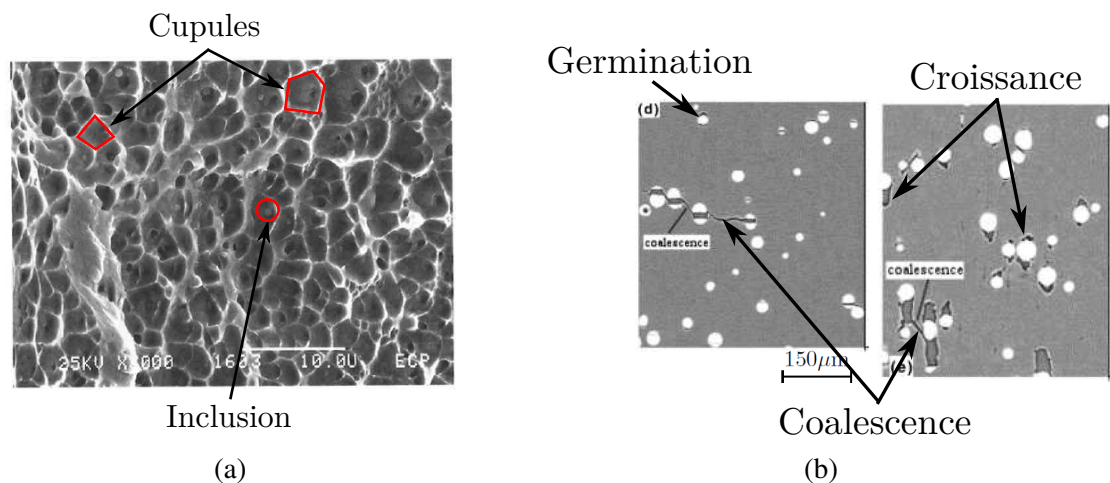


FIGURE 1 – (a) Faciès de rupture d'un acier où des particules/inclusions sont parfois visibles au centre des cupules (cavités). (b) Observations des différents mécanismes physiques à l'œuvre dans la rupture ductile : germination, croissance et coalescence de cavités (adapté de [1]).

Pour ces alliages métalliques, les mécanismes physiques à l'origine de la rupture ductile sont **la germination, la croissance et la coalescence de cavités**. Nous allons donc traiter ces trois phases dans ce tutorat, afin de comprendre les paramètres qui influent sur celles-ci, en tentant de répondre aux questions suivantes :

- Quel critère permet de prédire l'apparition de cavités à partir d'inclusions ?
- Comment croît une cavité dans un matériau qui se déforme plastiquement ?
- Quel critère permet de prédire la rupture finale par coalescence de cavités ?

Pour cela, la **démarche** adoptée pour répondre à ces questions est la suivante :

- **Approche en loi d'échelle** afin d'identifier les principaux paramètres ;
- **Calculs analytiques** dans des cas particuliers pour obtenir les préfacteurs numériques des lois d'échelles

Partie 1 : Germination de cavités

La plupart du temps, les alliages métalliques présentent initialement non pas des cavités mais des inclusions, c'est-à-dire des particules dans la matrice métallique. Lorsque nous appliquons une déformation, ces inclusions peuvent se rompre ou une décohésion peut apparaître, menant à la création d'une cavité (Fig. 1b gauche). Expérimentalement, nous observons l'existence d'une déformation critique ε_c pour laquelle ces inclusions fissurent (Fig. 3a). Que vaut donc ε_c ?

1. Décrire le critère énergétique nécessaire pour qu'il y ait rupture ou décohésion d'une inclusion de taille R de la matrice, pour un niveau de déformation isotrope ε appliquée à l'inclusion, et en fonction de l'énergie de fracture Γ_i de l'inclusion ou de l'interface. En déduire l'expression de la déformation critique. Suggestion : raisonner en loi d'échelle comme pour une fissure de Griffith de taille R .

En calculant cette déformation critique pour des valeurs typiques pour un acier (essayez avec $\Gamma_i \sim 1 \text{ J.m}^{-2}$, $E_i \sim 200 \text{ GPa}$ et $R = 10 \mu\text{m}$), nous nous apercevons que cela conduit à une déformation critique très faible, bien inférieure à ce qui est observé expérimentalement.

Le critère énergétique est donc toujours satisfait aux échelles des défauts en question, mais de fait il n'est pas suffisant pour prédire la germination. Il faut donc vérifier aussi un critère en contrainte qui s'écrit $\sigma_i = \sigma_i^c$, avec σ_i la contrainte dans l'inclusion, et σ_i^c la contrainte de rupture.

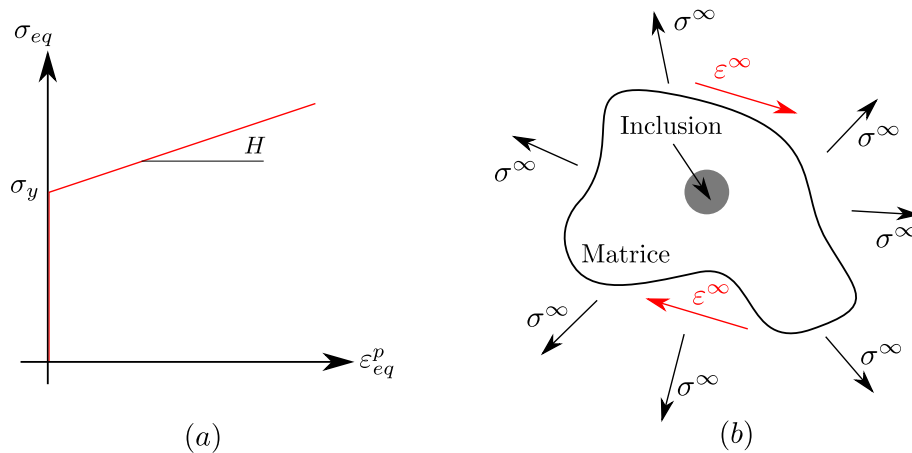


FIGURE 2 – (a) Loi de comportement d'un matériau rigide plastique à écrouissage linéaire (b) Inclusion dans une matrice plastique soumise à une contrainte (pression) hydrostatique σ^∞ et un cisaillement ε^∞ à l'infini.

2. En considérant une inclusion élastique dans une matrice de comportement plastique soumise à une déformation à l'infini caractéristique ε^∞ en cisaillement et une contrainte à l'infini (hydrostatique) caractéristique σ^∞ (Fig. 2b), déterminer approximativement la contrainte σ_i dans l'inclusion et en déduire la déformation critique ε_c^∞ . Suggestion : En loi d'échelle, la contrainte dans l'inclusion est la somme de la contrainte hydrostatique ($\sim \sigma^\infty$) qui se fait sans déformation de la matrice plastique et de la contrainte de cisaillement due à la déformation plastique de la matrice ($\sim \sigma = \sigma_y + H\varepsilon$ (Fig. 2a), en considérant un matériau rigide plastique à écrouissage linéaire). Nous considérerons le cas où $\sigma_y \ll \sigma^\infty$.

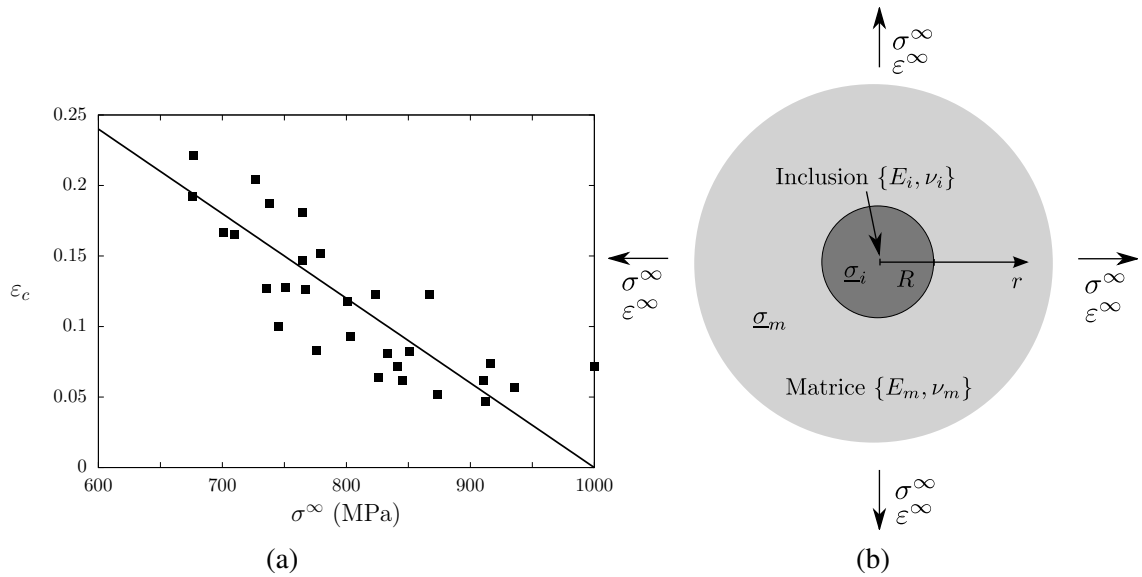


FIGURE 3 – (a) Déformation à rupture d’une inclusion ε_c (en fonction de la contrainte appliquée σ) (adapté de [2]). (b) Modélisation 2D d’une inclusion élastique cylindrique dans une matrice élastique infinie.

Cette relation permet d’expliquer les résultats de la figure 3a, où la déformation critique décroît avec la contrainte appliquée, ainsi que l’ordre de grandeur de ε_c . Afin de mieux appréhender l’hypothèse faite sur la relation entre déformation à l’extérieur et contrainte à l’intérieur, nous considérons un système purement élastique : une inclusion élastique 2D de rayon R dans une matrice (pour le moment) élastique (Fig. 3b), et nous appliquons une contrainte asymptotique isotrope σ^∞ à la matrice (avec une déformation asymptotique isotrope associée ε^∞). Nous cherchons la contrainte σ_i dans l’inclusion. Le déplacement est purement radial et noté $u(r)$ et les seuls composantes non nulles du tenseur des contraintes dans le plan sont $\sigma_{rr}(r)$ et $\sigma_{\theta\theta}(r)$. Nous reviendrons dans un second temps sur l’hypothèse de comportement élastique de la matrice

3. En se rappelant que la composante radiale de l’équation d’équilibre $\vec{\text{div}} \vec{\sigma} = 0$ s’écrit :

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0$$

montrer que le déplacement radial dans chaque phase peut se mettre sous la forme :

$$u(r) = \alpha_{i,m}r + \frac{\beta_{i,m}}{r}$$

où $\alpha_{i,m}$ et $\beta_{i,m}$ sont quatre constantes à déterminer. Suggestion : écrire la loi de Hooke dans chaque phase. On supposera également que la déformation hors-plan est nulle.

4. En explicitant les conditions aux limites ($\sigma_{rr}(+\infty) = \sigma^\infty$ et $\varepsilon_{rr}(+\infty) = \varepsilon^\infty$) et de continuité du déplacement et de la contrainte à l'interface entre la matrice et l'inclusion, montrer que la contrainte dans l'inclusion est homogène :

$$\sigma_i = \frac{2(\lambda_i + \mu_i)(\lambda_m + 2\mu_m)}{\lambda_i + \mu_i + \mu_m} \varepsilon^\infty$$

Suggestion : n'oubliez pas de considérer le fait que toutes les quantités doivent rester finies au centre de l'inclusion ($r = 0$) ! Que devient cette relation dans le cas particulier d'un milieu homogène ($\{\lambda_i, \mu_i\} = \{\lambda_m, \mu_m\}$) ?

Ce résultat correspond à un cas particulier de la **théorie d'Eshelby** [3]. Nous cherchons maintenant à appliquer ce résultat au cas d'une matrice (rigide) plastique à écrouissage linéaire (Fig. 2a). Pour cela nous considérons le fait que celle-ci peut être approximée à l'aide d'un **matériau élastique fictif** de module d'Young égal à la pente d'écrouissage $E_m = H \ll E_i$ et de coefficient de Poisson $\nu = 0.5$ (du fait de l'incompressibilité plastique).

5. Montrer dans un premier temps que, dans le cas d'une particule rigide par rapport à la matrice $\{\lambda_i, \mu_i\} \gg \{\lambda_m, \mu_m\}$, la formule précédente peut se mettre sous la forme :

$$\sigma_i = \sigma^\infty + 2\mu_m \varepsilon^\infty$$

6. Montrer qu'avec ces approximations la formule précédente devient :

$$\sigma_i = \sigma^\infty + \frac{2H}{3} \varepsilon^\infty$$

Suggestion : évaluer le module de cisaillement du matériau élastique fictif μ_m .

7. En considérant un critère de rupture correspondant à une contrainte critique dans l'inclusion $\sigma_i = \sigma_i^c$, évaluer la déformation critique ε_c^∞

Nous retrouvons bien un résultat similaire à celui obtenu en loi d'échelle, mais cette fois-ci avec le préfacteur numérique (avec un peu (beaucoup ...) d'efforts).

A l'issue de cette phase dite de germination, nous considérons qu'il y a une certaine fraction volumique de cavités dans le matériau. Que se passe-t-il maintenant lorsque nous continuons à déformer le matériau ?

Partie 2 : Croissance de cavités

Lorsqu'une cavité est présente dans un matériau plastique, celle-ci se déforme et son volume augmente sous déformation, comme le montre la Fig. 4. De manière quantitative, la taille typique de la cavité croît de manière exponentielle avec la déformation (plastique) macroscopique (définie à l'échelle cavité + matrice) (Fig. 5a).

1. Essayons dans un premier temps de comprendre ces résultats par un raisonnement en loi d'échelle. En considérant une cavité sphérique de rayon R dans une matrice plastique soumise à une déformation caractéristique ε , comment s'écrit la variation du volume de la cavité ? Suggestion : utiliser le fait que la variation de volume est liée à la déformation via la formule

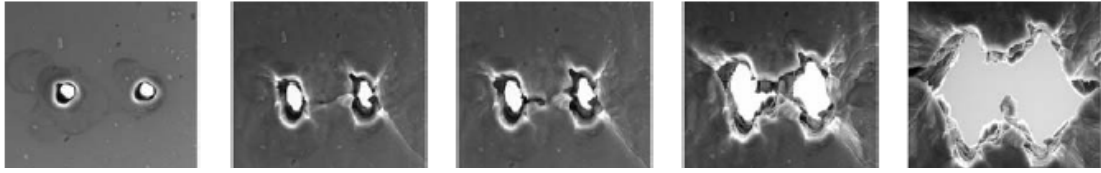


FIGURE 4 – Croissance et coalescence de cavités modèles micrométriques sous déformation plastique en traction uniaxiale (adapté de [5]).

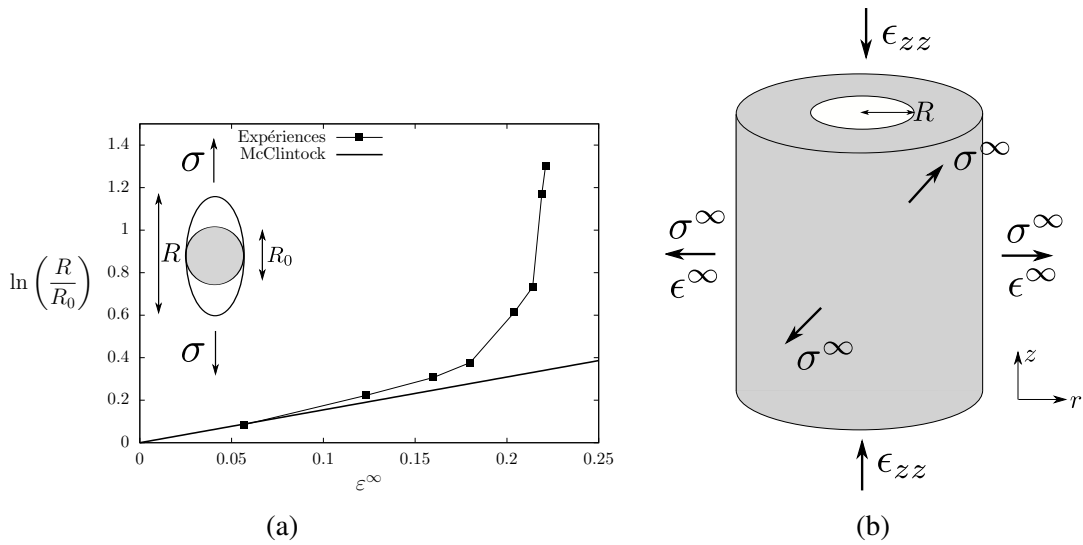


FIGURE 5 – (a) Evolution du rayon de la cavité en fonction de la déformation plastique pour les expériences présentées sur la figure 4 (adapté de [5]). (b) Modélisation 2D d'une cavité cylindrique dans une matrice plastique infinie.

$$\dot{V}/V = \text{Tr} \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}.$$

Ce résultat permet d'expliquer qualitativement les données expérimentales, mais nous pouvons nous demander de quoi peut bien dépendre le préfacteur. Nous considérons donc le cas particulier d'une cavité cylindrique dans une cellule cylindrique (Fig. 5b) sur laquelle une contrainte radiale σ^∞ est appliquée à l'infini. Le matériau est supposé rigide (pas d'élasticité) parfaitement plastique, obéissant au critère de von Mises (de limite élastique σ_y).

2. A partir de l'équation d'équilibre (la même que dans le problème précédent de l'inclusion), donner l'expression de la contrainte σ^∞ . Suggestion : Intégrer l'équation d'équilibre.
3. En explicitant la loi d'écoulement plastique, transformer l'intégrale précédente pour faire intervenir les taux de déformations et montrer que :

$$\sigma^\infty = \int_R^{+\infty} \frac{2\sigma_y}{3\varepsilon_{eq}^p} \frac{\dot{\varepsilon}_{\theta\theta} - \dot{\varepsilon}_{rr}}{r} dr$$

4. Expliciter les taux de déformations en fonction du déplacement radial $u(r)$. En utilisant l'incompressibilité plastique qui s'écrit $\text{Tr } \dot{\bar{\varepsilon}} = \dot{\varepsilon}_{rr} + \dot{\varepsilon}_{\theta\theta} + \dot{\varepsilon}_{zz} = 0$, donner l'expression du taux de déformation plastique équivalent $\dot{\varepsilon}_{eq}^p$. Suggestion : considérer la déformation axiale $\dot{\varepsilon}_{zz}$ homogène.
5. Nous y sommes presque ! Nous avons tous les éléments pour calculer σ^∞ , puis le ratio \dot{R}/R . Suggestion : Pour le calcul de l'intégrale, on pose $x = \alpha \frac{R^2}{r^2}$ avec $\alpha = \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\frac{\dot{R}}{R\varepsilon_{eq}^{p,\infty}} + \frac{1}{2} \right]$.

Ce résultat correspond à un cas particulier du **modèle de McClintock** (Fig. 5b) de croissance de cavités cylindriques [4]. Encore une fois, nous retrouvons bien un résultat similaire à ce qui a été obtenu en loi d'échelle mais avec le préfacteur numérique (au prix d'un peu (beaucoup ...) d'efforts)

6. Interpréter les résultats expérimentaux de la figure 5a.

Les cavités croissent donc sous déformation plastique, mais jusqu'à quand ? Jusqu'au moment où elles commencent à interagir avec leurs voisines : c'est la coalescence.

Partie 3 : Coalescence de cavités

Cette phase conduit à la rupture finale du matériau pour un certain niveau de déformation ε_R comme le montre la figure 6a. Expérimentalement, des essais sont réalisés avec différents types de chargement : traction uniaxiale, traction biaxiale, traction-torsion, et la déformation à rupture est mesurée. Ce niveau de déformation apparaît dépendre du niveau de triaxialité τ , c'est à dire du ratio entre la contrainte moyenne (partie hydrostatique) et la contrainte équivalente (partie en cisaillement, déviateur) :

$$\tau = \frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}} \quad \sigma_m = \frac{\text{Tr } \bar{\sigma}}{3} \quad \sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2}} |\bar{D}_\sigma|$$

Plus le niveau de triaxialité est grand, plus le niveau de déformation à rupture est faible (Fig. 6a). Nous cherchons dans cette partie à comprendre ces résultats à l'aide des calculs effectués précédemment. Nous considérons un matériau (2D) constitué de cavités avec une porosité initiale notée f (qui correspond au volume des cavités sur le volume total) (Fig. 6b).

1. Commençons par tenter de comprendre ce phénomène de coalescence en loi d'échelle. Nous avons vu précédemment que, pendant la phase de croissance $\ln(R/R_0) \sim \epsilon$, mais cette évolution doit bien s'arrêter un jour, lorsque $R \sim L$, en notant L la distance initiale inter-cavités (voir Fig. 6b), pour laquelle il n'y a plus que des trous ! Donner la déformation à rupture en fonction de la porosité initiale $f = (R_0/L)^2$.

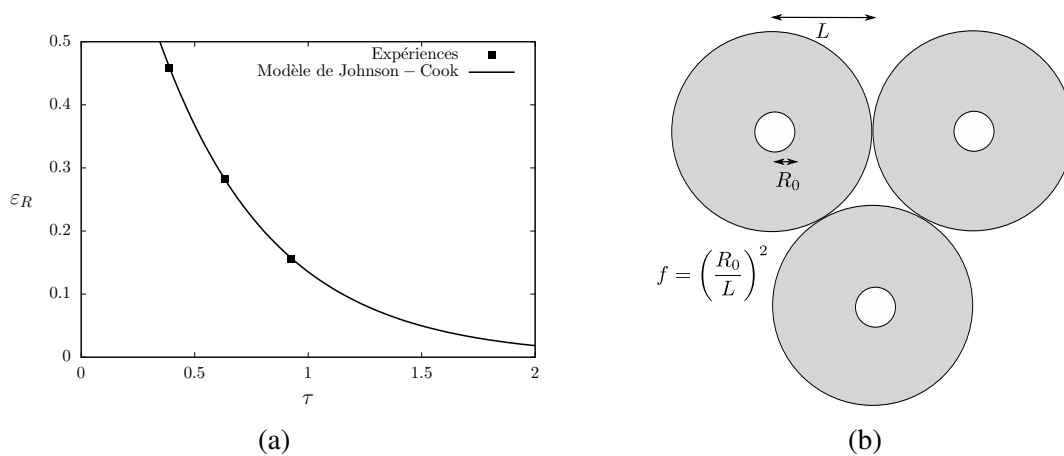


FIGURE 6 – (a) Evolution de la déformation macroscopique à rupture en fonction du niveau de triaxialité (adapté de [6]). (b) Réseau de cavités cylindriques de rayon initial R_0 et de distance intercavité initiale L

Cherchons encore une fois à déterminer le préfacteur de cette relation, mais avant cela essayons de comprendre à quoi correspond ce paramètre triaxialité dont nous avons parlé plus haut.

2. Donner la valeur de la triaxialité dans les cas suivants : traction uniaxiale ; cisaillement pur ; pression hydrostatique.
3. Réécrire l'équation de la croissance des cavités obtenues au paragraphe précédent en faisant intervenir la triaxialité τ . Suggestion : Considérer le fait que $\sigma_{eq} = \sigma_y$ et réutiliser la loi d'écoulement plastique pour faire intervenir la contrainte moyenne σ_m .

4. Montrer finalement que la déformation à rupture peut être approchée par la formule :

$$\varepsilon_R = D_1 \exp(-D_2 \tau)$$

Ce résultat correspond à un cas particulier du modèle phénoménologique de rupture de **Johnson-Cook** [7], très utilisé dans l'ingénierie.

Références

- [1] L. Babout, E. Maire, and R. Fougères. Damage initiation in model metallic materials : X-ray tomography and modelling. *Acta Mat.*, 52 : 2475–2487, 2004.
- [2] F.M. Beremin. Cavity formation from inclusions in ductile fracture of A508 steel. *Metallurgical transactions A*, 12A : 723–731, 1981.
- [3] J.D. Eshelby. The Determination of the Elastic Field of an Ellipsoidal Inclusion, and Related Problems. *Proc. Roy. Soc. A*, 241, 1957.
- [4] F. A. McClintock. A criterion for ductile fracture by the growth of holes. *J. App. Mech.*, 35 : 363–371, 1968.
- [5] A. Weck and D. Wilkinson. Experimental investigation of void coalescence in metallic sheets containing laser drilled holes. *Acta Mat.*, 56 : 1774–1784, 2008.
- [6] K. Nahshon and J.W. Hutchinson. Modification of the Gurson model for shear failure. *Eur. J. Mech. A/Solids*, 27 : 1–17, 2008.
- [7] G.R. Johnson and W.H. Cook. Fracture characteristics of three metals subjected to various strains, strain rates, temperatures and pressures. *Eng. Frac. Mech.*, 21 : 31–48, 1985.