

Examen de Mécanique des Solides et des Matériaux

Examen du 11 Février 2013 : 9h-11h30

Promotion 130

La durée totale de l'examen (partie A et partie B) est de 2h30.

PARTIE A *Ecrivez lisiblement votre nom sur chaque copie*

Durée : la durée de la partie **A** est de **30 minutes**. Les copies seront ramassées à la fin de la partie A.

La **partie A** se compose d'un QCM.

Attention : une seule réponse valable par question

Documents :

Aucun document n'est autorisé dans la partie A et pas de calculatrice.

PARTIE B *Ecrivez lisiblement votre nom sur chaque copie*

Durée : la durée de la partie **B** est de **2h**

La **partie B** se compose d'un ensemble de trois exercices de modélisation en loi d'échelle, portant sur le contact entre surfaces solides rugueuses, ainsi que d'un problème de mécanique de la fracture.

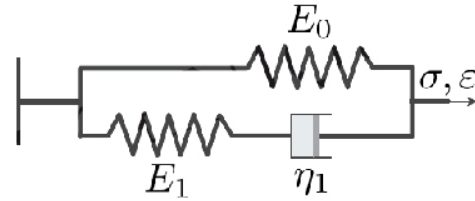
Documents :

Une feuille A4 manuscrite et signée comportant un résumé des formules et concepts essentiels.

Partie A - QCM

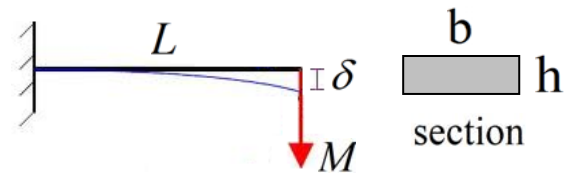
1. Le modèle rhéologique suivant décrit le comportement de :

- un solide visco-élastique
- un fluide visco-élastique
- un solide élasto-plastique
- un solide visco-élasto-plastique



2. On dispose de quatre poutres de différents matériaux et dimensions. Déterminer laquelle est faite avec le matériau le moins rigide en comparant les résultats d'un test de flexion sous l'action d'une même masse M .

- Matériau 1 : L, b, h Flèche δ
- Matériau 2 : $L, b, 2h$ Flèche δ
- Matériau 3 : L, b, h Flèche 3δ
- Matériau 4 : $L, 2b, h$ Flèche δ



3. La photo de la mousse à mémoire de forme dénote un comportement :

- Solide plastique parfait
- Solide élasto-plastique
- Solide visco-élastique
- Fluide visco-élastique



4. Un bloc constitué d'un matériau homogène et isotrope caractérisé par une résistance à la fracture $\sigma_F = 100$ MPa et résistance à la plasticité $\sigma_Y = 110$ MPa. Quel sera son mode de ruine lorsque il est soumis à un état de contrainte uniforme tel que les valeurs propres soient les suivantes: $\sigma_1 = 80$ MPa, $\sigma_2 = -40$ MPa, $\sigma_3 = -40$ MPa ?

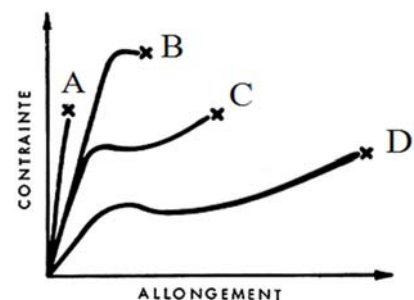
- Rupture fragile
- Flambement
- Rupture ductile
- Aucun des précédents

5. Le taux de restitution de l'énergie est :

- Une grandeur caractéristique du matériau
- Un critère de propagation de fracture
- Une grandeur relative au chargement d'une structure fissurée
- Une mesure de l'énergie dissipée

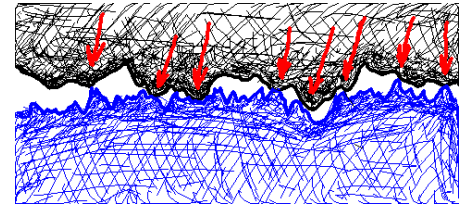
6. Quelle courbe de charge correspond au comportement du matériau le plus :

- | Rigide | Résistant | Ténace | Optimisation des 3 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> A | <input type="checkbox"/> A | <input type="checkbox"/> A | <input type="checkbox"/> A |
| <input type="checkbox"/> B | <input type="checkbox"/> B | <input type="checkbox"/> B | <input type="checkbox"/> B |
| <input type="checkbox"/> C | <input type="checkbox"/> C | <input type="checkbox"/> C | <input type="checkbox"/> C |
| <input type="checkbox"/> D | <input type="checkbox"/> D | <input type="checkbox"/> D | <input type="checkbox"/> D |



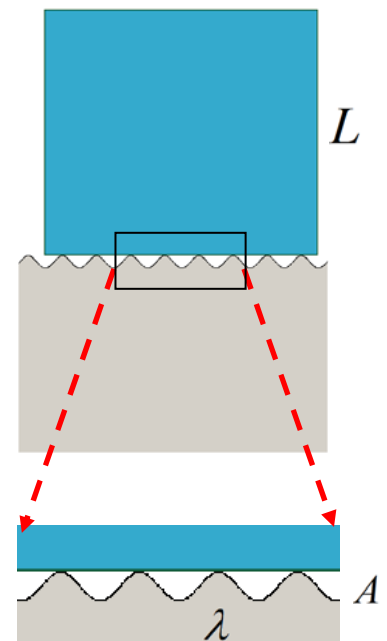
**Suite d'exercices de modélisation en loi d'échelle:
Contact entre un solide et une surface rugueuse**

Lors du contact entre deux surfaces solides nominale- ment planes la présence d'une rugosité de surface, même de très faible amplitude, est cause d'une réduction considérable de l'aire de contact intime réelle entre les deux solides (on parle de contact intime quand la distance locale est inférieure à la portée des interactions intermoléculaires en jeu entre les deux solides). L'adhésion et la résistance au glissement s'en trouvent considérablement réduites, avec la conséquence que la plupart des solides ne collent pas spontanément entre eux, bien que les forces intermoléculaires soient potentiellement très intenses.



Néanmoins, il y a certaines exceptions : 1) les solides mous (élastomères, gels, ...) adhèrent souvent de façon sensible bien que les interactions moléculaires soient souvent faibles ; 2) pour d'autres matières, l'application d'une pression entre les deux corps conduit souvent à établir une adhésion intense.

Pour modéliser ce comportement, nous allons considérer le contact entre un bloc cubique de côté L dont on spécifiera les propriétés mécaniques et un substrat rugueux modèle, constitué d'un semi-espace infini et infiniment rigide dont la surface présente une topographie en forme d'une ondulation sinusoïdale de longueur d'onde λ et d'amplitude A . Pour rester dans le domaine des faibles déformations on supposera que le rapport d'aspect de la rugosité vaut $A/\lambda = 1/100$. Pour représenter la rugosité ordinaire d'une surface nominale- ment plane (optiquement lisse) on assumera $A \sim 100$ nm. On remarque que $\lambda \sim 10$ $\mu\text{m} \ll L$.



Exercice I : Adhésion spontanée par déformation élastique

On considère un bloc élastique de module élastique E , possédant une énergie d'adhésion avec le substrat de $w = 100$ mJ/m^2 et on négligera la présence de la pesanteur. Sans perte de généralité on raisonnera sur une portion de longueur λ .

1) Montrer que l'énergie de déformation élastique nécessaire pour établir le contact entre le bloc et la surface se met sur la forme : $U_{el}^\lambda \sim EbA^2$.

Suggestion : on supposera que les déformations typiques induites par le contact restent confinés jusqu'à une distance de l'ordre de λ à partir de l'interface.

2) Par des considérations énergétiques estimer la valeur caractéristique E^{*A} du module élastique du bloc en dessous de laquelle le bloc présentera une adhésion spontanée complète au substrat.

3) Fournir des exemples de ce phénomène dans la vie courante.

Exercice II : Adhésion par compression d'un solide élastique

On considère un bloc élastique de module élastique $E \gg E^{*A}$ (pas d'adhésion spontanée, adhésion négligeable). Le bloc est maintenant soumis à une contrainte de compression uniforme σ_0 sur sa face supérieure. On supposera pour simplifier que le bloc soit incompressible.

1) Montrer que la valeur caractéristique de la compression σ^{*E} qui induira un contact complet avec le substrat s'écrit : $\sigma^{*E} \sim E \frac{A}{\lambda}$.

Remarque : il faut comprendre 'contact complet' au sens où le bloc épouse parfaitement le substrat. On négligera ici l'énergie d'adhésion et la pesanteur.

2) Justifier pourquoi on a pu tenir compte uniquement de l'énergie de déformation locale (près de l'interface) et négliger la déformation élastique de l'ensemble du bloc. Estimer la contraction élastique δ du bloc au moment de l'établissement du contact complet.

3) On considère maintenant l'effet de la pesanteur pour un matériau de masse volumique typique $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ et de module élastique $E = 1 \text{ GPa}$. Estimer la taille caractéristique L^{*G} au delà de laquelle le poids propre est suffisant à induire un contact complet avec le substrat. Commenter le résultat.

4) Fournir des exemples de ce phénomène dans la vie courante (effet de la compression en général).

Exercice III : Adhésion par compression d'un solide plastique

On considère un bloc élasto-plastique de module élastique $E \gg E^{*A}$ (pas d'adhésion spontanée, adhésion négligeable), et de contrainte d'écoulement plastique σ_Y . Le bloc est soumis à une contrainte de compression uniforme $\sigma_0 \ll \sigma^{*E}$ sur sa face supérieure (donc pas de contact par déformation élastique).

1) En supposant initialement que $E = \infty$ (plasticité parfaite), estimer l'aire de contact réelle a entre bloc et substrat en fonction de la compression σ_0 (en vue des petites déformations en jeu, on supposera que la contrainte locale aux points de contact reste verticale et qu'elle vaut σ_Y).

2) Estimer la contrainte typique σ^{*P} qui correspond à l'établissement du contact complet.

3) Dans cette nouvelle situation, peut-on négliger l'impact des déformations plastiques dans l'ensemble du bloc ?

4) Interpréter la physique de la photo à droite, obtenue après avoir pressé une boulette de pâte à modeler contre un marqueur maintenu verticalement.

5) Quelle condition le module élastique E doit-il satisfaire pour rendre acceptable l'approximation de plasticité parfaite dans cette modélisation ?



Problème IV: Test de propagation de fissure d'un échantillon soumis à une Double Torsion

L'échantillon en Double Torsion (**DT**) est un outil très répandu pour la caractérisation de la ténacité des matériaux fragiles et pour l'étude de la propagation lente de fissures. Il est constitué d'une plaque rectangulaire fine de dimensions W , L et d (Figure 1), avec $d \ll W < L$. Pour faciliter la propagation rectiligne d'une fissure, l'échantillon possède une gravure latérale de profondeur g (on dénotera $d_n = d - g$ l'épaisseur réduit) et l'initiation se fait à partir d'une entaille. Le chargement P est effectué en quatre points comme indiqué sur la Figure 1. On note δ le déplacement vertical relatif des points d'application de contrainte (flèche). On note w_n la distance entre chaque couple de points d'application de force ($P/2$, $-P/2$) et c la longueur de fissure mesurée à partir du plan vertical contenant les points d'application de la force (confondu ici avec le bord de l'échantillon).

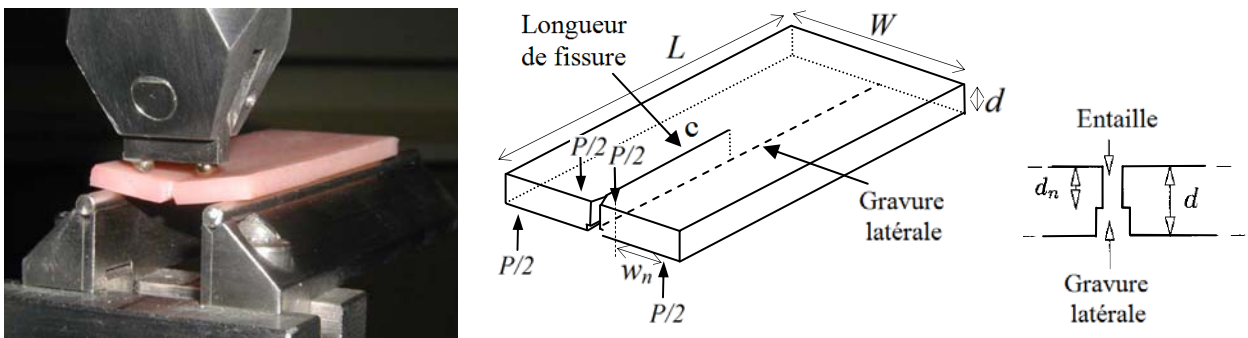


Figure 1 – Schéma géométrique et de chargement de l'échantillon de Torsion Double.

Afin de calculer l'expression pour le taux de restitution de l'énergie G en fonction de la longueur de la fissure c , il convient de modéliser la déformation de l'échantillon selon les hypothèses simplificatrices suivantes :

- l'échantillon sera assimilé à une plaque fine
- la portion de l'échantillon au delà de la pointe de fissure sera considérée comme non déformée
- les deux portions séparées par la fissure seront assimilées à deux plaques rectangulaires de longueur c et largeur $W/2$ soumises chacune à une torsion simple autour de son axe médian. Les deux torsions sont considérées comme indépendantes.

Par une analyse élastique de la torsion d'une plaque rectangulaire de dimensions ℓ , b , h (Figure 2) autour de son axe médian, la théorie de Saint Venant nous donne l'équation suivante entre l'angle de torsion θ et le moment de torsion M_t :

$$\theta = \frac{3\ell}{bh^3\mu} M_t \quad (1)$$

Où μ est le module élastique de cisaillement du matériau.

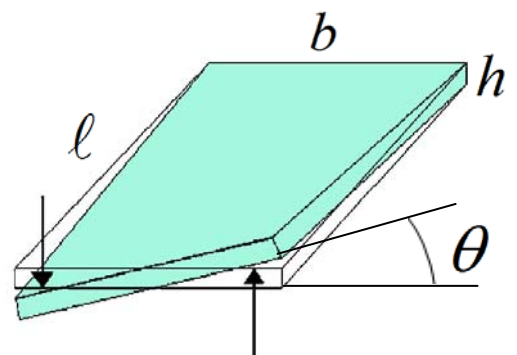


Figure 2

1) En s'appuyant sur l'équation (1) montrer que la complaisance élastique $C(c) = \delta/P$ de l'échantillon DT se met sur la forme $C(c) = Bc$, où vous donnerez l'expression de B .

2) Exprimer l'énergie de déformation élastique totale U_{el} de l'échantillon DT en fonction d'une part de complaisance $C(c)$ et de l'une des deux variables de chargement δ et P (donner les deux expressions !).

3) Exprimer le taux de restitution de l'énergie G pour un test à déplacement δ imposé et puis pour un test à charge P imposée. Commenter le résultat.

4) Discuter la stabilité de la propagation d'une fracture fragile d'énergie de fracture G_c quand l'échantillon est chargé à déplacement δ imposé ou à charge P imposée.

5) Discuter la validité de la modélisation effectuée par rapport à la forme réelle de l'échantillon.

La fonction de complaisance peut aussi être mesurée expérimentalement par le biais de courbes de charge et décharge élastique (sans propagation de fissure) sur des échantillons possédant des fissures de différentes longueurs. Cette technique prend le nom de calibration de complaisance. La calibration expérimentale de l'échantillon DT montre que la complaisance $C(c)$ varie d'une façon affine avec la longueur de fissure, si celle-ci ne s'approche pas trop des bords de l'échantillon :

$$C(c) = \delta/P = Bc + D \quad (2)$$

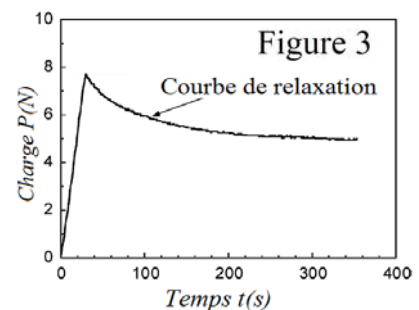
Les constantes B et D sont déterminées expérimentalement. B est assez proche de la valeur obtenue par la modélisation faite au point 1). La constante D représente la complaisance à longueur de fissure nulle, qui est très faible devant le terme Bc d'un échantillon fissuré.

Nous allons maintenant appliquer la technique de Double Torsion à l'étude de la propagation lente de fissures dans un matériau caractérisé par une énergie de fracture $G_c(V)$ dépendante de la vitesse de propagation V de la fissure.

En s'appuyant sur l'équation (2) décrire pour chacun des chargements suivants comment obtenir des points expérimentaux de la courbe $G_c(V)$:

6) *Technique à charge constante.* La force P est maintenue constante et on mesure le temps nécessaire pour que la fracture parcourt l'échantillon entier.

7) *Technique à déplacement constant (relaxation de charge).* On induit dans un échantillon une pré-fissure de longueur c_i . On effectue une rampe rapide de chargement jusqu'à une valeur de déplacement δ correspondant à une charge P_i et ensuite on maintient le déplacement δ constant et on mesure (uniquement) la courbe de relaxation de la charge $P(t)$ induite par l'avancée de la fissure $c(t)$ (non mesurée). Voir l'exemple en Figure 3.



8) *Technique à vitesse de déplacement constante.* On impose une vitesse de déplacement $\dot{\delta}$ et on attend que la charge atteigne un plateau P où l'augmentation liée à l'incrément du déplacement est compensée par la relaxation induite par la croissance de la fissure.