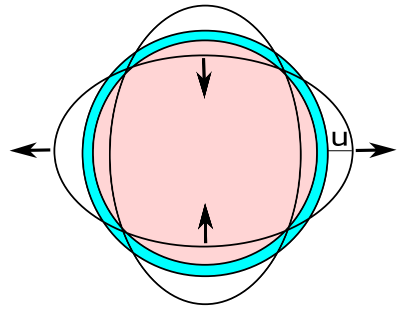
1. La harpe de verre

En remplissant des verres à calice avec de l'eau on peut accorder finement leur fréquence de résonance et produire ainsi un instrument musical dit 'la harpe de verre', qui est joué en frottant délicatement les surfaces de verre avec les doigts.



Lors de la vibration d'un verre rempli de fluide visqueux, le fluide contribue à la fois à l'inertie et à la dissipation visqueuse, qui ont l'effet respectivement de baisser la fréquence de résonance et de raccourcir la durée du son émis.

Pour simplifier la géométrie du modèle, on approche la forme du verre par un tube cylindrique de rayon $R = 3$ cm et hauteur $H = 5$ cm, rempli d'eau jusqu'à une hauteur H_w. Dans une section horizontale du verre la cinématique du mode fondamental du système verre/eau est celle représentée dans la figure de droite: le verre constitue une coque élastique très rigide ($E = 70$ GPa, $\rho = 2200$ kg/m^3) et fine ($h = 1$ mm $\ll R$) qui oscille entre la forme initiale circulaire et deux états en forme d'ellipse. On peut paramétrer ce mouvement par le déplacement $u \ll h$ de l'un des apex de l'ellipse, dans la direction perpendiculaire à la coque. Le contour du coeur liquide (qu'on considère comme un fluide Newtonien incompressible de viscosité $\eta = 1$ mPa s et densité $\rho = 1000$ kg/m^3) suit la même cinématique que la coque.

Pour résoudre ces problèmes avec des méthodes de mécanique de solides, on peut traiter l'eau comme un matériau viscoélastique de module complexe purement imaginaire $E^* = i\omega\eta$ (ω étant la fréquence de l'oscillation en rad/s). On peut ainsi d'abord résoudre le problème élastique correspondant, et considérer la nature viscoélastique en suite.

On commence donc par résoudre le problème de la vibration d'une coque élastique rigide contenant un coeur élastique mou incompressible. Les calculs seront conduits en loi d'échelle.

Rappel: pour une ellipse de demi-axes a et b, l'aire est donnée par $A = \pi ab$, le périmètre est bien approché par l'expression $p = \pi(a + b)$, le rayon de courbure aux apex est donné par $R_a = b^2/a$, $R_b = a^2/b$.

1. Justifier que la cinématique de déformation interne de la coque de verre est celle d'une poutre inextensible en flexion, et que celle du solide incompressible mou contenu dans le verre est celle d'un cisaillement.

2. Montrer que la déformation typique dans la coque vaut:

$$\varepsilon_v \sim \frac{hu}{R^2}$$

   Suggestion: comme l'état non déformé de la poutre possède déjà un rayon de courbure R, la déformation doit être associée aux variations de courbure locale $\Delta(1/R)$.

3. Exprimer la déformation typique ε_w dans le coeur élastique mou en fonction du déplacement u d'un apex d'ellipse. Montrer qu'elle est un ordre de grandeur plus grande que ε_v.

4. Évaluer l'énergie élastique maximale stockée dans la coque et dans le coeur.

5. Évaluer l'énergie cinétique maximale stockée dans la coque et dans le coeur en fonction de la fréquence ω de l'oscillation.

6. En imposant l'équivalence entre l'énergie élastique totale et l'énergie cinétique totale, déterminer la fréquence de vibration ω_0 de la structure composite.

7. Utiliser ce résultat pour exprimer la fréquence de résonance du verre vide et évaluer sa valeur approchée (en Hz).

8. Montrer que l'équation pour la fréquence de résonance du verre vide pouvait être dérivée à partir de la vitesse de propagation des ondes de flexion de longueur d'onde λ:

$$c_f = \sqrt{\frac{E}{\rho}}\frac{h}{\lambda}$$

9. On introduit maintenant la nature viscoélastique du solide en substituant le module élastique E_w du coeur par un module complexe $E^*_w = i\omega\eta$ dans l'équation obtenue pour le fréquence de résonance ω^*_0, qui devient complexe. Évaluer l'effet de l'eau sur la fréquence de résonance du verre et sur le temps d'atténuation de la vibration (liés respectivement à la partie réelle et au $\tan\delta$ de la fréquence complexe ω^*_0). Suggestion: il convient d'analyser d'abord l'effet de correction relative de l'eau sur le numérateur (terme élastique) et sur le dénominateur (terme inertiel) pour identifier les termes dominants dans chaque calcul. Montrer qu'entre le verre vide et le verre plein, on peut diminuer la fréquence d'un facteur 4.

10. En vue du résultat, discuter la faisabilité technique de la harpe de verre illustrée dans la figure initiale, et couvrant une gamme musicale d'intérêt.

    Rappel: la fréquence du LA central du piano est 440 Hz. Chaque octave correspond à une variation de fréquence d'un facteur 2. La gamme des voix humaines va de 80 Hz (Basse) à 1000 Hz (Soprano). Comparer aussi la prédiction sur le temps d'atténuation avec la constatation que la durée des sons émis par les verres de l'harpe est de quelques secondes (après qu'on ait arrêté la stimulation par le doigt).

11. En réalité le comportement du verre n'est pas totalement élastique. Son faible coefficient de frottement interne peut être représenté en rajoutent à son module élastique une partie imaginaire qui vaut environ 1/1000 de la partie réelle et qui varie peu sur la gamme de fréquences audibles. Estimer sa contribution dans l'atténuation de l'énergie de vibration du verre rempli d'eau. Quelle source de dissipation est dominante?

12. Comment expliquer l'observation que remplir le verre d'un liquide visqueux augmente la durée du son émis!

13. Est-ce que vous pouvez interpréter par quel mécanisme glisser un doigt sur la surface du calice puisse exciter sa vibration? Pouvez vous imaginer un autre instrument musical qui utilise le même mécanisme physique pour exciter l'émission de la note? Suggestion: eh, non, ce n'est pas la harpe! Notre instrument était mal nommé!