Examen de Mécanique des Solides et des Matériaux 2

Examen du 22 Janvier 2018 : 9h30-12h00
Promotion 135

La durée totale de l'examen (partie A et partie B) est de 2h30.

PARTIE A *Ecrivez lisiblement votre nom sur chaque copie*

Durée : **30 minutes**. Les copies seront ramassées à la fin de la partie A.

La **partie A** se compose d'un QCM.
Attention : une seule réponse valable par question

Documents :
Aucun document n'est autorisé dans la partie A et pas de calculatrice.

PARTIE B *Ecrivez lisiblement votre nom sur chaque copie*

Durée : la durée de la partie **B** est de **2h**

La **partie B** se compose de deux problèmes portant sur la résonance d'un verre rempli d'eau et sur le décollement d'un filament adhésif.

Documents :
Une feuille A4 manuscrite et signée comportant un résumé des formules et concepts essentiels. Une calculatrice basique est autorisée.

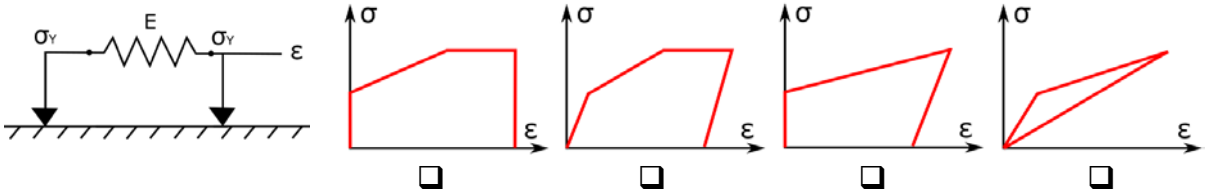
NOM :
Prénom :

Partie A – QCM **Examen MSM2 – 22/01/2018 - Promotion 135**
Attention : une seule réponse valable par question

1. Lequel des critères suivants représente la condition de refermeture d'une fissure reversible

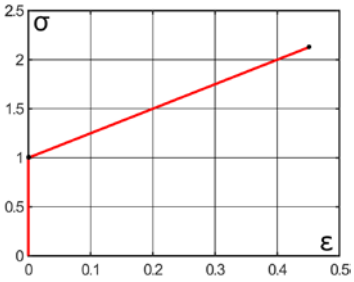
❑ $\sigma < \sigma_c$ ❑ $\frac{dG}{dA} < 0$ ❑ $K > K_c$ ❑ $G < w$

2. Lequel des diagrammes de charge/decharge est compatible avec le modèle rhéologique :



❑ ❑ ❑ ❑

3. Lors d'un test de traction uniaxiale jusqu'à rupture, un métal donne le comportement représenté dans la figure de droite. Le résultat est le même à différentes vitesses de chargement.

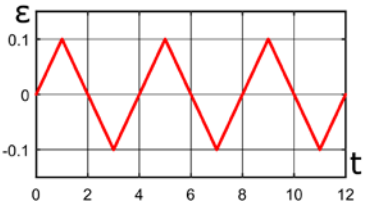


I. Quelle loi de comportement peut-on identifier?

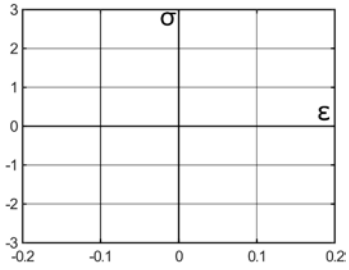
❑ Elasto-plastique écrouissant
❑ Visco-plastique

❑ Plastique-parfait écrouissant
❑ Elasto-plastique parfait

II. Identifier tous les paramètres qu'on peut évaluer.



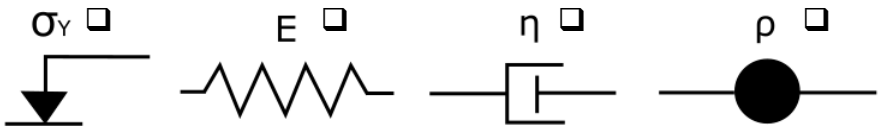
III. Représenter sur le graphique $\sigma(\varepsilon)$ en bas, le réponse du même matériau à la courbe de chargement cyclique représentée dans la figure $\varepsilon(t)$.



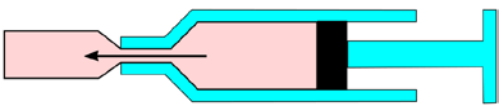
IV. Est-ce que la réponse à un chargement sinusoïdal de même amplitude et fréquence aurait été différente?

❑ Oui ❑ Non ❑ On ne peut pas dire

4. Lequel des élements rhéologiques suivants est le plus sensible aux variations de température?



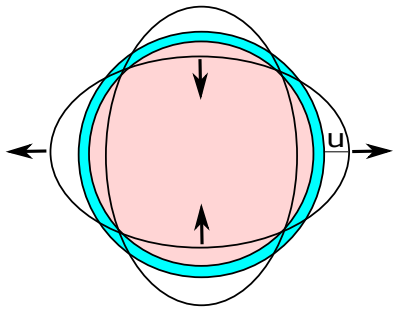
5. Après l'extrusion d'un matériau par l'embout serré d'une seringue, on observe la production d'un cylindre de diamètre plus grand que le diamètre interne de l'embout de la seringue. Quelle loi de comportement est compatible avec cette observation?



❑ Elastique ❑ Elasto-plastique ❑ Plasticité parfaite ❑ Aucune des ces lois

Problème 1: La harpe de verre

En remplissant des verres à calice avec de l'eau on peut accorder finement leur fréquence de résonance et produire ainsi un instrument musical dit 'la harpe de verre', qui est joué en frottant délicatement les surfaces de verre avec les doigts.



Lors de la vibration d'un verre rempli de fluide visqueux, le fluide contribue à la fois à l'inertie et à la dissipation visqueuse, qui ont l'effet respectivement de baisser la fréquence de résonance et de raccourcir la durée du son émis.

Pour simplifier la géométrie du modèle, on approche la forme du verre par un tube cylindrique de rayon $R = 3$ cm et hauteur $H = 5$ cm, rempli d'eau jusqu'à une hauteur H_w. Dans une section horizontale du verre la cinématique du mode fondamental du système verre/eau est celle représentée dans la figure de droite: le verre constitue une coque élastique très rigide ($E = 70$ GPa, $\rho = 2200$ kg/m^3) et fine ($h = 1$ mm $\ll R$) qui oscille entre la forme initiale circulaire et deux états en forme d'ellipse. On peut paramétrer ce mouvement par le déplacement $u \ll h$ de l'un des apex de l'ellipse, dans la direction perpendiculaire à la coque. Le contour du coeur liquide (qu'on considère comme un fluide Newtonien incompressible de viscosité $\eta = 1$ mPa s et densité $\rho = 1000$ kg/m^3) suit la même cinématique que la coque.

Pour résoudre ces problèmes avec des méthodes de mécanique de solides, on peut traiter l'eau comme un matériau viscoélastique de module complexe purement imaginaire $E^* = i\omega\eta$ (ω étant la fréquence de l'oscillation en rad/s). On peut ainsi d'abord résoudre le problème élastique correspondant, et considérer la nature viscoélastique en suite.

On commence donc par résoudre le problème de la vibration d'une coque élastique rigide contenant un coeur élastique mou incompressible. Les calculs seront conduits en loi d'échelle.

Rappel: pour une ellipse de demi-axes a et b, l'aire est donnée par $A = \pi ab$, le périmètre est bien approché par l'expression $p = \pi(a + b)$, le rayon de courbure aux apex est donné par $R_a = b^2/a$, $R_b = a^2/b$.

1. Justifier que la cinématique de déformation interne de la couche de verre est celle d'une poutre inextensible en flexion, et que celle du solide incompressible mou contenu dans le verre est celle d'un cisaillement.

2. Montrer que la déformation typique dans la coque vaut:

$$\varepsilon_v \sim \frac{hu}{R^2}$$

Suggestion: comme l'état non déformé de la poutre possède déjà un rayon de courbure R, la déformation doit être associée aux variations de courbure locale $\Delta(1/R)$.

3. Exprimer la déformation typique ε_w dans le coeur élastique mou en fonction du déplacement u d'un apex d'ellipse. Montrer qu'elle est un ordre de grandeur plus grande que ε_v.

4. Évaluer l'énergie élastique maximale stockée dans la couche et dans le coeur.

5. Évaluer l'énergie cinétique maximale stockée dans la couche et dans le coeur en fonction de la fréquence ω de l'oscillation.

6. En imposant l'équivalence entre l'énergie élastique totale et l'énergie cinétique totale, déterminer la fréquence de vibration ω_0 de la structure composite.

7. Utiliser ce résultat pour exprimer la fréquence de résonance du verre vide et évaluer sa valeur approchée (en Hz).

8. Montrer que l'équation pour la fréquence de résonance du verre vide pouvait être dérivée à partir de la vitesse de propagation des ondes de flexion de longueur d'onde λ:

$$c_f = \sqrt{\frac{E}{\rho}}\frac{h}{\lambda}$$

9. On introduit maintenant la nature viscoélastique du solide en substituant le module élastique E_w du coeur par un module complexe $E_w^* = i\omega_0\eta$ dans l'équation obtenue pour le fréquence de résonance. Évaluer l'effet de l'eau sur la fréquence de résonance du verre et sur le temps d'atténuation de la vibration (liés respectivement à la partie réelle et au $\tan\delta$ de la fréquence complexe ω_0^*). Suggestion: il convient d'analyser d'abord l'effet de correction relative de l'eau sur le numérateur (terme élastique) et sur le dénominateur (terme inertiel) pour identifier les termes dominants dans chaque calcul. Montrer qu'entre le verre vide et le verre plein, on peut diminuer la fréquence d'un facteur 4.

10. En vue du résultat, discuter la faisabilité technique de la harpe de verre illustrée dans la figure initiale, et couvrant une gamme musicale d'intérêt.

    Rappel: la fréquence du LA central du piano est 440 Hz. Chaque octave correspond à une variation de fréquence d'un facteur 2. La gamme des voix humaines va de 80 Hz (Basse) à 1000 Hz (Soprano). Comparer aussi la prédiction sur le temps d'atténuation avec la constatation que la durée des sons émis par les verres de l'harpe est de quelques secondes (après qu'on ait arrêté la stimulation par le doigt).

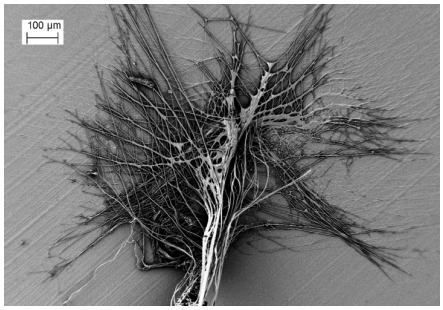
11. En réalité le comportement du verre n'est pas totalement élastique. Son faible coefficient de frottement interne peut être représenté en rajoutent à son module élastique une partie imaginaire qui vaut environ 1/1000 de la partie réelle et qui varie peu sur la gamme de fréquences audibles. Estimer sa contribution dans l'atténuation de l'énergie de vibration du verre rempli d'eau. Quelle source de dissipation est dominante?

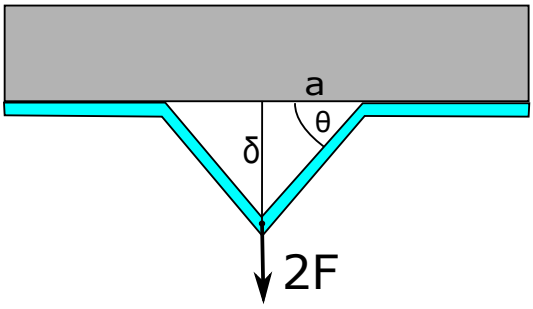
12. Comment expliquer l'observation que remplir le verre d'un liquide visqueux augmente la durée du son émis!

13. Est-ce que vous pouvez interpréter par quel mécanisme glisser un doigt sur la surface du calice puisse exciter sa vibration? Pouvez vous imaginer un autre instrument musical qui utilise le même mécanisme physique pour exciter l'émission de la note? Suggestion: eh, non, ce n'est pas la harpe! Notre instrument était mal nommé!

Problème 2: Le multipelage: un atout dans la nature?

Dans plusieurs systèmes biologiques la nécessité d'assurer l'adhésion sur des substrats variés est satisfaite en réalisant des contacts multifilamentaires. A titre d'exemple, la figure à gauche illustre un agrandissement du point d'accroche d'un fil d'araignée sur une parois rigide.





Pour modéliser ce système d'accroche astucieux, nous allons considérer le système simplifié dans la figure de droite, où une couche élastique adhésive est décollée d'un substrat rigide par l'application d'une force $2F$ sur un point à l'intérieur de la couche. La partie décollée de longueur initiale $2a$, prend alors une forme en V sous l'action de l'étirement élastique. L'objectif sera de démontrer que cette configuration de double pelage en V permet de supporter une force plus élevée que la configuration de pelage simple, où la force serait appliquée à l'extrémité libre d'une couche collée, conduisant à un angle de pelage de 90° (voir figure en question 10).

On considère que la couche élastique, de modules $E = 1$ GPa et $\nu = 0.33$, épaisseur $h = 50$ μm et largeur $b = 1$ cm, est suffisamment fine pour négliger l'énergie de flexion (couche élastique extensible, infiniment flexible). On dénomme Γ l'énergie d'adhésion entre couche et substrat, δ le déplacement vertical du point d'application de la force, et θ l'angle de pelage résultant de l'extension ε de la couche. NB: par symétrie on peut se limiter à l'étude de la moitié droite du système, soumise à une force verticale F, dont le point d'application est contraint de se déplacer verticalement.

1. En supposant que la couche est décollée sur une longueur a fixe (pas de propagation), exprimer la relation $F(\theta)$ entre la force appliquée et l'angle θ. En déduire que l'angle θ est indépendant de la longueur décollée a.

2. Pour exprimer l'angle θ en fonction de la force appliquée F, effectuer un développement limité de la fonction $F(\theta)$ jusqu'au premier terme non nul. Montrer qu'après inversion on obtient:
$$\theta \simeq \left(\frac{2F}{E'bh}\right)^{1/3}$$
Dans le suite du problème on restera dans l'approximation $\theta \ll 1$ qu'on justifiera à posteriori.

3. Déterminer l'angle limite θ_{el} tel que la couche reste en regime élastique.

4. Exprimer l'énergie élastique et le travail de la force extérieure en fonction de la force F et de la longueur de décollement a (en prenant comme état initial $a = 0$). NB: l'angle $\theta(F)$ reste constant quand a augmente.

5. Exprimer le taux de restitution de l'énergie en fonction de F.

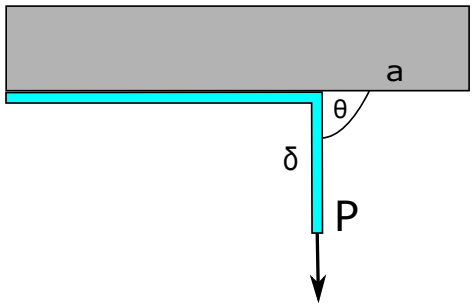
6. Exprimer la force F_c nécessaire au décollement en fonction de l'énergie de rupture Γ.

7. Discuter la stabilité de la propagation de fissure.

8. Évaluer la force totale $2F_c$ pour $\Gamma = 1, 10, 100$ J/m^2.

9. Évaluer la valeur de l'angle de pelage θ_c pour les mêmes valeurs de Γ qu'en question 8. Discuter la validité des assumptions et approximations faites plus haut.

10. Exprimer le taux de restitution de l'énergie pour un pelage simple, i.e. qu'on obtiendrait en appliquant une force verticale P à l'extrémité libre de la couche.



11. Calculer la force de pelage simple P_c pour les mêmes valeurs de Γ qu'en question 8. Comparer avec la force maximale $2F_c$ obtenue pour le double pelage.

12. Discuter de la pertinence du modèle développé pour le double pelage pour expliquer le contact multi-filamentaire de la figure initiale.