

# Le rebond d'une balle viscoélastique

Lors du rebond d'une balle viscoélastique en polymère sur un sol rigide (ou de façon équivalente d'une balle rigide sur un sol viscoélastique!) la balle est soumise à des contraintes localisées très intenses et pendant un temps très court. On peut constater que des balles de composition différente, très similaires d'aspect et au toucher, peuvent présenter trois types de comportements très différents:

- A) Un rebond sec, accompagné d'un 'Toc' et remontant presque à la même hauteur de départ
- B) Un rebond très amorti, dans lequel la balle se resoulève à peine du sol
- C) Un rebond doux et silencieux, à nouveau remontant presque à la même hauteur de départ

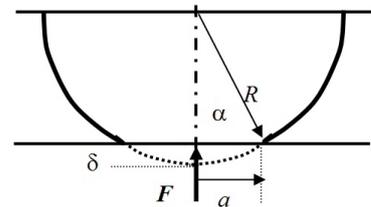


On constate en outre que le rebond de chaque balle peut changer d'un type de comportement à l'autre suite à une variation de température de quelques degrés. L'exemple plus classique est la balle utilisée dans le sport du squash, qui ne rebondit pas si elle n'est pas pré-échauffée par des frappes répétées. Le but de ce TD est de rationaliser ces phénomènes en termes de perte d'énergie par dissipation viscoélastique.

Le traitement complet du problème étant complexe, on effectuera une modélisation en loi d'échelle fondée sur une approximation quasi-statique et on discutera ensuite sa capacité de décrire le phénomène proprement.

## 1 Modélisation du rebond élastique quasi-statique

L'approximation quasi-statique consiste à traiter d'abord le problème du contact élastique statique d'une sphère élastique (module élastique  $E$ , densité  $\rho$  et rayon  $R$ ) contre un plan rigide en fonction de la pénétration  $\delta$ . On insère ensuite la dépendance temporelle  $\delta(t)$  dans la solution élastique sous l'hypothèse qu'elle soit 'lente'. On peut ainsi obtenir une estimation de la pénétration maximale et de la durée du contact, qui nous serviront pour évaluer le type de réponse viscoélastique dans la partie 2 du problème.



1. Solution élastostatique (contact de Hertz): exprimer l'énergie élastique associée à une faible pénétration  $\delta \ll a \ll R$ . Suggestion: utiliser le principe de Saint-Venant.
2. Solution quasi-statique: estimer la pénétration maximale  $\delta_{max}$  pour une balle qui possède une vitesse verticale  $v$  juste avant l'impact. En déduire une estimation pour la durée  $t^*$  du contact.
3. Exprimer les deux résultats en fonction des rapports  $R/c$  et  $v/c$ , où  $c$  est une vitesse caractéristique élastodynamique dont on précisera la signification physique. Discuter le domaine de validité de ce modèle quasi-statique d'impact.
4. Exprimer les résultats précédentes en fonction de la hauteur  $h$  de chute de la balle. Discuter le domaine de validité de l'approximation quasi-statique en termes de hauteur maximale de chute. Discuter la signification du nombre sans dimension qu'on peut construire en comparant l'énergie gravitaire à l'énergie élastique.
5. AN: Calculer  $\delta_{max}$  et  $t^*$  pour deux balles, respectivement de polymère vitreux ( $E \sim 1$  GPa) et caoutchoutique ( $E \sim 1$  MPa) de rayon  $R=2$  cm tombant d'une hauteur  $h = 10$  cm (pour les deux on peut considérer la densité  $\rho \sim 1000$  kg/m<sup>3</sup>). Est-ce que cette application retombe dans le domaine de validité des approximations faites?

## 2 Estimation de l'énergie dissipée par viscoélasticité

On considère maintenant que les balles soient constituées d'un matériau viscoélastique caractérisé par un module complexe  $E^*$  dépendant de la fréquence  $f$  de stimulation ainsi que de la température  $T$ . On veut estimer l'énergie perdue par dissipation viscoélastique pendant le rebond. Les balles rebondissantes sont en général constitués d'un polymère réticulé avec température de transition vitreuse  $T_g$  bien inférieure à la température ambiante, de façon à présenter un rebond mou et élastique (type C).

Si on représente le module complexe  $E^* = E' + iE''$  à la fréquence standard  $f_0 = 1$  Hz et en fonction de la température, on obtient l'allure typique indiquée en figure 1. A température bien inférieure à la  $T_g$  le comportement à 1 Hz est élastique rigide ( $E' \sim \text{GPa}$ ), à température bien supérieure à  $T_g$  le comportement à 1 Hz est élastique mou ( $E' \sim \text{MPa}$ ). Dans une région de  $\pm 20^\circ\text{C}$  autour de la  $T_g$  le comportement à 1 Hz est fortement viscoélastique, pouvant atteindre des valeurs de  $\tan \delta$  proches de 1. L'équivalence temps-température (loi WLF) nous dit qu'en première approximation une augmentation de température de  $7^\circ\text{C}$  a un effet équivalent à une diminution de fréquence d'un facteur 10.

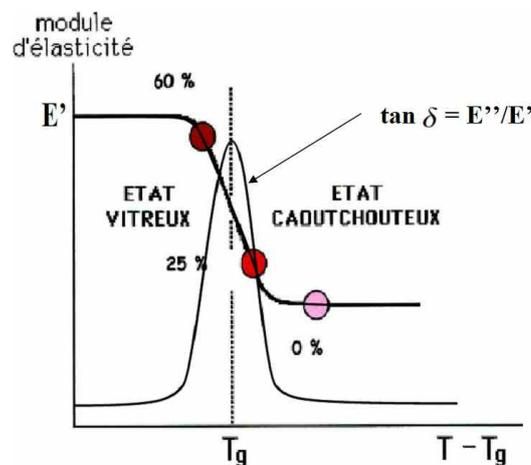


Figure 1: Courbe du module élastique complexe (pour une fréquence de sollicitation de 1 Hz) en fonction de la température pour les polymères réticulés. Les courbes de différents polymères réticulés se superposent si on décale l'axe de température horizontalement de façon à superposer les régions de transition vitreuse (i.e. d'une quantité correspondante à la différence de  $T_g$ ).

Nous considérons le rebond à température ambiante ( $T_{amb} = 20^\circ\text{C}$ ) de trois balles composées du mélange d'un élastomère et d'une résine epoxy en pourcentage massique respectivement de 60%, 25% et 0%. On peut considérer qu'en gros, l'effet du rajout d'epoxy correspond uniquement à une augmentation de la température de transition vitreuse  $T_g$ , ce qui nous donne respectivement les valeurs de  $T_g^1 = 35^\circ\text{C}$ ,  $T_g^2 = 5^\circ\text{C}$ ,  $T_g^3 = -20^\circ\text{C}$ .

1. Justifier la représentation du comportement des trois polymères sur la figure 1 (identifiés par la pourcentage d'époxy).
2. Pour chacune des trois balles estimer graphiquement et qualitativement le module  $E'$  et la valeur de  $\tan \delta = E''/E'$  associés au temps caractéristique de contact  $t^* = 1$  ms du rebond. En déduire qualitativement la pourcentage d'énergie perdue pendant le rebond.
3. Pourquoi si on comprime les trois balles avec les mains on a du mal à identifier la différence de réponse?
4. Que se passerait il si on chauffait les trois balles de  $40^\circ\text{C}$ , par exemple en les plongeant dans l'eau chaude à  $60^\circ\text{C}$ ?
5. Dans le cas de la balle qui ne rebondit pas, quel est l'échauffement après une chute de 10 cm? Combien de chutes du même type faut il effectuer pour rendre la balle rebondissante? (On assumera une valeur de capacité thermique du polymère de l'ordre de  $C_m = 2.5 \text{ kJ kg}^{-1}\text{K}^{-1}$ ).

### 3 Pourquoi les planètes ne rebondissent pas?

Alors qu'une boule de taille centimétrique lâchée à une hauteur d'une dizaine de centimètres rebondit en général sur un sol dur, et ceci pour nombreuses matières constituant la boule ou le sol (polymère vitreux ou caoutchoutique, verre, métal, bois, ...), la physique du rebond n'est pas la même à de très grandes échelles spatiales comme celles des planètes.



Par le biais d'arguments qualitatifs simples en loi d'échelle ou de considérations dimensionnelles, expliquer l'effet de l'échelle sur le problème du rebond et rendre compte des deux phénomènes suivants:

1. Dans la scène finale du film *Melancholia* (Lars von Trier, 2011) la terre (à gauche dans la figure de gauche) se heurte à une grosse planète vagabonde et se fragmente à l'impact.
2. Les cratères qui parsèment la surface de la lune (figure de droite) sont la trace de l'impact de gros astéroïdes dont on ne retrouve que des petits fragments.