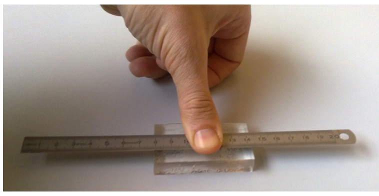
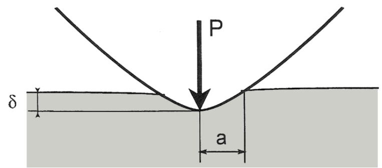
1 La marche sur les planches

Quand un sol est trop mou, la marche devient difficile à cause de l'enfoncement des pieds dans le sol. Une stratégie classique pour faciliter la marche consiste à déposer de longues planches en bois pour se sustenter (figure à gauche). Néanmoins si les planches ne sont pas assez épaisses, elles fléchiront sous le poids du marcheur en s'enfonçant localement. Pour mettre en évidence les ingrédients physiques fondamentaux du phénomène, nous allons considérer un système simplifié (figure au centre), et le modéliser par un modèle d'élasticité 2D (figure de droite). Les calculs seront menés en loi d'échelle.





Une règle en matière plastique (module élastique E_r, longueur L, largeur b, épaisseur h) est posée à plat sur une base de caoutchouc (module élastique E_b, même largeur b que la règle, longueur et profondeur grandes par rapport à b). On applique au milieu de la règle une force P uniformément distribuée le long de la largeur b. La règle s'enfonce localement dans le caoutchouc sur une profondeur δ et se plie légèrement en conséquence de la réponse élastique de la base. L'aire de contact avec la base se réduit jusqu'à trouver une valeur d'équilibre $2a$ (figure de droite). NB : on considère comme négligeable l'adhésion entre les deux solides.

1) Exprimer l'énergie élastique associée à la déformation de la règle en fonction de la valeur de a ainsi que du rayon de courbure typique R de la portion en contact.

2) Exprimer l'énergie élastique stockée dans la base.

3) Exprimer le travail fourni par la force pressante.

4) En minimisant l'énergie potentielle du système (constituée de la différence entre l'énergie élastique totale et le travail fourni par la force P) par rapport aux deux inconnues a et $k = 1/R$ (courbure), déterminer ces grandeurs ainsi que l'enfoncement δ.

5) Expliquer en quoi le résultat obtenu peut paraître surprenant, notamment par rapport à la théorie du contact de Hertz (contact élastique sphère/plan).

6) Application numérique : $E_r = 1$ GPa, $L = 20$ cm, $h = 2$ mm, $b = 3$ cm, $E_b = 1$ MPa, $P = 100$ N. Estimer les valeurs de a, R et δ.

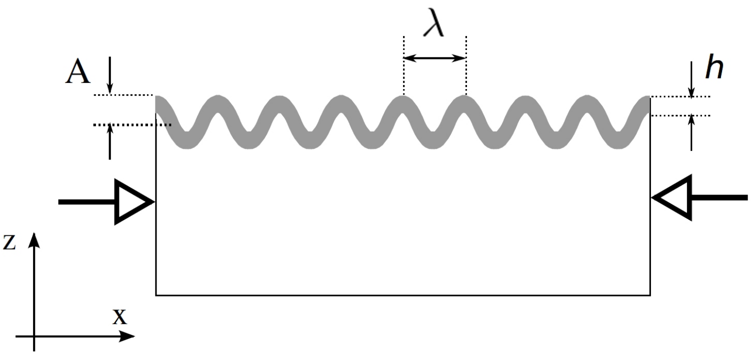
7) Discuter le cadre d'application de cette modélisation simplifiée au problème initial de la marche sur les planches.

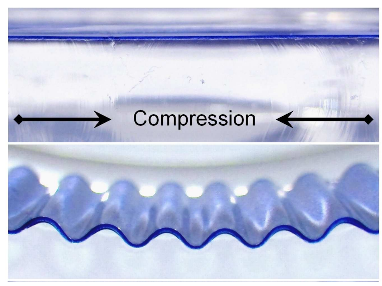
2 Des rides sur la peau

Une couche fine (film) d'épaisseur h et de module élastique E_f adhère parfaitement sur un bloc élastique d'épaisseur H, longueur L, largeur b ($H, L, b \gg h$) et de module élastique $E_b \ll E_f$. L'ensemble est comprimé dans le plan du film suivant sa longueur (direction x). Au-delà d'une certaine contraction, on observe un flambage du système : la surface se ride. Les plissements observés sont perpendiculaires à la direction x. On notera ε_m la déformation (moyenne) de compression suivant l'axe x, b la largeur du bloc suivant y et on négligera la déformation dans la direction perpendiculaire au plan de la figure (effet de Poisson). On suppose que le profil de la surface peut être décrit par la fonction :

$$z(x) = A \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

où λ est la longueur d'onde des rides et A leur amplitude. On effectuera les calculs en ordre de grandeur.





1) Le film est en flexion. Évaluer un rayon de courbure typique. Montrer que l'énergie élastique de courbure du film stockée par longueur d'onde suivant x s'écrit $E_f h^3 b A^2/\lambda^3$.

2) En supposant que les déplacements dans le substrat soient principalement orientés perpendiculairement au plan de la surface et qu'ils s'annulent au delà une profondeur de l'ordre de λ (argumenter ce choix), donner l'énergie élastique emmagasinée dans le substrat par longueur d'onde. Estimer ensuite l'énergie élastique associée à la compression moyenne ε_m.

3) En situation de flambage, le film n'est plus comprimé. Montrer que la conservation de l'aire du film, imposée par cette propriété, permet de trouver une relation entre l'amplitude des rides, leur longueur d'onde et la compression moyenne imposée : $A^2/\lambda^2 \sim \varepsilon_m$.

4) En reportant la relation précédente dans l'énergie élastique totale, montrer que l'on peut déduire :

$$\lambda \sim h \left(\frac{E_f}{E_b}\right)^{1/3}$$

Discuter le résultat obtenu.

5) Discuter de l'applicabilité du modèle précédant à la formation des empreintes digitales sur nos doigts, ainsi que des rides sur la peau vieillissante.