

Mécanique des solides

Préceptorat n° 1

Élasticité et Surfaces : crack !

Résolution en loi d'échelle

Le but de ce tutorat est d'illustrer comment des arguments très simples en loi d'échelle permettent de "résoudre" des problèmes d'élasticité complexes. Cette approche ne vise pas à donner une réponse exacte car les préfacteurs sont oubliés et les termes du second ordre sont négligés. En recherche fondamentale, la comparaison des lois analytiques obtenues avec les expériences permet de valider (ou non) les mécanismes physiques considérés. D'un point de vue ingénierie, elles permettent d'estimer très rapidement un ordre de grandeur et de sélectionner un concept réaliste.

L'approche en lois d'échelles n'est cependant pas universelle et ne donne pas une réponse à tous les problèmes de mécanique ! Un développement calculatoire plus laborieux ou une simulation numérique doivent être alors rappelés en renfort.

1 l'expérience du rabot (clivage)

Vous ne connaissez rien à la mécanique de la fracture ? Ne vous inquiétez pas, vous en saurez bientôt presque autant que l'auteur de ce tutorat. L'idée de base est que casser un matériau coûte une certaine énergie de fracture égale au produit de la surface créée par un coefficient Γ analogue à une tension de surface.

Prenons l'exemple des tests de clivage basés sur les travaux d'Obreimoff (1930) qui sont couramment pratiqués pour mesurer l'énergie de rupture d'un matériau. Il s'agit de soulever une couche mince à l'aide d'une lame d'épaisseur d et de mesurer la longueur de la fissure devant la lame (Fig. 1). Un menuisier appellerait cette technique le "test du rabot". Comment en déduire l'énergie de fracture Γ ?

Le travail de l'opérateur va dans un premier temps entraîner la flexion de la couche clivée. Comment déterminer l'énergie de flexion correspondante ? Si vous avez un peu oublié ce que vous avez vu en 1ère année, pas de soucis, vous pouvez retrouver facilement le résultat en loi d'échelle.

Partons d'une tige de longueur initiale L tirée uniaxialement (Fig. 2). L'incrément de longueur ΔL conduit au taux de déformation $\epsilon = \Delta L/L$. L'énergie d'extension mise en jeu est alors donnée par :

$$U_{el}^{ext} \sim EhLb\epsilon^2,$$

où h et b sont l'épaisseur et la largeur de la poutre et dans lequel on oublie le préfacteur $1/2$. Cette loi traduit simplement la loi de Hooke, $\sigma = E\epsilon$ intégrée sur le volume déformé Lbh . Comment en déduire l'énergie de flexion d'une poutre ? Si R est le rayon de courbure médian de la poutre (Fig. 2), cette dernière est étirée à l'extérieur de la courbure et comprimée vers

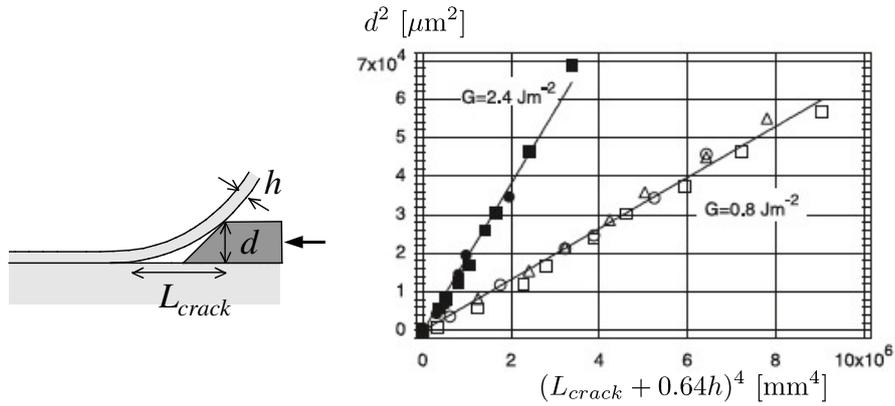


FIGURE 1 – Test de clivage : une lame vient décoller une couche d'épaisseur h . La mesure de la longueur de fissure L_{crack} permet de déterminer l'énergie de fracture du matériau. Mesures expérimentales sur des multicouches déposées sur du verre dans les laboratoires de Saint-Gobain (Barthel *et al.* 2005), la petite correction $0.64h$ provient d'un calcul plus précis dans le cas où h n'est plus négligeable devant L_{crack} . NB dans cet article on a noté G l'énergie de fracture (Γ ici).

l'intérieur. Le taux déformation typique est donné par : $\epsilon \sim [\alpha(R + h/2) - \alpha R]/\alpha R \sim h/R$, ce qui conduit à l'énergie de flexion :

$$U_{el}^b \sim \frac{Eh^3}{R^2} bL$$

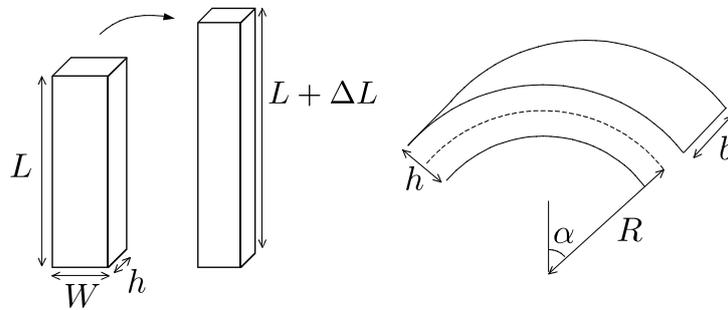


FIGURE 2 – Extension et flexion d'une poutre.

Revenons au problème du clivage. La courbure typique de la lamelle vaut $1/R \sim d/L_{crack}^2$ (ce qui correspond à la dérivée seconde du profil de flexion). L'énergie de flexion est ainsi donnée par

$$U_{el}^b \sim Eh^3b \frac{d^2}{L_{crack}^3}$$

1. En partant d'une position de la fissure L_{crack} donnée, déterminer si la fissure peut se propager de dL_{crack} (comparer la variation d'énergie élastique au coût de l'énergie de création de nouvelles de surface).
2. Quelle est la position d'équilibre L_{crack} du front de fracture.
3. Que se passe-t-il si on avance le rabot.

Comparer ce résultat avec les données expérimentales de la figure 1. Comment peut-on mesurer l'énergie de décollement Γ dans ces expériences.

2 Déchirures en pointe

Nous avons tous eu l'expérience frustrante d'essayer de décoller un morceau de scotch qui forme des lambeaux pointus. Pourquoi ces lambeaux sont-ils pointus ?

On cherche à calculer la direction de propagation des fissures (repérée par l'angle θ , voir figure 3) dans un film mince, lorsqu'on tire sur la languette parallèlement au plan du film.

Dans les premières parties, on considère d'abord le cas où le film est maintenu sur ses bords, *mais pas collé sur un substrat* On étudie au 2.4 le cas du scotch (où le film est collé fortement sur un substrat).

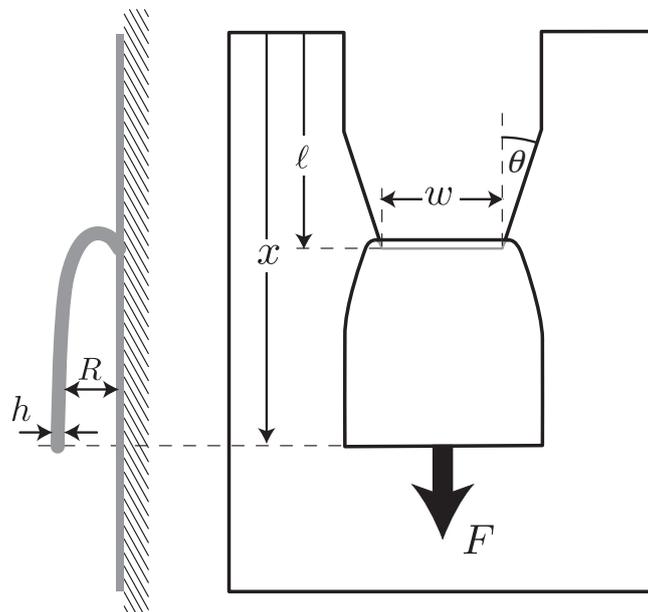


FIGURE 3 – schema

2.1 Energie d'un pli élastique

On commence par estimer l'énergie élastique de flexion d'un pli tel que sur la figure 3.

1. Montrer qu'elle peut s'écrire

$$U_{el} \sim Eh^3w/R$$

2. Et montrer d'autre part que la force appliquée est

$$F \sim Eh^3w/R^2$$

- En étudiant la figure 3 de gauche (et en approchant la zone courbée par un arc de cercle) montrer que

$$R \sim (2\ell - x)$$

2.2 Deux scénarios de propagation

Pour déterminer les conditions de propagation de fissure, on fait ici un raisonnement où l'opérateur maintient la position de sa main x fixée.

- Propagation parallèle.* Supposons que les deux fissures se propagent de $d\ell$, en maintenant la largeur w fixée, ce qui correspond à $\theta = 0^\circ$ sur la figure 3. Montrer que c'est possible si

$$2\Gamma_f h = -\frac{\partial U_{el}}{\partial \ell}|_{x,w} \sim Eh^3 w / R^2$$

où Γ_f est l'énergie de fracture du film. Estimer la force F_{\parallel} que l'on doit appliquer pour générer un tel pli.

- Propagation perpendiculaire.* Maintenant on suppose que les deux fissures se propagent l'une vers l'autre, à ℓ fixé, ce qui correspond à $\theta = 90^\circ$. Montrer que c'est possible si

$$2\Gamma_f h = \frac{\partial U_{el}}{\partial w}|_{x,\ell} \sim Eh^3 / R$$

et estimer la force F_{\perp} correspondant à ce pli

- En comparant les deux résultats, déterminer le nombre sans dimension qui caractérise la dangerosité relative de ces deux scénarios? Dans quel cas peut-on s'attendre à trouver propagation parallèle?

2.3 La forme des lambeaux

On veut maintenant calculer l'angle de propagation dans la configuration de la figure 3.

- Donner l'équation qui détermine la force $F(\theta)$ qui permettrait la propagation dans une direction θ donnée (décomposer le déplacement de la fissure selon les deux scénarios étudiés).
- On constate que la fissure se propage dans la direction θ qui correspond à une force minimale. Donner une justification de cette observation.
En déduire l'angle de propagation θ_p . Pour simplifier on fait l'hypothèse qu'il reste petit (et donc que F est presque donné par F_{\parallel}).
- Montrer que θ_p peut s'exprimer en fonction du nombre sans dimension que vous avez trouvé.
- Finalement quelle est la forme des lambeaux $w(\ell)$?
- Réaliser l'expérience avec les deux échantillons fournis : faire deux encoches avec des ciseaux. Tirer sur la languette parallèlement au plan du film, comme sur la figure 3, tout en maintenant les bords du film plastique. Pour l'échantillon d'épaisseur $90\mu\text{m}$ à partir d'une languette de taille $w = 2\text{cm}$ environ, pour le film plus mince ($30\mu\text{m}$) prendre une largeur $w=1\text{cm}$ environ. Vos observations sont-elles en accord avec ces résultats? Dans ce cas $E \sim 1\text{GPa}$, $\Gamma_f \sim 10\text{kJ/m}^2$

2.4 Décoller du scotch

On considère maintenant que le film que l'on déchire est collé sur un substrat. L'énergie d'adhésion est notée Γ_a .

1. En supposant que la relation $\theta_p \sim \sqrt{F_{II}/F_{\perp}}$ reste vraie, montrer que dans le cas où l'adhésion est forte, les lambeaux ont une forme de triangles. Est-ce bien le cas quand on déchire du scotch (par exemple du scotch marron de déménagement, qui est assez large) ? Comparer avec les mesures reprises sur la figure 4.

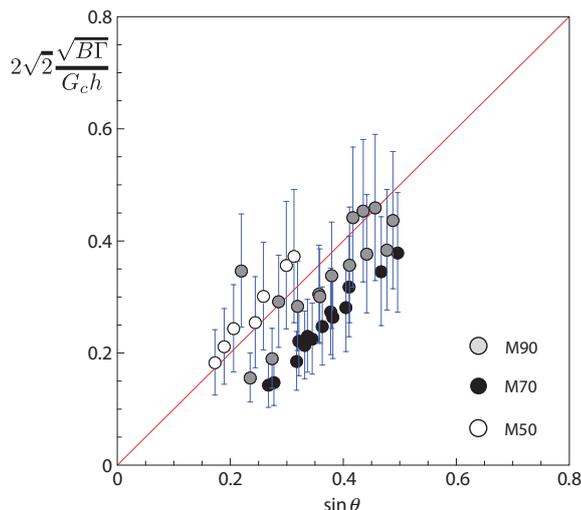


FIGURE 4 – Mesures expérimentales de l'angle θ pour différents films adhésifs, tirées de Hamm, Reis, Leblanc, Roman, Cerda (Nature Materials 2008)

2. Pour le scotch, l'énergie d'adhésion Γ_a augmente avec la vitesse de détachement (typiquement entre 10 et 300 J/m^2 , l'épaisseur typique du film est de $30\mu m$ avec des propriétés mécaniques similaires aux échantillons fournis). Comment varie alors la forme des lambeaux ? Comment faut-il tirer sur les lambeaux si on veut avoir la languette la plus longue possible ? Est-ce en accord avec vos expériences ?

3 Faièncage

Les objets en céramique ont tendance à craquelier au cours du temps. Parfois c'est l'artiste lui-même qui choisit un mode de cuisson qui induit ces craquelures. Il en est de même pour les peintures ou les sols séchés (Fig. 5). Pour plus d'information sur ces craquelures, vous pourrez consulter le site web de Ludovic Pauchard : www.fast.u-psud.fr/~pauchard/recherche.php). Des motifs similaires sont très faciles à réaliser dans sa cuisine, il suffit pour cela de faire sécher une couche de suspension de maïzena concentrée dans une assiette.

Pourquoi ces craquelures apparaissent-elles ? La dilatation thermique à la sortie du four ou la dessiccation induisent des contraintes résiduelles à la surface de la céramique, de la peinture ou de la boue. Ces contraintes sont souvent en tension et favorisent la propagation de fissures.

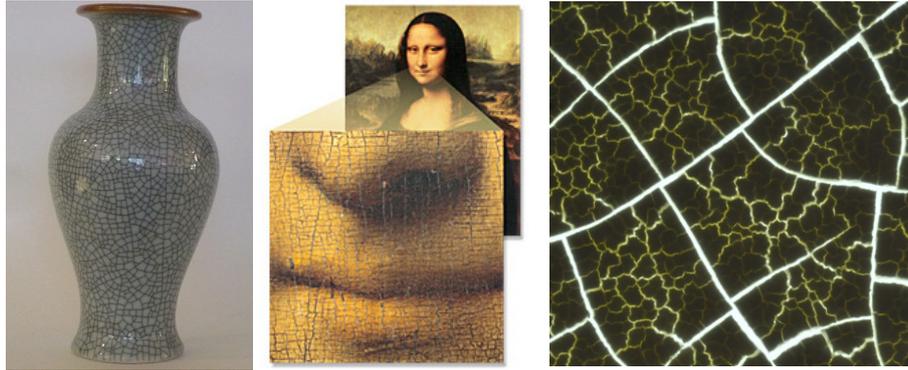


FIGURE 5 – Craquelures à la surface d’un vase en porcelaine, sur une peinture ancienne ou sur une couche de “boue” séchée (ici il s’agit de maïzena).

Dans le cas contraire de la compression on peut observer des cloques de délaminage.

Nous nous limiterons au cas modèle des “channels cracks” qui affectent une couche sur toute son épaisseur. Nous supposons ici que l’adhésion du film sur le substrat est très forte. Afin de déterminer la condition de propagation de telles fissures, considérons une couche d’épaisseur h précontrainte bi-axialement avec une contrainte σ_0 et adhérant parfaitement sur un substrat rigide (Fig. 6).

1. Si un crack de longueur L s’est propagé le long de la couche, sur quel volume typique la contrainte s’est-elle relâchée ? En déduire la variation d’énergie élastique lorsque la fissure avance d’une quantité dx .
2. Si Γ_f correspond à l’énergie de fracture à travers la couche, à quelle condition la fissure peut-elle continuer à avancer ? Expérimentalement on observe que le film est stable en dessous d’une épaisseur critique h_c (Fig. 6). Comment s’écrit cette épaisseur critique en loi d’échelle ?
3. À partir de quelle distance deux cracks interagissent-ils ? Quelle est la taille minimale des fragments ? Pourquoi s’interceptent-ils à 90° ?

Comment mesurer les contraintes résiduelles ?

Dans l’exemple précédent, le faïencage est produit par des contraintes résiduelles présentes sur dans le film. Une manière de mesurer les contraintes consiste à élaborer le film sur un substrat suffisamment mince pour fléchir sous l’effet de ces contraintes à la manière d’un système bilame (Fig. 7).

Considérons un film d’épaisseur h_f déposé sur un substrat h_s et de module E_s . On se placera dans l’hypothèse d’un film mince ($h_f \ll h_s$ et $E_f h_f \ll E_s h_s$). Supposons que le séchage, une différence de température ou encore une réaction chimique induise une contraction du film mince ϵ_0 entraînant ainsi l’apparition d’une contrainte résiduelle $\sigma_0 = E\epsilon_0$.

1. Quelle serait la courbure typique du substrat si toute la contrainte résiduelle était transformée en énergie de flexion du substrat ? Ce raisonnement tient-il la route ?

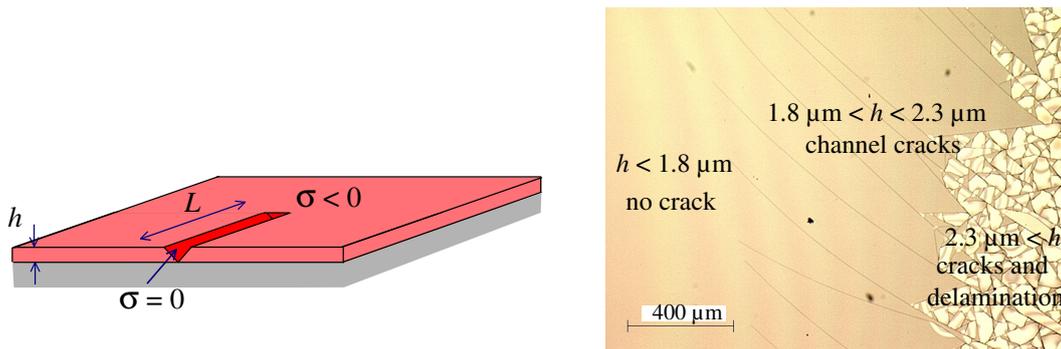


FIGURE 6 – a) Situation modèle d'un crack sur une couche précontrainte adhérant parfaitement à un substrat rigide. b) Expérience réalisée sur un substrat de silicium recouvert d'un film vitreux d'épaisseur non uniforme : l'épaisseur du film augmente progressivement de gauche à droite (cliché Joël Marthelot).

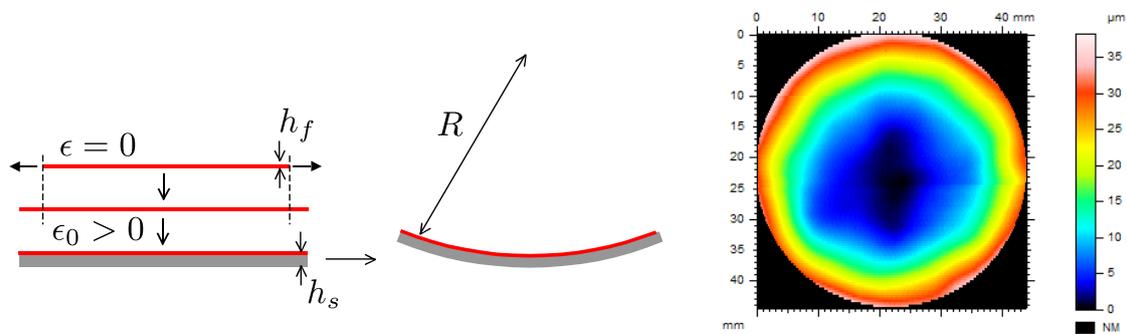


FIGURE 7 – Méthode de Stoney pour mesurer les contraintes résiduelles dans un film mince. Le film est élaboré sur un substrat suffisamment flexible pour se courber sous l'effet des contraintes induites par le film. Illustration avec un film de silicate déposé sur un mince wafer de silicium (ici un disque initialement plan). La déformation de la surface (vue par le dessus) est déterminée par profilométrie optique (cliché Joël Marthelot).

2. Bien que réduite, la déformation résiduelle est en réalité toujours présente. Comment l'énergie d'extension du film évolue-t-elle en fonction de la courbure du substrat ? Estimer la contrainte initiale σ_0 par une minimisation de l'énergie totale du système (toujours en loi d'échelle).
3. Estimer la contrainte résiduelle dans l'exemple illustré ($h_f = 1 \mu\text{m}$, $h_s = 100 \mu\text{m}$, $E_s = 170 \text{ GPa}$).