

Mécanique des Solides et des Matériaux (MSM2)

Préceptorat N. 2

Impacts, rebonds, fragmentation de spaghettis et lâcher d'élastiques!

En mécanique on parle d'un choc lorsque le vecteur vitesse d'un corps présente une brusque variation de vitesse, qui entraîne donc une valeur infinie de l'accélération, sous forme de delta de Dirac. Lorsque un corps étendu déformable subit un impact, le choc ne peut être que local au point d'impact et il sera suivi par un régime transitoire accompagné de la propagation d'ondes mécaniques, pouvant conduire finalement à un état vibratoire. L'objet de ce tutorat est de se familiariser avec les ondes de choc dans des structures élancées (spaghetti), et d'appréhender leur interaction subtile avec la déformation (flambement) et la rupture (fragmentation).

1 Rebond élastique d'une barre

On considère une barre de longueur L et diamètre D constituée d'un matériau élastique de module E et densité ρ qui tombe en position verticale, atteignant une vitesse V_0 juste avant l'impact contre une paroi infiniment rigide et de masse également infinie.

On veut étudier la propagation d'ondes élastiques dans la barre pendant la durée du contact avec la paroi, ainsi que dans les instants qui suivent la perte de contact.



1.1 Ondes de choc sur une barre impactée

Pour simplifier l'analyse on se place dans le référentiel dans lequel la barre est immobile avant l'impact, et c'est donc la paroi qui s'approche à une vitesse V_0 . Pour convenance d'analyse on représentera le système en horizontal comme en figure 1 (on négligera d'ailleurs l'effet de la gravité pendant l'impact). On repère les points de la barre par x (avec $x = 0$ l'extrémité qui va être impactée et $x = L$ l'autre extrémité). On restera dans l'hypothèse de petites déformations élastiques (de sorte que le déplacement longitudinal $u(x, t)$ soit aussi très petit, et qu'on puisse négliger les changements de forme de la barre pendant l'impact).

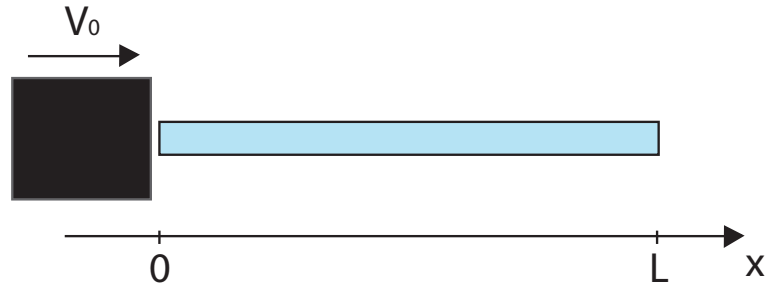


Figure 1: Dans le repère de la barre, le rebond est vu comme le choc d'une paroi (projectile très massif) qui s'approche à vitesse V_0 .

1. A partir de la loi générale de la dynamique et de la loi de Hooke, montrer que l'équation de propagation des ondes de compression/extension dans la barre est:

$$E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1)$$

où $u = u_x(x, t)$ est le déplacement longitudinal des sections de la barre.

2. Montrer que la forme:

$$u(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct) \quad \text{avec} \quad c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (2)$$

est une solution de l'équation des ondes (1), quelles que soient les deux fonctions $F(\xi)$ et $G(\xi)$. En fait, c'est même la solution générale de cette équation.

Vérifier qu'on peut calculer la propagation des ondes dans la barre pour $t > 0$ dès qu'on connaît $F(\xi)$ pour $\xi < L$ ainsi que $G(\xi)$ pour $\xi > 0$.

3. Montrer que les fonctions $F'(\xi) = dF/d\xi$ et $G'(\xi) = dG/d\xi$ permettent d'accéder aux déformations et à la vitesse locale $\partial u/\partial t$.
4. On considère comme condition initiale (avant le contact) une condition d'équilibre statique, donc sans déformation ni vitesse en aucun point de la barre.

Montrer qu'à partir de ces conditions initiales on peut déterminer $F(\xi)$ et $G(\xi)$ pour $0 \leq \xi \leq L$ (à une constante arbitraire près, qu'on choisira comme étant nulle).

5. On fait l'hypothèse qu'à $t = 0$ le contact s'établit instantanément, et que la paroi (étant infiniment massive et rigide) impose sa vitesse V_0 à l'extrémité de la barre en $x = 0$ pendant toute la durée t_c du contact. Écrire les conditions aux limites aux deux extrémités de la barre.

NB: dans l'approximation du formalisme linéaire des petites déformations on continuera à faire les calculs de propagation des ondes dans le même repère non déformé représenté en figure 1.

En déduire $F'(\xi)$ sur l'intervalle $-2L \leq \xi \leq L$, ainsi que $G'(\xi)$ sur l'intervalle $0 \leq \xi \leq 3L$. Suggestion: utiliser en plusieurs étapes les relations de symétrie appropriées qu'on aura déterminé pour $F'(\xi)$ et $G'(\xi)$ autour des points $\xi = 0$ et $\xi = L$.

6. En déduire l'évolution des contraintes, puis de la vitesse dans la barre au cours de l'impact. A quel moment le contact cesse-t-il? Que se passe-t-il ensuite ?
7. Tracer aussi l'évolution dans le temps du champs de déplacement $u(x, t)$ sur $x \in [0, L]$ dans chaque phase du contact.

1.2 Analyse du problème en loi d'échelle

On veut retrouver les résultats précédents en ordre de grandeur en s'appuyant sur des lois d'échelle. On part de l'assumption que les ondes mécaniques propagent à vitesse $c = \sqrt{E/\rho}$, et que le principe de causalité veut qu'une perturbation agissant à un point A ne puisse pas affecter l'état mécanique d'un point B , avant l'écoulement d'un temps $t_{AB} = \overline{AB}/c$.

1. Quel est le temps typique t_c de la phase de contact?
2. Quelle est la zone déformée au bout d'un temps $t < t_c$? Quelle est la déformation typique? Déterminer ainsi l'amplitude de l'onde de contrainte.

1.3 Retour sur le rebond vertical d'une barre

1. Transposer les résultats de la méthode exacte au problème initial du rebond vertical d'une barre élastique.
2. Comparer la solution dynamique avec une analyse quasistatique du rebond d'une barre élastique (i.e. en négligeant la propagation des ondes de choc).
3. Justifier pourquoi la vitesse de rebond est consistante avec une hypothèse de choc élastique contre un objet de masse infinie (paroi).

2 Fragmentation de spaghettis par impact

Qu'ils soient comprimés où pliés les spaghettis ne se cassent que rarement en deux seuls morceaux, mais plutôt dans une multitude de fragments. À partir de cette constatation contreintuitive, Gladden et al. (2005)¹ ont conçu une série d'expériences contrôlées où des spaghettis posés verticalement sur une table sont impactés par une masse lourde qui tombe verticalement en les comprimant axialement. L'historique du processus de fragmentation, qui dure moins que 1 milliseconde, est étudié à l'aide d'une caméra ultrarapide (jusqu'à 62000 images par seconde!) comme dans l'exemple en figure 2.

1. L'ordre de grandeur des contraintes lors de l'impact peut-il expliquer la rupture du spaghetti? Donner une explication physique au phénomène observé. En utilisant la vitesse du son dans le spaghetti, l'intervalle entre les images de la figure 2 est-il compatible avec le scénario que vous proposez ?
2. En raisonnant en statique, sur quelle longueur fléchir devient plus facile que comprimer une poutre, pour une contrainte compressive σ constante donnée?

¹J.R. Gladden, N.Z. Handzy, A. Belmonte and E. Villermaux, 2005. 'Dynamic Buckling and Fragmentation in Brittle Rods', *Phys. Rev. Lett.*, **94**, 035503.

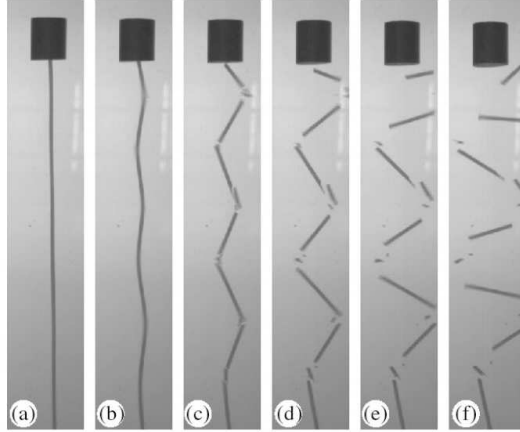


Figure 2: Un projectile en aluminium (masse 25 g) de vitesse $V_0 = 3.5$ m/s est lancé sur un spaghetti (diamètre $d = 1.9$ mm, longueur $L = 24$ cm, module de Young $E = 2.9$ GPa, masse volumique $\rho = 1.5$ g/cm³). L'intervalle entre les images est de 236 μ s.

3. En déduire qu'on ne s'attend effectivement à observer un flambage qu'au delà d'une vitesse seuil V_0^c de l'impacteur que l'on déterminera. Estimer cette valeur dans le cas de l'expérience ci dessus.
4. Pour $V > V_0^c$ on peut avoir du flambage sur plusieurs longueurs d'onde inférieures à la longueur L du spaghetti. On supposera que la longueur d'onde qui sera exprimée en première par l'instabilité de flambage est la plus petite des longueurs d'onde instables (obtenues à la question 2) pour la contrainte σ_c imposée par l'onde de compression. Est-ce compatible avec les images de la figure 2? Et avec les mesures de longueurs d'onde instables mesurées sur la figure 3 pour plusieurs matériaux?

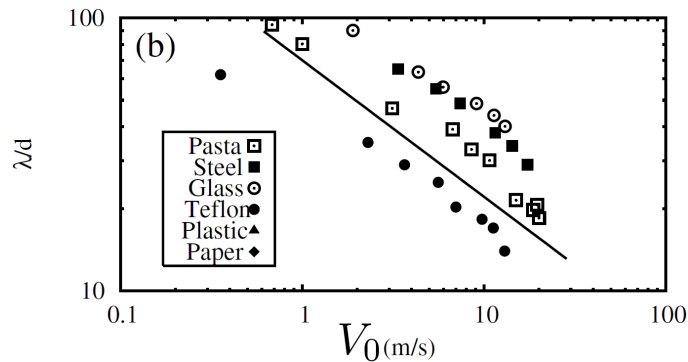


Figure 3: Longueur d'onde de flambage dynamique observée pour différents matériaux, adimensionnée par le diamètre d de la barre, en fonction de la vitesse d'impact V_0 , depuis Gladden et al. (2005). La droite représente une pente $-1/2$.

5. Compte tenu que pour le projectile d'aluminium on a $E = 70$ GPa, et $m = 25$ g, vérifier qu'on est dans les hypothèses du calcul effectué dans la partie 1 (masse infinie, rigidité infinie).
6. Qu'est ce qui détermine le nombre de (gros) fragments du spaghetti?

3 Lâcher d'un élastique tendu

Des oscillations de flambement dynamique sont observées dans un système apparemment très différent, i.e. après le relâchement d'un élastique étiré, comme illustré en figure 4 depuis Vermorel et al. (2006)².

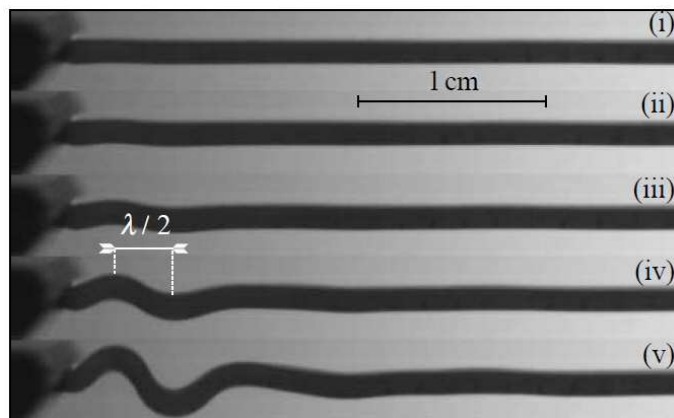


Figure 4: Imagerie rapide du relâchement d'un élastique étiré de $\varepsilon_0 = 0.3$. L'intervalle de temps entre les images est de $130 \mu\text{s}$.

Un élastique de longueur L est initialement étiré jusqu'à une déformation $\varepsilon_0 = 0.3$. A l'instant $t = 0$, une extrémité est brusquement relâchée, alors que l'autre reste fixée. On peut considérer un module élastique caoutchoutique $E = 1 \text{ MPa}$ et une densité $\rho \simeq 1000 \text{ kg/m}^3$. On traitera cette partie uniquement en ordre de grandeur et interprétation, comme la déformation n'est pas si petite.

1. Caractériser l'onde qui se propage dans l'élastique, pour des temps petits devant L/c . Caractériser les vitesses mises en jeu.
2. Que se passe-t-il à l'instant $t = L/c$? Que va-t-il se passer ensuite? Expliquer pourquoi l'élastique semble s'entortiller.

²R. Vermorel, N. Vandenberghe and E. Villermaux, 2006, 'Rubber band recoil', *Proc. R. Soc. A*, **463**, 641658