

## Examen de Mécanique des Solides et des Matériaux

Examen du 28 Février 2012 : 16h-18h30

Promotion 129

**La durée totale de l'examen (partie A et partie B) est de 2h30.**

**PARTIE A**      *Ecrivez lisiblement votre nom sur chaque copie*

**Durée** : la durée (estimée) de la partie **A** est de **1h20**.

La **partie A** se compose de deux exercices à **choisir entre les exercices I, II et III** :

Exercice I	Identification d'une loi de comportement (20 min)
Exercice II	Description d'un état de contrainte simple (20 min)
Exercice III	Choc entre deux sphères : une question d'échelle ? (20 min)

**et d'un exercice obligatoire :**

Exercice IV	La marche sur les planches (40 min)
-------------	-------------------------------------

**PARTIE B**      *Ecrivez lisiblement votre nom sur chaque copie*

**Durée** : la durée (estimée) de la partie **B** est de **1h10**.

La **partie B** se compose d'un problème **obligatoire** :

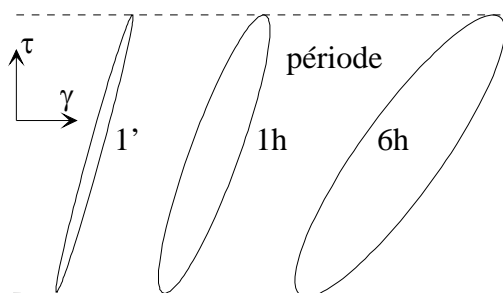
Problème V	Ecaillage spontanée de peinture
------------	---------------------------------

**Documents :**

Tous les documents sont autorisés sauf les ouvrages et les photocopies d'ouvrages

## Partie A (2 exercices au choix entre les I, II et III)

### Exercice I : Identification d'une loi de comportement

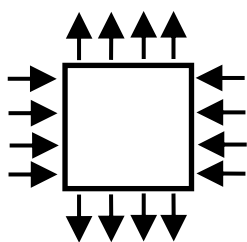


La figure présente les résultats de rhéométrie dynamique en cisaillement effectués sur un même verre à 500°C pour trois fréquences différentes. En étudiant l'orientation du cycle et l'évolution de son aire avec la fréquence, déterminer auquel des quatre comportements (solide élastique, liquide de Maxwell, liquide de Newton, solide de Kelvin-Voigt) s'apparente celui du verre à haute température.

Utiliser uniquement des arguments qualitatifs simples, mais qui permettent de justifier la réponse de façon non ambiguë.

Rappel : un rhéomètre dynamique impose une déformation de cisaillement sinusoïdale de faible amplitude  $\gamma(t)=\gamma_0\cos(\omega t)$  et mesure la contrainte de cisaillement  $\tau(t)=\tau_0\cos(\omega t-\phi)$ .

### Exercice II: Description d'un état de contrainte simple

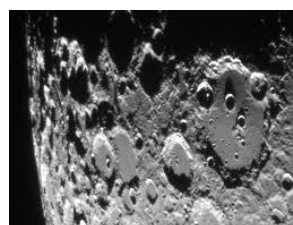


Un cube d'un matériau solide élastique (module d'Young  $E$ , rapport de Poisson  $\nu$ ) est soumis à une traction uniforme  $\sigma_0$  sur les deux facettes horizontales et au même temps à une compression uniforme  $-\sigma_0$  sur les deux facettes latérales verticales. Aucune contrainte n'est appliquée sur les deux facettes verticales parallèles au plan du dessin.

- 1) Décrire l'état de contrainte en un point typique au choix.
- 2) Peut-on dire que la contrainte est principalement une traction ou une compression?
- 3) Représenter l'état de contrainte dans l'espace de Mohr ( $\tau$ - $\sigma$ ).

### Exercice III: Choc entre deux sphères : une question d'échelle ?

Alors qu'une boule de taille centimétrique lâchée à une hauteur d'une dizaine de centimètres rebondit en général sur un sol dur, et ceci pour nombreuses matières constituant la boule ou le sol (polymère vitreux ou caoutchoutique, verre, métal, bois, ...), la physique du rebond n'est pas la même à de très grandes échelles spatiales comme celles des planètes.



Par le biais d'arguments qualitatifs simples du type loi d'échelle, expliquer l'effet de l'échelle sur le problème du rebond et rendre compte des deux phénomènes suivants :

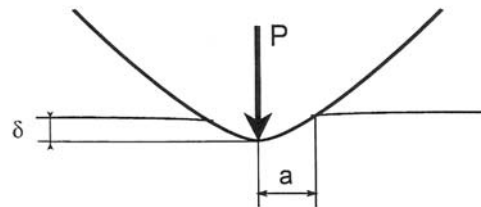
- 1) Dans la scène d'entrée du film *Melancholia* la terre se heurte à une grosse planète vagabonde et se fragmente à l'impact (figure de gauche).
- 2) Les cratères qui parsèment la surface de la lune (figure de droite) sont la trace de la pénétration en profondeur d'astéroïdes l'ayant impactée.

#### Exercice 4 (obligatoire): La marche sur les planches



Quand un sol est trop mou la marche devient difficile en conséquence de l'enfoncement des pieds dans le sol. Une stratégie classique pour faciliter la marche consiste à déposer des longues planches en bois pour se sustenter. Néanmoins si les planches ne sont pas assez épaisses, elles fléchiront sous notre poids en s'enfonçant localement. Pour mettre en évidence les ingrédients physiques fondamentaux du phénomène nous allons modéliser la situation analogue simple suivante. Les calculs seront menés en loi d'échelle.

Une règle en matière plastique (module élastique  $E_r$ , longueur  $L$ , largeur  $b$ , épaisseur  $h$ ) est posée à plat sur un cube de caoutchouc (module élastique  $E_c$ , côté du cube  $H \gg b$ ). On applique une force  $P$  au milieu de la règle. Elle se plie légèrement et s'enfonce dans le caoutchouc...



La figure de gauche sert uniquement à comprendre le mode de chargement qui est représenté sur la figure de droite.

1. Exprimer l'énergie élastique correspondante à la déformation de la règle. On pourra introduire le rayon de courbure  $R$  et la dimension du contact  $a$ . On supposera provisoirement que la dimension du contact est du même ordre de grandeur que la largeur de la règle.
2. On note  $\delta$  l'enfoncement de la règle au centre. Exprimer l'énergie élastique stockée dans le caoutchouc.
3. Donner la relation géométrique entre les grandeurs  $a$ ,  $\delta$  et  $R$ . Exprimer le travail fourni par la force pressante.
4. En minimisant l'énergie potentielle du système (constituée de la différence entre l'énergie élastique totale stockée et le travail fourni) par rapport aux inconnues  $a$  et  $k=1/R$  (courbure) déterminer ces grandeurs ainsi que l'enfoncement  $\delta$ .
5. Estimer la valeur numérique de  $a$  et vérifier l'hypothèse faite sur son ordre de grandeur. On donne  $E_r = 1 \text{ GPa}$ ,  $L = 20 \text{ cm}$ ,  $h = 2 \text{ mm}$ ,  $b = 3 \text{ cm}$ ,  $E_c = 1 \text{ MPa}$ ,  $H = 30 \text{ cm}$ .
6. Déduire la raideur du contact.
7. Expliquer en quoi le résultat obtenu peut paraître surprenant, notamment par rapport à la théorie du contact de Hertz (contact élastique sphère/plan).
- 8) Discuter le cadre d'application de cette modélisation simplifiée au problème initial de la marche sur les planches.

**Partie B**  
**Problème obligatoire: Ecaillage spontanée de peinture**



L'écaillage des vieilles peintures est une des manifestations les plus courantes du pelage spontané. En vieillissant la couche de peinture durcit et devient fragile. Les contraintes internes (la couche de peinture est tendue) provoquent alors l'apparition de fissures qui, après avoir traversé la couche, se propagent le long de l'interface peinture-support provoquant l'écaillage. La relaxation des contraintes internes, liée à un gradient de propriétés élastiques dans l'épaisseur, provoque alors le soulèvement des parties

décollées (Fig. 1)

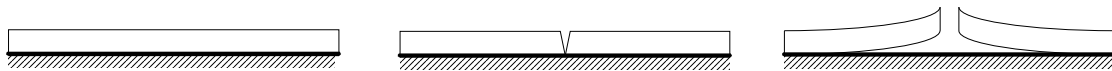
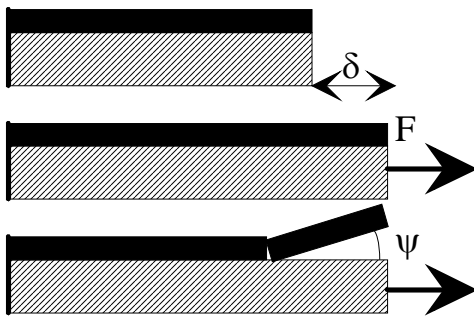


Figure 1 : Etapes de l'écaillage d'une peinture

Afin d'étudier quantitativement le phénomène, la couche de peinture et son support sont modélisés par un sandwich de deux matériaux (indice **1** pour le support et **2** pour le film) collés l'un sur l'autre, sans contrainte initiale avec une énergie superficielle d'adhésion  $w$ . La mise sous tension du film s'obtient alors simplement par application d'un allongement  $\delta$  du support seul. Sous l'action de cet allongement du support le film se tend également. Si l'allongement est suffisant une fissure va se propager à l'interface film support et le film va se décoller. Dans cette modélisation simplifiée l'angle de décollement  $\psi$  est la conséquence directe de l'expansion latérale du film décollé (effet du rapport de Poisson).



*Rappel*

Le travail nécessaire pour séparer complètement deux corps solides est égal à :

$2\gamma$  s'ils sont identiques ( $\gamma$  énergie superficielle) ;

$w = \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_{12}$  (énergie d'adhésion de Dupré) s'ils sont différents

( $\gamma_{12}$  énergie interfaciale des solides en contact)

Figure 2 : Modèle de décollement

En fait, la seule donnée de  $w$  ne suffit pas à prévoir la force nécessaire pour séparer les deux solides, d'une part parce que la mise sous contrainte des liaisons de l'interface s'accompagne généralement d'un stockage d'énergie élastique dans les liaisons avoisinantes au sein des solides, d'autre part parce que la séparation ne s'effectue jamais d'un bloc. L'aire de contact entre les solides diminue progressivement et cette diminution peut être considérée du point de vue du mécanicien comme la résultante de la propagation d'une fissure (décollement).

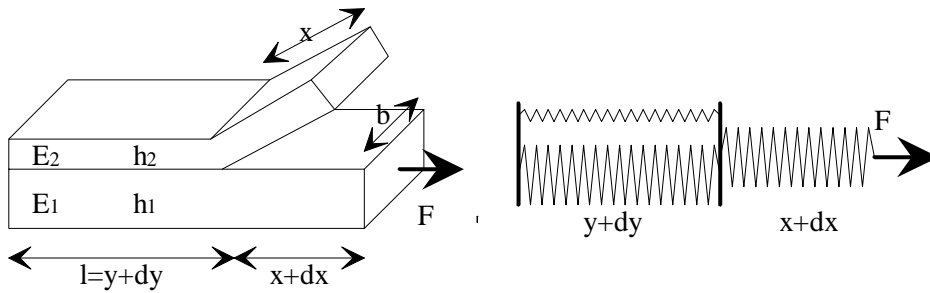


Figure 3 : Géométrie du décollement et schéma mécanique correspondant

A l'instant  $t$  après application de l'extension  $\delta$  au support, l'état du sandwich est représenté sur la Fig. 3. La partie de film décollée de longueur  $x$  est totalement relaxée (elle a restitué l'énergie élastique emmagasinée au profit de la propagation du décollement). On notera  $l$  la longueur de la partie encore adhérente (attention, cette partie est au contraire encore en extension par rapport à sa longueur à repos  $y$ ), et  $F$  la force résultante sur le système.

1) En utilisant les relations de l'élasticité linéaire, déterminer la relation entre les grandeurs  $F$ ,  $\delta$  et  $x$ . En déduire l'énergie élastique  $U_{el}$  stockée à cet instant et son évolution avec  $x$  à  $\delta$  fixé.

Sandwich	longueur initiale $L$	largeur $b$
Support	Module d'Young $E_1$	épaisseur $h_1$
Film	Module d'Young $E_2$	épaisseur $h_2$

Dans un but de simplification, on fera intervenir les rigidités transversales  $\rho = Eh$  et on négligera les contraintes de raccordement au pli de décollement.

2) Justifier que dans ce cas le taux de restitution d'énergie  $G$  se réduit à  $\left(\frac{\partial U_{el}}{\partial A}\right)_\delta$  où  $A$  est la surface restant collée:  $A = b(L - x)$ . En déduire l'expression de  $G$  fonction de  $\delta$  et  $x$ , puis de  $F/b$  et  $x$ .

3) En étudiant les courbes de la Fig. 4, donner la signification physique de la grandeur  $\varepsilon$  et de la droite horizontale en pointillé. Expliquer le comportement du film en fonction de l'allongement initial imposé  $\delta$  (on notera  $x_{eq}$  la longueur de décollement d'équilibre atteinte par le processus de décollement).

4) Déterminer la déformation initiale minimale  $\varepsilon_{init}$  nécessaire pour produire le décollement et la déformation initiale maximale  $\varepsilon_{crit}$  qui produit un décollement sur toute la longueur du film. En déduire les valeurs de force correspondants  $F_{init}$  et  $F_{crit}$ . On exprimera toutes les grandeurs en fonction du rapport  $\rho_2/\rho_1$ .

5) Etablir la relation qui lie l'angle de décollement  $\psi$ , le paramètre  $\varepsilon$  et le rapport de Poisson  $\nu$ .

6) Discuter le cadre d'application de cette modélisation simplifiée au problème initial du vieillissement des peintures.

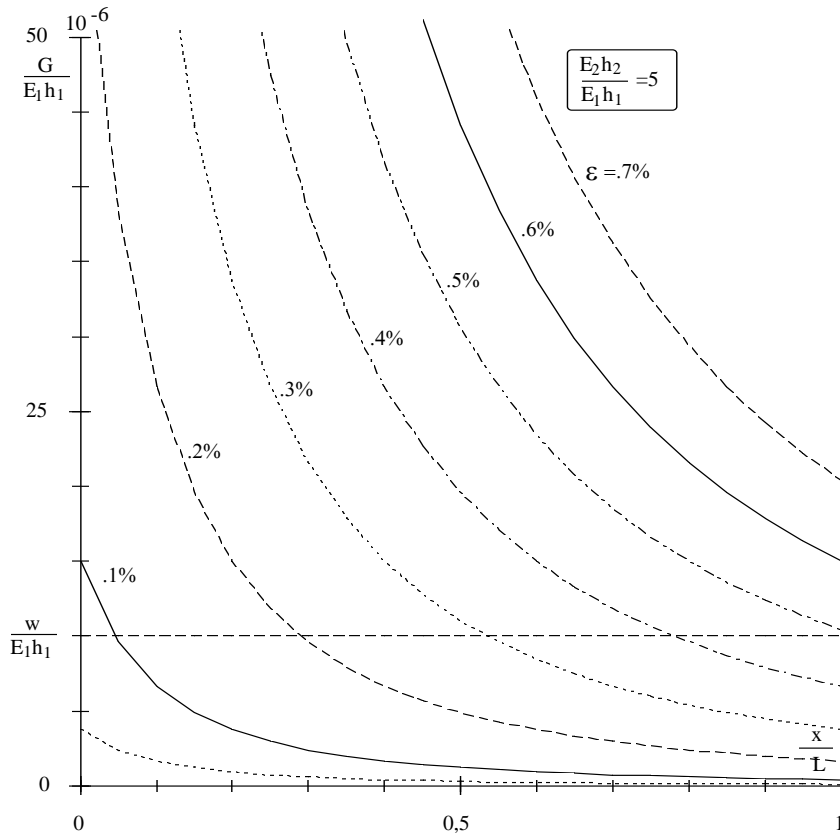


Figure 4 : Taux de restitution d'énergie  $G$  en fonction de la longueur de décollement  $x$  (NB : en variables adimensionnées).