Mécanique des Solides et des Matériaux 2

Préceptorat n°1

Fracture et adhésion

Résolution en loi d'échelle

Le but de ce tutorat est d'illustrer comment des arguments très simples en loi d'échelle permettent de "résoudre" des problèmes de mécanique des solides complexes. Cette approche ne vise pas à donner une réponse exacte car les préfacteurs sont oubliés et les termes du second ordre sont négligés. En recherche fondamentale, la comparaison des lois analytiques obtenues avec les expériences permet cependant de valider (ou non) les mécanismes physiques considérés. D'un point de vue ingénierie, elles permettent d'estimer très rapidement un ordre de grandeur et de sélectionner un concept réaliste.
Cette approche en lois d'échelles n'est cependant pas universelle et ne donne pas une réponse à tous les problèmes de mécanique ! Un développement calculatoire plus laborieux ou une simulation numérique doivent être alors rappelés en renfort.

Expérience à réaliser : Dans ce sujet on propose deux expériences très simples à réaliser pour tester vos résultats, en utilisant une languette flexible fournie (module d'Young $E \sim 1$GPa, épaisseur $h \sim 50\mu$m) .

1 Faïençage

Les objets en céramique ont tendance à craqueler au cours du temps. Parfois c'est l'artiste lui-même qui choisit un mode de cuisson qui induit ces craquelures. Il en est de même pour les peintures ou les sols séchés (Fig. 1). Pour plus d'information sur ces craquelures, vous pourrez consulter le site web de Ludovic Pauchard : www.fast.u-psud.fr/∼pauchard/recherche.php).
Des motifs similaires sont très faciles à réaliser dans sa cuisine, il suffit pour cela de faire sécher une couche de suspension de maïzena concentrée dans une assiette.

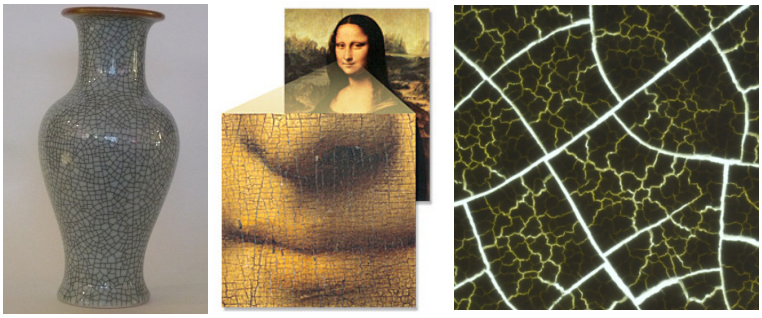

FIGURE 1 – Craquelures à la surface d'un vase en porcelaine, sur une peinture ancienne ou sur une couche de "boue" séchée (ici il s'agit de maïzena).

Pourquoi ces craquelures apparaissent-elles ? La dilatation thermique à la sortie du four ou la dessiccation induisent des contraintes résiduelles à la surface de la céramique, de la peinture ou de la boue. Ces contraintes sont souvent en tension et favorisent la propagation de fissures.

Dans le cas contraire de la compression, on peut observer des cloques de délaminage.

Nous nous limiterons au cas modèle des “channels cracks” qui fissurent une couche sur toute son épaisseur (voir figure 2a). Nous supposerons ici que l'adhésion du film sur le substrat est très forte. Afin de déterminer la condition de propagation de telles fissures, considérons une couche d'épaisseur h précontrainte bi-axialement avec une contrainte σ_0 et adhérant parfaitement sur un substrat rigide (Fig. 2).

1. Si une fissure de longueur L s'est propagée le long de la couche, sur quel volume typique la contrainte s'est-elle relâchée ? En déduire la variation d'énergie élastique lorsque la fissure avance d'une quantité $\mathrm{d}L_{crack}$, et donc le taux de restitution de l'énergie.
2. Si Γ_f correspond à l'énergie de fracture de la couche, à quelle condition la fissure peut-elle continuer à avancer ? Expérimentalement on observe que le film est stable en dessous d'une épaisseur critique h_c (Fig. 2b). Comment s'écrit cette épaisseur critique en loi d'échelle ?
3. À partir de quelle distance deux fissures interagissent-elles ? Pourquoi s'interceptent-elles à 90° ? Quelle est donc la taille minimale des fragments à la fin du processus de craquelure ?
4. La couche pourrait également se décoller du substrat. Si Γ_a désigne l'énergie d'adhésion de la couche, quelle est l'épaisseur nécessaire à son délaminage ?

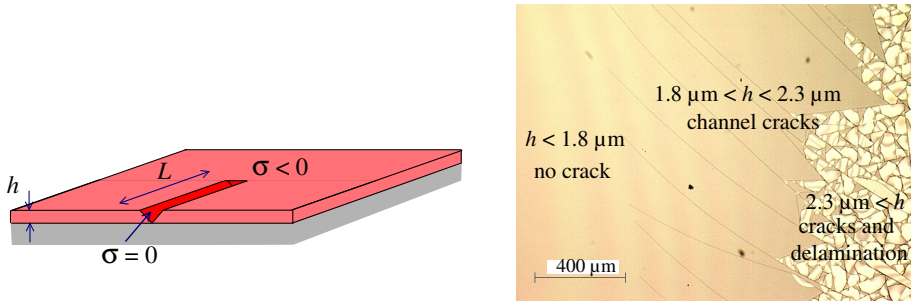

FIGURE 2 – a) Situation modèle d'une fissure traversante (“channel crack”) sur une couche précontrainte adhèrant parfaitement à un substrat rigide. b) Expérience réalisée sur un substrat de silicium recouvert d'un film vitreux d'épaisseur non uniforme : l'épaisseur du film augmente progressivement de gauche à droite (cliché Joël Marthelot).

2 L'expérience du rabot (clivage)

Nous intéressons ici aux tests de clivage basés sur les travaux d'Obreimoff (1930) et qui sont couramment pratiqués pour mesurer l'énergie de rupture d'adhésifs. Il s'agit de soulever une couche mince à l'aide d'une lame d'épaisseur d et de mesurer la longueur de la fissure devant la lame (Fig. 3). Un menuisier appellerait cette technique le “test du rabot”.
Le travail de l'opérateur va dans un premier temps entraîner la flexion de la couche clivée. Comment déterminer l'énergie de flexion correspondante ? Si vous avez un peu oublié ce que vous avez vu en 1ère année, pas de soucis, vous pouvez retrouver facilement le résultat en loi d'échelle.

1. Quel est l'ordre de grandeur de la déformation si on impose un rayon de courbure R à une poutre d'épaisseur h (Fig. 4) ?

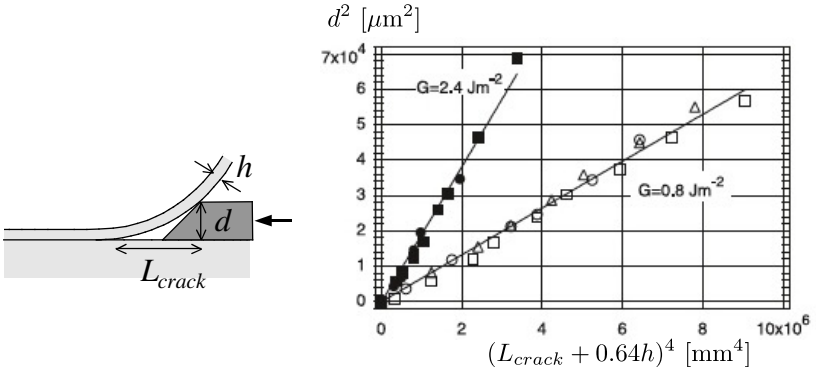

FIGURE 3 – Test de clivage : une lame vient décoller une couche d'épaisseur h. La mesure de la longueur de fissure L_{crack} permet de déterminer l'énergie de fracture du matériau. Mesures expérimentales sur des multicouches déposées sur du verre dans les laboratoires de Saint-Gobain (Barthel *et al.* 2005), la petite correction $0.64h$ provient d'un calcul plus précis dans le cas où h n'est plus négligeable devant L_{crack}.

2. En déduire que l'énergie de flexion correspondnate varie comme :

$$U_{el}^b \sim \frac{Eh^3}{R^2} bL$$

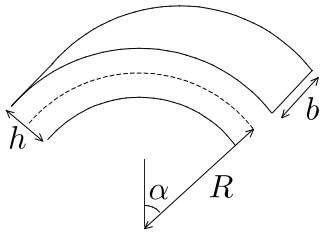

FIGURE 4 – Flexion d'une poutre.

Revenons au problème du clivage.

1. Quel est l'ordre de grandeur de la courbure de la lamelle soulevée par la lame du rabot pour une longueur décollée L_{crack} ? En déduire que l'énergie de flexion est donnée par :

$$U_{el}^b \sim Eh^3 b \frac{d^2}{L_{crack}^3}$$

2. En partant d'une position de la fissure L_{crack} donnée, gagne-t-on de l'énergie élastique si la fissure avance de dL_{crack} ? Si oui, quel est ce gain en loi d'échelle (en mécanique on parle de taux de restitution d'énergie) ? Combien coûte cette propagation en termes d'énergie de fracture ?
3. Quelle est la position d'équilibre L_{crack} du front de fracture ?
4. Que se passe-t-il si on avance la lame du rabot ?
5. Comparer votre résultat avec les données expérimentales de la figure 3. Comment peut-on mesurer l'énergie de décollement Γ dans ces expériences ?
6. Quelle est la composante de la force horizontale que la lame exerce sur la languette ? Dans quelle direction pointe-t-elle ?

3 Collages

D'une certaine manière, collage et adhésion peuvent être traités de la même manière que l'équilibre de fissure, puisque ce sont des phénomènes qui mettent en jeu une énergie de surface. Cette adhésion peut être capillaire. Réfléchir en termes de tension de surface et de ménisques peut ainsi offrir une autre perspective sur ces problèmes.

3.1 Ménisques

Reprenons le problème du rabot en supposant que la lamelle soulevée est maintenue par l'adhésion due à une couche d'un liquide parfaitement mouillant de tension de surface γ.
Un ménisque d'extension ℓ et de rayon r est alors présent en aval du point de contact entre le film et le substrat (Fig. 5). Le liquide contenu dans le ménisque est en dépression, ce qui tend à plaquer le film sur le substrat. Pour éviter que le film ne dérape, nous supposerons qu'il est maintenu par une buttée. En pratique, si la couche adhésive est suffisamment fine, la friction visqueuse limite fortement ce glissement.

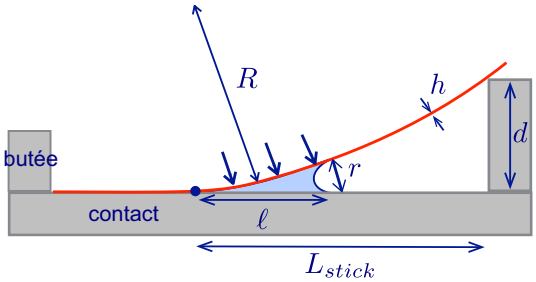

FIGURE 5 – Adhésion capillaire : un petit ménisque est présent en aval du point de contact entre le film et le substrat.

1. En supposant que si le ménisque se déplace vers la gauche (décollement), il laisse derrière lui un film liquide sur les deux solides, déterminer l'équivalent de l'énergie d'adhésion Γ dans ce problème.
2. Comment sont liés géométriquement, le rayon du ménisque, son extension et le rayon de courbure du film au point de contact ?
3. Quelle est la pression à l'intérieur du ménisque ? En déduire la force appliquée sur l'extension ℓ du ménisque.
4. Quel est l'ordre de grandeur du couple (calculé par rapport au point de contact) créé par cette force ? Ce couple dépend-il de la taille du ménisque ?
5. Relier ce couple à la rigidité en flexion et à la courbure du film. Quelle est la courbure engendrée par ce collage capillaire ? Retrouver la relation établie pour le problème du rabot.

3.2 Formes élasto-capillaires

1. Considérons une feuille adhésive (module d'Young E, épaisseur h) que l'on cherche à coller sur un cylindre de rayon R (Fig. 6). À quelle condition la feuille adhère-t-elle sur ce cylindre ? Est-ce que cela dépend de sa taille ?

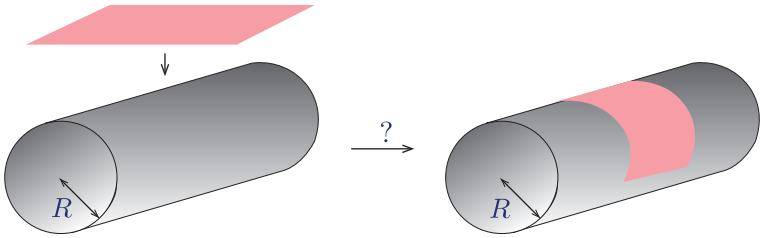

FIGURE 6 – Une feuille adhésive peut-elle enrober spontanément un cylindre ?

2. Une manière de retrouver cette taille caractéristique "élasto-adhésive" consiste à boucler une languette adhésive sur elle-même afin de réaliser une raquette (Fig. 7).

   Expérience à réaliser : collez les extrémités de la languette fournie avec une goutte d'eau savonneuse (qui mouille mieux le matériau que l'eau seule) pour reproduire la forme de raquette de la figure 7. Mesurer la taille d.

   Cela va peut-être vous surprendre, mais toutes ces raquettes ont la même forme, quel que soit le matériau et l'épaisseur de la languette et se déduisent les unes des autres par homothétie. Le problème est assez proche de celui du "rabot", cependant la largeur d de la raquette n'est pas fixée par une lame mais s'ajuste toute seule.

   Comment s'écrivent les énergies élastique et d'adhésion du système ? En déduire une estimation de sa largeur, en loi d'échelle.
   Expérimentalement cette taille vous paraît-elle compatible avec le rayon critique d'enrobage d'un cylindre ?

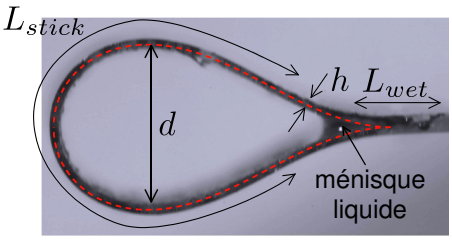

FIGURE 7 – Languette élastique collée sur elle-même (la courbe en pointillés provient de la résolution numérique de l'équation des tiges)

3. Et si au lieu de réaliser une raquette, vous essayiez de d'enrouler votre feuille sur elle-même (Fig. 8a) ? Que deviennent les énergies élastique et d'adhésion de la feuille ? Pouvez-vous estimer le rayon du rouleau ? On supposera que le liquide adhésif est assez épais pour limiter les effets de la friction (ce qui n'est pas le cas avec un adhésif traditionnel).
4. Une autre expérience intéressante consiste à déposer un looping à la surface de l'eau, comme sur la figure 8b.

   Expérience à réaliser : Déposer la languette sur une assiette remplie d'eau, comme sur la figure 8b. Il faudra peut-être couper la languette pour qu'elle ne touche pas les extrémités du récipient. Mesurer le rayon R du looping.

   La taille de ce looping est-elle fixée ? si oui, estimez-la, et confrontez votre prédiction à l'expérience.

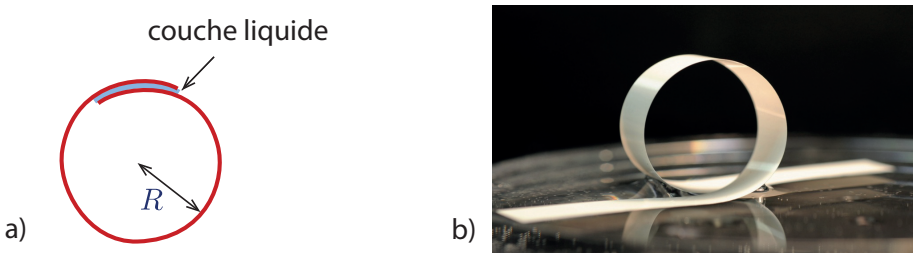

FIGURE 8 – a) Enroulement sur elle-même d'une feuille lubrifiée par un liquide adhésif. b) Looping élastique et rase-motte capillaire (barre d'échelle 5 cm).

3.3 Appliquer un pansement sur son nez

Déposons une feuille mince (typiquement un morceau de couverture de survie) sur une boule (un ballon pour enfant bien lisse par exemple) préalablement recouverte d'un liquide mouillant (de l'eau savonneuse fait parfaitement l'affaire). Si la feuille est suffisamment flexible, la zone de contact entre la feuille et la sphère adopte une étonnante forme oscillante et branchée (Fig. 9). Du fait de la friction, la forme exacte de cette zone d'adhésion dépend de la manière dont la feuille a été posée. Cependant la largeur et la morphologie générale des branches semblent robuste.

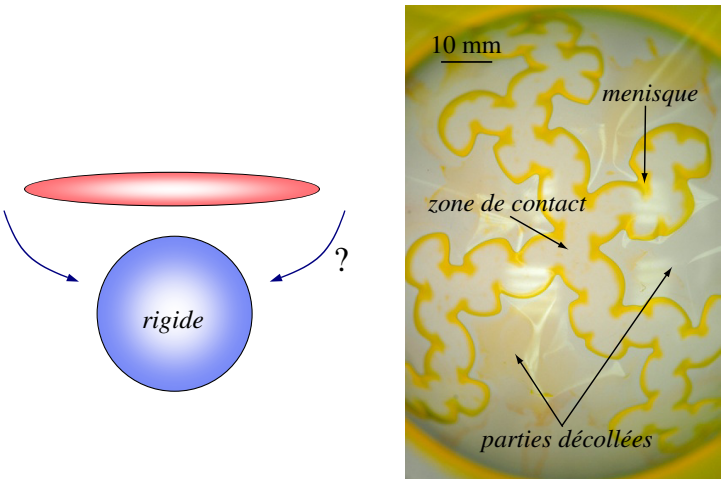

FIGURE 9 – Enrobage d'une sphère adhésive par une feuille. L'adhésion est assurée par un film de liquide mouillant coloré. Si la feuille est suffisamment flexible, elle tend à enrober la sphère mais la zone de contact suit des allées oscillantes qui se ramifient. Les bords colorés correspondent au ménisque qui sépare les parties collées des parties décollées.

Quels sont les ingrédients physiques en jeu ? De toute évidence, nous gagnons de l'énergie d'adhésion en collant la feuille sur la boule. Il faut également la courber, ce qui ne coûte pas trop cher si la feuille est très mince. Cependant la *courbure de Gauss* (produit des courbures principales) change au cours de l'opération (nulle pour une feuille plane et positive pour une sphère). Carl Gauss a montré qu'un tel changement de courbure n'était pas compatible avec une déformation isométrique (qui conserve les distances). En résumé, fléchir ne suffit pas, il faut également étirer ou comprimer localement la feuille. Le même problème se pose au

cartographe qui essaie de représenter le globe terrestre sur une mappemonde plate.

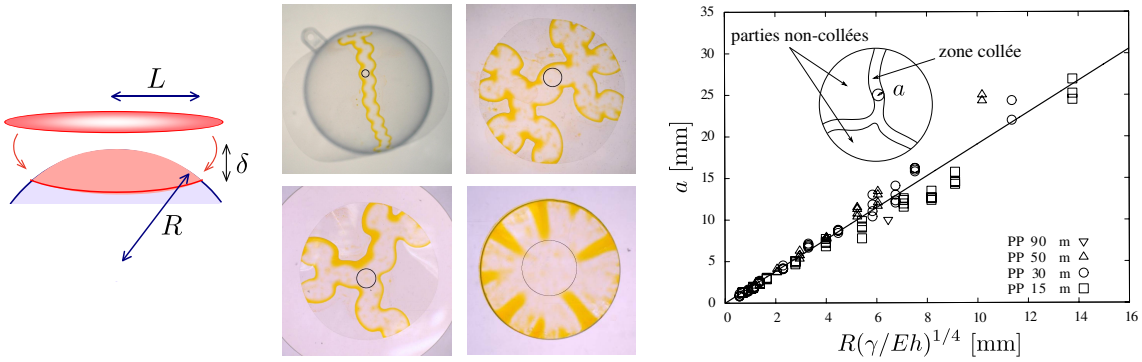

FIGURE 10 – Mise en contact d'un disque de taille L sur une sphère de rayon R. Si le rayon du disque est conservé, son périmètre doit être compirmé pour coller à la sphère. Mesures de la largeur des zones de collage sur des sphères de différents rayons et des feuilles plus ou moins flexibles (Hure *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **106**, 174301 (2011)). Maïka Saint-Jean a récemment montré qu'à un préfacteur près, cette taille est aussi égale à la taille du plus grand disque que l'on peut coller sur la sphère sans faire de plis.

1. Considérons un disque de rayon L posé sur une sphère de rayon R (on se place dans la limite $L \ll R$). Si le rayon du disque est conservé, son périmètre une fois collé est trop grand (Fig. 10). Estimer la compression relative qu'il faut appliquer au périmètre du disque $\epsilon_{\theta\theta}$ pour le coller sur la sphère. En déduire l'énergie de compression correspondante.
2. Equilibrer l'énergie d'adhésion avec cette énergie de compression. En déduire la taille du plus grand patch que l'on peut appliquer sur la sphère.

3. Le graphe expérimental de la Fig. 10 représente la largeur caractéristique de la zone de contact. Ces données sont-elles en accord avec notre loi d'échelle ?

3.4 Boule sur un solide mou

Posons une boule rigide et adhésive sur une surface molle (Fig. 11). Du point de vue de l'adhésion, la boule a intérêt à étendre son aire de contact avec le substrat. Ce gain en énergie d'adhésion va ainsi compenser le coût en énergie élastique engendré par la déformation.

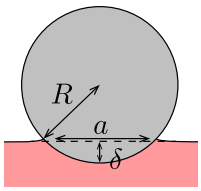

FIGURE 11 – Sphère adhésive rigide posée sur un substrat mou. La mesure du rayon de contact a permet d'estimer l'énergie d'adhésion (méthode JKR).

1. Supposons que la sphère s'enfonce sur une distance δ petite devant son rayon R. Quel est le rayon typique a de la zone de contact ?
   Quel est le volume de solide impliqué dans la déformation ? En déduire le taux de déformation caractéristique et l'énergie élastique correspondante.

2. Si γ est l'énergie d'adhésion par unité de surface, quel est le gain d'énergie résultant du collage de la boule sur le substrat ? Déterminer finalement l'extension de la zone de contact (nous négligerons l'effet de la gravité sur l'écrasement de la boule).
   La mesure de l'aire de contact est très couramment utilisée pour déterminer l'énergie d'adhésion d'un élastomère (méthode JKR, d'après ses inventeurs Johnson, Kendall et Roberts en 1971).

3. L'effet de la gravité est-il vraiment négligeable ? Afin de vérifier cette hypothèse, nous pouvons estimer l'enfoncement de la sphère sous son propre poids, sans adhésion. Quel est le gain en énergie potentielle généré par un enfoncement sur une distance δ ? En déduire cet enfoncement et l'extension de la zone de contact correspondante. À quelle condition la gravité est elle bien négligeable ?

4 Papier déchiré : le test du pantalon

Comment mesurer l'énergie de fracture d'une feuille mince ? Une méthode simple consiste à mettre en œuvre le test du pantalon. Il suffit pour cela de découper un échantillon rectangulaire dans la feuille à étudier et de le fendre partiellement le long de son axe médian afin de réaliser deux "jambes". La mesure consiste alors à mesurer pour quelle force et dans quelle direction une déchirure se propage (Fig 12).
Dans l'exemple présenté, nous notons α l'orientation de l'échantillon par rapport à la feuille (ce qui est important si le matériau est anisotrope) et $\theta - \alpha$ l'éventuelle déviation de la fissure par rapport à l'axe médian.

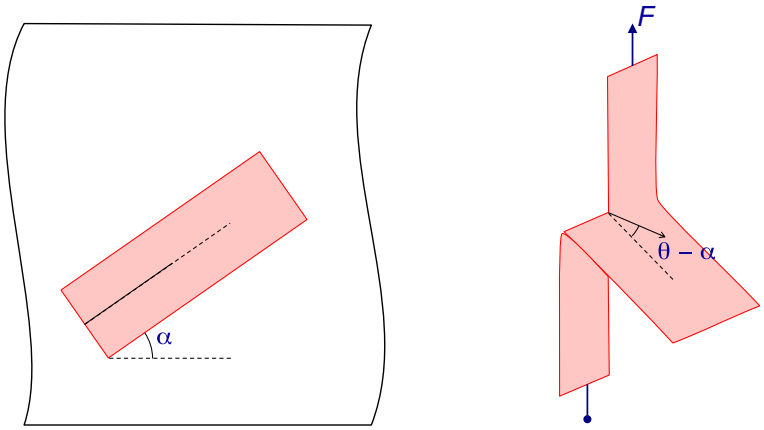

FIGURE 12 – Trouser test. Un échantillon rectangulaire est prélevé dans une feuille et coupé partiellement le long de son axe médian. Le test consiste à tirer sur les "jambes" et à mesurer pour quelle force et dans quelle direction la déchirure se propage.

1. On suppose que la fissure se propage dans la direction θ, c'est à dire qu'elle fait un angle $\theta - \alpha$ avec l'axe médian de l'échantillon (figure 12).

   De quelle quantité ds la déchirure se propage-t-elle si l'opérateur tire une jambe sur une distance dz ? Quel est le travail fourni à la fissure par l'opérateur lorsqu'il avance de dx ? En déduire le taux de restitution d'énergie correspondant.

2. Dans quelle direction le taux de restitution d'énergie est-il maximal ? En déduire la direction de propagation dans le cas où le matériau est isotrope.
   Comment peut-on mesurer l'énergie de fracture ?

3. Réaliser ce type de test avec des emballages alimentaires (paquets de gâteaux par exemple) en prélevant des échantillons selon différentes directions de l'emballage. La déchirure se propage-t-elle dans la direction attendue ? Nous avons réalisé des essais plus systématiques sur des feuilles de polypropylène fabriquées selon deux procédés différents (Fig. 13). Commenter.

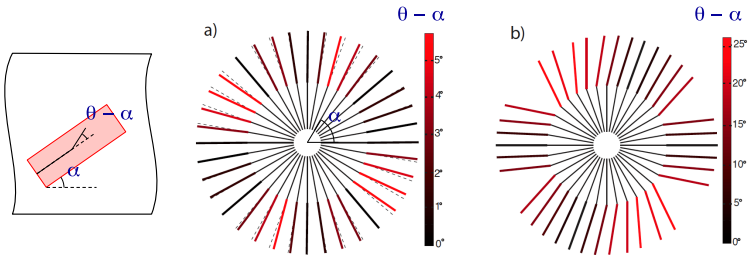

FIGURE 13 – Essais systématiques réalisés sur deux feuilles de polypropylène produites selon des techniques différentes (le premier matériau est "biorienté" après une étape de laminage, contrairement au second). Les traits noirs centraux représentent l'orientation de l'échantillon α et les traits extérieurs la direction de propagation de la déchirure (la déviation de la déchirure est d'autant plus importante que le trait et rouge).