

Examen de Mécanique des Solides et des Matériaux 2

*Examen du 2 Février 2017 : 9h30-12h00
Promotion 134*

La durée totale de l'examen (partie A et partie B) est de 2h30.

PARTIE A *Ecrivez lisiblement votre nom sur chaque copie*

Durée : 30 minutes. Les copies seront ramassées à la fin de la partie A.

La **partie A** se compose d'un QCM.

Attention : une seule réponse valable par question

Documents :

Aucun document n'est autorisé dans la partie A et pas de calculatrice.

PARTIE B *Ecrivez lisiblement votre nom sur chaque copie*

Durée : la durée de la partie **B** est de **2h**

La **partie B** se compose d'un problème constitué d'un set d'exercices sur l'extraction d'une fibre, ainsi que d'un exercice d'interprétation sur le roulement/freinage d'un pneu.

Documents :

Une feuille A4 manuscrite et signée comportant un résumé des formules et concepts essentiels.
Une calculatrice basique est autorisée.

NOM :
Prénom :

Partie A – QCM

Examen MSM2 – 02/02/2017 - Promotion 134

Attention : une seule réponse valable par question

1. Lequel des critères suivants représente la stabilité de propagation d'une fissure dans un matériau fragile:

- $G \geq G_c$
 $\frac{dG}{dA} < 0$
 $\frac{dK}{dA} > 0$
 $\sigma \geq \sigma_c$

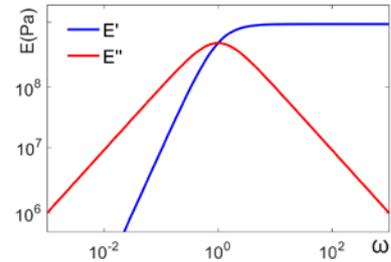
2. L'équation $(\sigma_1 - \sigma_3)/2 \geq k$ représente un critère de :

- Rupture
 Plastification
 Limite quasistatique
 Equilibre

3. On réalise une mesure des modules dynamiques à température ambiante T_a sur un matériau inconnu et on obtient le résultat représenté dans la figure de droite.

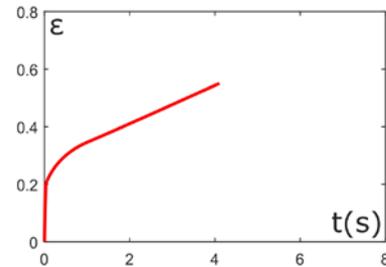
I. Quelle loi de comportement peut-on identifier?

- Fluide de Maxwell
 Solide linéaire standard
 Solide de Kelvin-Voigt
 Solide élasto-plastique



II. Représenter le modèle rhéologique correspondant:

La courbe $\varepsilon(t)$ à droite représente la réponse du même matériau à un test de fluage où une contrainte constante est appliquée au temps $t = 0$.



III. Compléter le graphique en supposant qu'au temps $t = 4$ s la contrainte est annulée.

4. Un solide est soumis à un état de contrainte homogène représenté par le tenseur ici à droite (valeurs en GPa):

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

I. Evaluer sphérique et déviateur de la contrainte, ainsi que la contrainte équivalente de Von Mises:

$$\bar{\bar{S}}_{\sigma} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \quad \bar{\bar{D}}_{\sigma} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \quad \sigma_{eq} =$$

II. Préciser s'il s'agit de :

- Traction uniaxiale
 Traction triaxiale
 Cisaillement pur
 Aucun des précédents

5. Lors de la percussion latérale d'un tube (creux) en aluminium (diamètre 2 cm, longueur 3 cm, épaisseur 1 mm, $E = 70$ GPa, $\rho = 2700$ kg/m³) on entend un son de fréquence 2300 Hz. Quelle est le type d'ondes responsable de cette résonance?

- Onde longitudinale
 Onde transverse
 Onde de flexion
 Onde de surface



NOM Prénom:

Partie B

Examen MSM2 - 02/02/2017 - Promotion 134

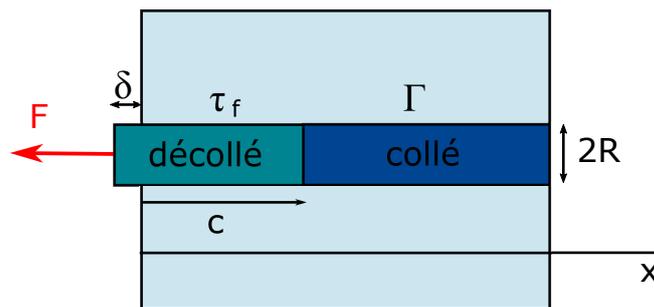
Problème: Extraction d'une fibre

L'insertion de fibres dans un matériau est une technique très répandue de renforcement mécanique. Lors de la rupture du matériau, les fibres exercent des forces pontantes entre les lèvres de fissure qui réduisent la concentration de contrainte à la pointe. Pour atteindre la rupture du matériau, il faut mettre en jeu des mécanismes de décollement, glissement et rupture des fibres (figure 1), ce qui augmente fortement l'énergie nécessaire à la rupture. En fonction des applications, fibre et matrice peuvent avoir un comportement fragile ou ductile. Le contraste de propriété entre fibre et matrice joue un rôle important.



Figure 1: Schéma de l'action de renforcement des fibres lors de la propagation d'une fissure (gauche) et cliché expérimental de la pointe de fissure dans un composite.

Pour mieux comprendre les mécanismes de dissipation mis en jeu, on considère ici l'**extraction d'une fibre unique à partir d'une matrice infiniment rigide** sous l'action d'une force de traction F orientée dans l'axe de la fibre, comme dans la figure suivante:



L'interaction entre la fibre et la matrice peut prendre deux formes: (a) pour la **partie collée** une **énergie d'adhésion** Γ , nécessaire pour la rupture de l'interface; (b) pour la **partie décollée**, dont la longueur à repos est nommée c , une **contrainte de cisaillement constante** τ_f associée au frottement fibre/matrice. Sa valeur dépend de la contrainte de compression résiduelle que la matrice exerce sur la fibre en fonction du procédé de mise en forme. Le problème est divisé en plusieurs parties pour comprendre les mécanismes liés au couplage entre la déformation élastique ou plastique de la fibre, le décollement fibre/matrice et le glissement fibre/matrice.

Dans toutes les parties du problème on considère par simplicité une **cinématique 1D** pour la fibre, ce qui correspond à assumer que les champs de déplacement, déformation et contrainte soient homogènes dans chaque section perpendiculaire à la fibre. Fibre et matrice ont une extension illimitée dans le sémi-espace identifié par le repère $x > 0$ indiqué en figure. La situation initiale présentera toujours une partie déjà décollée et libre de glisser de longueur c , et le déplacement δ du bout de la fibre est nul avant l'application de la force F , qui est maintenue constante dans la suite.

Dans ce formalisme simplifié, la **rupture de la fibre** est décrite par l'atteignement d'une contrainte critique σ_R .

1. On considère initialement une **fibre élastique fragile**, reliée à la matrice par une **énergie d'adhésion** Γ , les interfaces étant **sans frottement** ($\tau_f = 0$, pré-contrainte nulle).
 - (a) Évaluer la variation d'énergie élastique, le travail fourni par la force extérieure et l'aire de la surface décollée lors d'une propagation de la fissure sur une longueur dc .
 - (b) Évaluer le taux de restitution de l'énergie.
 - (c) Évaluer la force critique pour décoller la fibre. Montrer que la contrainte critique de décollement σ_d peut s'exprimer dans la forme:

$$\sigma_d = 2\sqrt{\frac{E\Gamma}{R}}$$

- (d) Déterminer la stabilité de la propagation du front de décollement.
 - (e) A partir d'une mesure de la force critique d'extraction F_d , exprimer l'énergie interfaciale Γ ainsi que la ténacité K_c en termes de la contrainte critique d'extraction σ_d . Commenter le résultat.
 - (f) Discuter sous quelles conditions on peut atteindre la rupture de la fibre, et à quel point de la fibre.
2. On considère maintenant une **fibre élastique fragile non collée** ($\Gamma = 0$), mais présentant une **contrainte de frottement** τ_f lors du glissement par rapport à la matrice. NB: En l'absence d'adhésion, on ne peut pas définir la longueur décollée (elle est déjà infinie). La longueur c représente plutôt la séparation entre la partie qui a commencé le glissement et la partie où le glissement est encore nul (pour la quelle on assume que τ_f et σ sont nuls). Pour bien traiter le problème, il faut assumer que le glissement ait déjà commencé sur une petite longueur initiale, qu'on assumera de taille négligeable.

- (a) Montrer que l'équation différentielle pour la contrainte uniaxiale $\sigma(x)$ dans la partie de la fibre affectée par le glissement est:

$$\frac{d\sigma}{dx} = -\frac{2\tau_f}{R}$$

Suggestion: utiliser l'équation d'équilibre statique.

- (b) Déterminer le champ de contrainte $\sigma(x)$ ainsi que la longueur de fibre c_f affectée par le glissement pour être en équilibre avec la force F . Commenter le résultat.
 - (c) Déterminer les champs de déformations $\varepsilon(x)$ et déplacement $u(x)$.

- (d) Discuter sous quelles conditions on peut atteindre la rupture de la fibre, et à quel point de la fibre.
- (e) Déterminer le travail total de la force extérieure, le travail dissipé en frottement et l'énergie élastique totale en fonction de la force F .
- (f) Discuter le bilan énergétique pour la propagation du front de glissement.
- (g) Évaluer l'énergie dissipée maximale dans le processus d'extraction/rupture.
3. On considère maintenant la combinaison d'une **contrainte de frottement** τ_f sur la partie décollée de la fibre et d'une **énergie d'adhésion** Γ sur la partie intacte (la fibre restant **élastique fragile**). NB: à ce que le front de décollement puisse propager, il faut que toute la partie décollée glisse.
- (a) La condition de propagation de front de décollement/glissement peut être traitée au niveau local par la même équation déterminée en partie 1 pour le décollement simple, i.e. en imposant une contrainte critique σ_d au front. Expliquer pourquoi on peut négliger l'effet du frottement. NB: si vous n'avez pas trouvé l'équation pour σ_d dans la partie 1, vous pouvez continuer la suite en utilisant le symbole σ_d .
- (b) Écrire les nouvelles conditions aux limites et déterminer le profil de contrainte $\sigma(x)$ dans la partie décollée de la fibre sous l'action d'une force F constante. Exprimer la longueur de décollement/glissement c_d . Commenter le résultat.
- (c) Déterminer la force critique F_d pour faire propager le front de décollement/glissement jusqu'à une longueur de fibre L . Représenter graphiquement la relation $F_d(L)$.
- (d) Discuter sous quelles conditions on peut atteindre la rupture de la fibre, et à quel point de la fibre.
- (e) Comparer qualitativement l'énergie dissipée maximale dans le processus d'extraction/décollement/rupture avec la même grandeur calculée dans la partie 2.
4. On considère finalement une **fibre ductile**, reliée à la matrice par une **énergie d'adhésion** Γ , les interfaces étant **sans frottement** ($\tau_f = 0$).

Plus précisément le comportement de la fibre est **rigide-plastique avec écrouissage linéaire**, caractérisé par un seuil de première plastification σ_y , un module d'écrouissage E_k et une contrainte de rupture en traction $\sigma_R > \sigma_y$:

$$\sigma(\varepsilon) = Y(\varepsilon^p) = \sigma_y + E_k \varepsilon \quad \varepsilon^{el} = 0 \quad \sigma \leq \sigma_R$$

NB: on reste dans une représentation idéalisée 1D, où la contrainte est homogène sur chaque section de la fibre et on néglige les contractions latérales (pas d'instabilité de striction non plus donc). En pratique ceci est vérifié pour des déformations plastiques faibles, et si le module d'écrouissage n'est pas trop faible.

- (a) Justifier que les champs de contrainte et déformation dans la portion décollée de la fibre sont homogènes. Déterminer la valeur de la déformation uniaxiale ε^* de la fibre.
- (b) Afin d'effectuer un bilan de type Griffith, on considère la séparation hypothétique d'une nouvelle portion d'interface de longueur dc . Décrire la variation de contrainte et déformation dans le segment de portion dc .
- (c) Décrire le travail dW_{ext} de la force extérieure F et la variation dU_{el} d'énergie élastique conséquents à la propagation dc . Évaluer le taux de restitution de l'énergie G .

- (d) En présence de dissipation plastique on ne peut pas appliquer directement le critère de propagation de Griffith $G = \Gamma$. Mais on peut utiliser le même formalisme si on rajoute l'énergie dissipée plastiquement au coût énergétique de propagation de la fissure. Évaluer donc l'énergie dissipée par unité d'aire de propagation Γ_p . Exprimer le bilan énergétique complet.
 - (e) Représenter les différents termes du bilan énergétique sur un diagramme $\sigma(\varepsilon)$.
 - (f) Déterminer la valeur de la force F_d et de la déformation ε_d^* en conditions de propagation du front de décollement/plastification. Commenter le résultat.
 - (g) Est il possible de décoller de la même manière une fibre à comportement rigide-plastique parfait?
 - (h) Discuter sous quelles conditions on peut atteindre la rupture de la fibre, et à quel point de la fibre.
5. Discuter qualitativement les conséquences des éléments de modélisation traités dans ce problème sur la propagation d'une fissure en direction transverse aux fibres, comme en Figure 1.

Exercice d'interprétation: Rouler et freiner, deux propriétés antagonistes?

La nature viscoélastique des matériaux à base de caoutchouc utilisés dans les pneus est très importante pour en déterminer le bon fonctionnement. Lors du roulement on a intérêt à réduire la dissipation viscoélastique du matériau pour diminuer la consommation de carburant. Mais lors du freinage on a intérêt à augmenter la dissipation viscoélastique pour maximiser l'efficacité du freinage.



1. Décrire la nature des mécanismes de dissipation viscoélastique associés au roulement et au freinage. Suggestion: considérer le freinage comme le glissement sur une interface présentant une rugosité sous la forme simplifiée d'une sinusoïde de longueur d'onde millimétrique.
2. Expliquer comment en modifiant les propriétés viscoélastiques du pneu on peut favoriser la dissipation en roulement ou en freinage.
3. Expliquer pourquoi il convient de changer de type de pneumatique entre été et hiver, et quel paramètre viscoélastique il convient de changer pour conserver des bonnes performances de roulement et freinage dans les deux saisons.