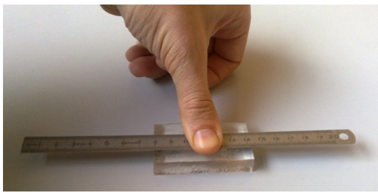
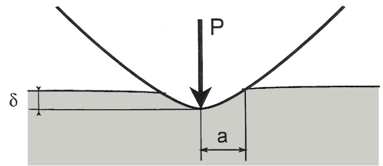
1. La marche sur les planches

Quand un sol est trop mou la marche devient difficile en conséquence de l'enfoncement des pieds dans le sol. Une stratégie classique pour faciliter la marche consiste à déposer des longues planches en bois pour se sustenter (figure à gauche). Néanmoins si les planches ne sont pas assez épaisses, elles fléchiront sous notre poids en s'enfonçant localement.

Pour mettre en évidence les ingrédients physiques fondamentaux du phénomène nous allons modéliser la situation analogue simple suivante. Les calculs seront menés en loi d'échelle.





Un reglet en acier inoxydable (module élastique E_r, longueur L, largeur b, épaisseur h) est posé à plat sur une base cubique de caoutchouc (module élastique E_b, côté du cube $H \gg b$). On applique une force P au milieu de la règle (figure au centre). La règle se plie légèrement et s'enfonce dans le caoutchouc sur une profondeur, formant avec le caoutchouc un contact de longueur $2a$ (figure à droite).

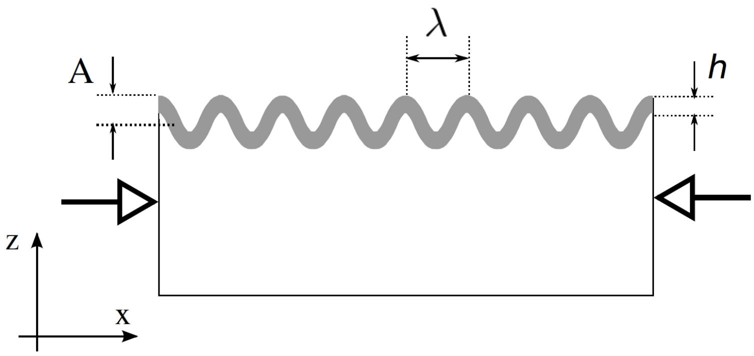
1. On approche la forme de la portion du reglet en contact avec un arc de cercle de rayon R. Déterminer la relation géométrique entre les grandeurs a, δ et R.
2. Exprimer l'énergie élastique correspondante à la déformation de la règle. On supposera que la règle est étroite par rapport à la dimension du contact ($b \ll 2a$).
3. Exprimer l'énergie élastique correspondante à la déformation de la base. On supposera que, dans la limite $b \ll a$ considérée, la déformation s'étend latéralement sur une region d'extension a (Principe de Saint Venant).
4. Exprimer le travail fourni par la force pressante P.
5. En minimisant l'énergie potentielle du système (constituée de la différence entre l'énergie élastique totale et le travail fourni) par rapport aux inconnues a et $k = 1/R$ (courbure) déterminer ces grandeurs ainsi que l'enfoncement δ.
6. Estimer la valeur numérique de a et vérifier l'hypothèse faite sur son ordre de grandeur. On donne $E_r = 200$ GPa, $L = 20$ cm, $h = 0.5$ mm, $b = 1$ cm, $E_b = 1$ MPa, $H = 30$ cm.
7. Déduire la raideur du contact.
8. Expliquer en quoi le résultat obtenu peut paraître surprenant, notamment par rapport à la théorie du contact de Hertz (contact élastique sphère/plan).
9. Discuter le cadre d'application de cette modélisation simplifiée au problème initial de la marche sur les planches.

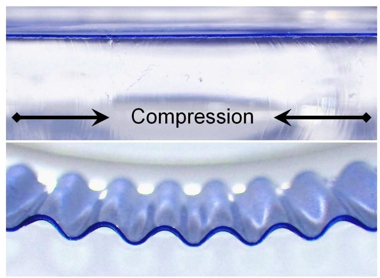
2 Des rides sur la peau

Une couche fine (film) d'épaisseur h et de module élastique E_f adhère parfaitement sur un bloc élastique d'épaisseur H, longueur L, largeur b ($H, L, b \gg h$) et de module élastique $E_b \ll E_f$. L'ensemble est comprimé dans le plan du film suivant sa longueur (direction x). Au-delà d'une certaine contraction, on observe un flambage du système : la surface se ride. Les plissements observés sont perpendiculaires à la direction x. On notera ε_m la déformation (moyenne) de compression suivant l'axe x, b la largeur du bloc suivant y et on négligera la déformation dans la direction perpendiculaire au plan de la figure (effet de Poisson). On suppose que le profil de la surface peut être décrit par la fonction :

$$z(x) = A \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

où λ est la longueur d'onde des rides et A leur amplitude. On effectuera les calculs en ordre de grandeur.





1) Le film est en flexion. Évaluer un rayon de courbure typique. Montrer que l'énergie élastique de courbure du film stockée par longueur d'onde suivant x s'écrit $E_f h^3 b A^2/\lambda^3$.

2) En supposant que les déplacements dans le substrat soient principalement orientés perpendiculairement au plan de la surface et qu'ils s'annulent au delà une profondeur de l'ordre de λ (argumenter ce choix), donner l'énergie élastique emmagasinée dans le substrat par longueur d'onde. Estimer ensuite l'énergie élastique associée à la compression moyenne ε_m.

3) En situation de flambage, le film n'est plus comprimé. Montrer que la conservation de l'aire du film, imposée par cette propriété, permet de trouver une relation entre l'amplitude des rides, leur longueur d'onde et la compression moyenne imposée : $A^2/\lambda^2 \sim \varepsilon_m$.

4) En reportant la relation précédente dans l'énergie élastique totale, montrer que l'on peut déduire :

$$\lambda \sim h \left(\frac{E_f}{E_b}\right)^{1/3}$$

Discuter le résultat obtenu.

5) Discuter de l'applicabilité du modèle précédant à la formation des empreintes digitales sur nos doigts, ainsi que des rides sur la peau vieillissante.