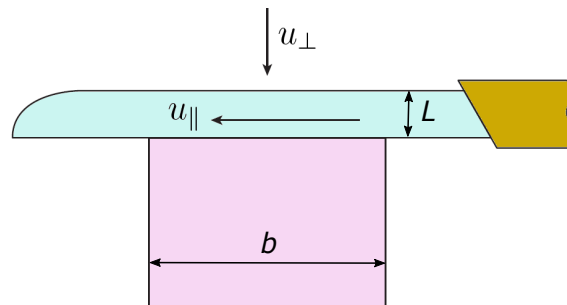


## Delicatessen

La coupe est un art que fromagers, charcutiers, bouchers ne peuvent pas prendre à la légère. Comment façonner des aliments mous en jolies tranches, cubes, triangles aux formes irréprochables et appétissantes? Pour chaque aliment, il faut souvent un outil très spécifique, mais la stratégie générale est de réduire au maximum les forces à appliquer à la pièce afin de minimiser les déformations globales pendant la coupe. Nous allons ici analyser certains mécanismes physiques associés à la coupe, jonglant entre rupture, frottement et plasticité.



Nous avons tous remarqué que, même avec un couteau très bien aiguisé, la coupe est bien plus aisée dès qu'on rajoute à la lame une composante de glissement tranchant parallèle à la ligne de coupe ('slice') en renfort du mouvement perpendiculaire ('push'). Par 'aisée' on entend que la force nécessaire quand on pousse simplement une lame dans une pièce est réduite quand la lame est glissée simultanément le long de la surface à couper. On fait une douloureuse expérience de cet effet quand on se coupe la langue en léchant le bord d'une enveloppe en papier.



On considère la coupe d'un matériau très mou par une lame très fine et aiguisée. Ceci permet à la fois de négliger les déformations élastiques causées par l'avancée de la lame et de minimiser le frottement sur la lame. On appelle respectivement  $u_{\parallel}$  et  $u_{\perp}$  les composantes du déplacement de la lame en direction parallèle et perpendiculaire au front de coupe, et on denote  $\xi = u_{\parallel}/u_{\perp}$  le rapport trancher-appuyer (*slice-push ratio*). On fait ici l'hypothèse que la force totale  $\vec{F}_{cut}$  appliquée pendant la coupe soit colinéaire au déplacement total  $\vec{u}$ , de telle façon que rapport entre les deux composantes  $F_{\parallel}$  et  $F_{\perp}$  est aussi égal à  $\xi$  (eh non, ce n'est pas banal à démontrer, mais cette hypothèse est appuyée sur une observation expérimentale).

La pièce à couper est un parallélépipède de largeur  $b$  constante (dans la direction du front de coupe). Les autres dimensions ne sont pas pertinentes parce que la coupe reste un phénomène très localisé. On appelle  $\Gamma$  l'énergie de rupture du matériau à couper.

1. **Coupe orthogonale** ( $\xi = 0$ ):

- (a) Écrire le travail effectué par unité de déplacement quand la lame avance en direction perpendiculaire au front de coupe.
- (b) Écrire le taux de restitution d'énergie associé à l'avancée de la lame. NB: dans les exercices 1, 2 et 3 on néglige le frottement et la plasticité, et on peut donc utiliser le critère de Griffith classique pour la propagation de la fissure.
- (c) Déterminer la force  $F_{cut}$  nécessaire à la coupe, en supposant qu'il n'y ait pas de dissipation d'énergie autre que la propagation de la fissure.

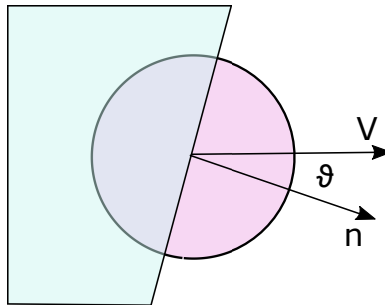
2. **Coupe tranchante** ( $\xi > 0$ ):

- (a) Écrire le travail effectué par unité de déplacement en direction perpendiculaire au front de coupe. NB: ce raisonnement nécessite d'avoir toujours une composante de déplacement verticale, sinon le problème est mal défini.
- (b) Écrire le taux de restitution de l'énergie.
- (c) Déterminer les deux composantes  $F_{\parallel}$  et  $F_{\perp}$  de la force nécessaire à la coupe, et montrer que la valeur de la force totale vaut:

$$F_{cut} = \frac{\Gamma b}{\sqrt{1 + \xi^2}}$$

- (d) Tracer qualitativement l'allure des trois forces estimées au point (c) en fonction de  $\xi$ .

3. **Guillotine à saucisson** (voir figure en debut d'énoncé):



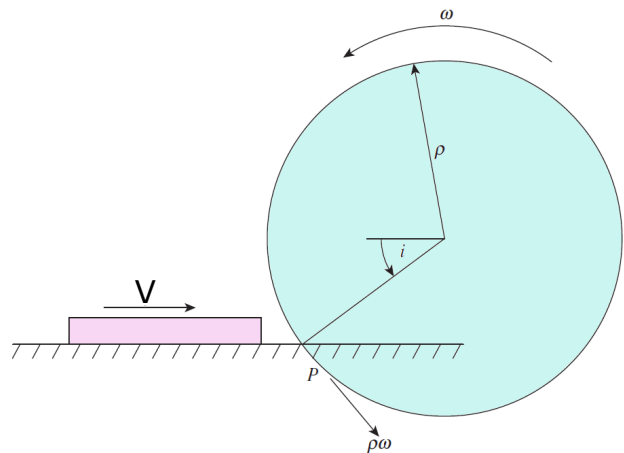
- (a) Exprimer le *slice-push ratio*  $\xi$  en fonction de l'angle  $\theta$  entre la normale à la lame et la direction de son mouvement.
- (b) Évaluer la réduction relative de force entre une lame verticale et une lame à  $45^\circ$ . Commenter le résultat.
- (c) Évaluer la force maximale expérimentée pendant la coupe d'un saucisson de section circulaire de rayon  $R = 2$  cm et ayant une énergie de fracture  $\Gamma = 100$  J/m<sup>2</sup>.
- (d) Tracer l'évolution de la force de coupe en fonction de la profondeur de pénétration de la lame dans le saucisson.

#### 4. Et si ça frotte?

L'expérience montre que le frottement sur la lame joue un rôle important dans la coupe. Pour des matériaux mous le frottement n'est pas décrit par une loi de Coulomb, mais il peut être mieux représenté par une contrainte constante  $\tau_f$  (une interprétation est proposée dans le point 6 pour les matériaux pâteux).

- En revenant à la coupe avec force perpendiculaire au front de coupe ( $\xi = 0$ ), exprimer la force de frottement  $F_f$  agissant sur une lame de largeur  $L$  pendant la coupe d'une plaque d'épaisseur  $b$  (voir schéma en première page).
- Évaluer l'énergie dissipée par frottement lors de l'avancement de la lame sur une distance  $du_{\perp}$ .
- Écrire un nouveau bilan d'énergie pour l'avancement de la lame incluant le frottement.
- Exprimer la force nécessaire à la coupe perpendiculaire avec frottement.
- Évaluer la contribution relative du frottement à la force de coupe du saucisson pour une lame de largeur  $L = 1$  cm et une contrainte de frottement  $\tau_f \simeq 100$  kPa.
- Généraliser ce bilan à la situation d'un mouvement composé de glissement et de poussée normale en fonction du rapport  $\xi$ .
- Discuter l'approximation de colinéarité entre  $\vec{F}_{cut}$  et  $\vec{u}$  sur la base de ce résultat.

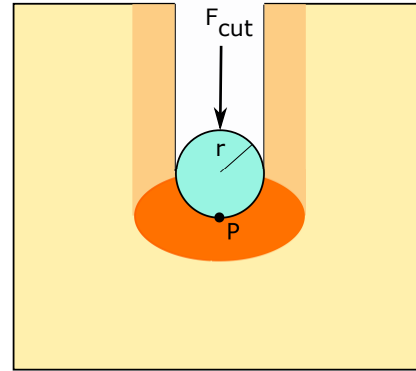
#### 5. La trancheuse à disque



- Sur la base des résultats précédents, expliquer qualitativement les avantages d'une trancheuse à disque par rapport à la coupe manuelle.
- On fait avancer avec une vitesse horizontale  $V$  une pièce de bacon de hauteur  $b$  très faible devant le rayon  $\rho$  de la lame circulaire qui tourne avec vitesse angulaire  $\omega$  comme en figure. Exprimer le rapport  $\xi$  en fonction de l'angle  $i$ .
- Exprimer la force horizontale qu'il faut appliquer au bacon pendant la coupe.
- Évaluer  $\xi$  et la force horizontale pour couper le bacon (mêmes propriétés que le saucisson) pour  $b=2$  cm,  $\rho=10$  cm,  $\omega=100$  rpm,  $V=5$  cm/s et angle d'attaque nul  $i=0^\circ$ .
- Montrer que si on augmente l'angle  $i$ , la force diminue jusqu'à un angle critique  $i_c$  au delà duquel la pièce avance toute seule entraînée par la machine. Cet effet est familier à tous ceux qui ont essayé une coupe à la scie circulaire. Évaluer l'angle  $i_c$  pour la situation décrite au point précédent.

## 6. La coupe au fil

Pour certaines matières pâteuses comme le fromage ou le foie gras, l'effet de frottement sur la lame peut devenir très fort et compromettre l'obtention d'une bonne finition de surface. Pour réduire l'aire de contact, et donc la force appliquée pendant la coupe, on utilise alors plutôt un fil tendu.



Afin de modéliser la force nécessaire à enfoncer un fil tendu de rayon  $r$  dans le fromage, on peut considérer la formation d'une fine couche d'écoulement plastique autour de la moitié inférieure du fil, qui appuie radialement sur le fil avec une contrainte de plastification  $\sigma_y$ . L'énergie dissipée dans la plastification de cette région, se rajoute à l'énergie nécessaire à propager la fissure au point  $P$ , ce qui comporte une augmentation de la force  $F_{cut}$  nécessaire à la coupe. On prendra pour le fromage un comportement élasto-plastique parfait avec  $E = 500 \text{ kPa}$ ,  $\sigma_y = 50 \text{ kPa}$  et une énergie de rupture  $\Gamma = 10 \text{ J/m}^2$ .

- A partir du schéma idéalisé en figure, estimer le champ de déplacement imposé par l'action du fil sur les lèvres de fissure. NB: en l'absence du fil les lèvres de fissure seraient refermées parce qu'il n'y a aucun chargement macroscopique sur le fromage.
- Justifier par des arguments en loi d'échelle que la taille de la zone fortement déformée autour du fil est d'ordre  $2r$ .
- Estimer la valeur typique des déformations induites par le passage du fil. Justifier qu'il s'agit majoritairement de déformations plastiques. On négligera dans la suite les déformations élastiques.
- Estimer la densité volumique d'énergie dissipée plastiquement dans la fine région balayée par la zone de plastification (orange en figure).
- Exprimer l'énergie dissipée plastiquement suite à l'avancement du fil en direction perpendiculaire au front de coupe.
- Exprimer l'énergie nécessaire à la propagation de la fissure. NB: on supposera que l'énergie de rupture  $\Gamma$  ne soit pas altérée par la présence de la zone plastifiée par le fil.
- Écrire le bilan d'énergie pour l'avancement du front de coupe. En déduire la force  $F_{cut}$  nécessaire à la coupe.
- Piste alternative: estimer la force exercée par la contrainte plastique  $\sigma_y$  sur la moitié inférieure du fil. Montrer que cette force peut aussi être interprétée comme l'effet d'une contrainte de frottement constante  $\tau_f = \sigma_y$  agissant sur les surfaces du fil.
- Évaluer la force  $F_{cut}$  pour couper une pièce de fromage de largeur  $8 \text{ cm}$  avec un fil de rayon  $r = 400 \text{ }\mu\text{m}$ .