

# Examen de Mécanique des Solides et des Matériaux

*Examen du 18 Février 2014 : 9h30-12h00*

*Promotion 131*

**La durée totale de l'examen (partie A et partie B) est de 2h30.**

**PARTIE A**            *Ecrivez lisiblement votre nom sur chaque copie*

**Durée : 30 minutes.** Les copies seront ramassées à la fin de la partie A.

La **partie A** se compose d'un QCM.

**Attention :** une seule réponse valable par question

**Documents :**

Aucun document n'est autorisé dans la partie A et pas de calculatrice.

**PARTIE B**            *Ecrivez lisiblement votre nom sur chaque copie*

**Durée :** la durée de la partie **B** est de **2h**

La **partie B** se compose de deux problèmes traitant respectivement sur l'atténuation viscoélastique et la plasticité en pointe de fissure.

**Documents :**

Une feuille A4 manuscrite et signée comportant un résumé des formules et concepts essentiels.

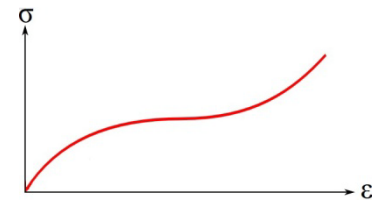
NOM :  
Prénom :

Partie A – QCM

Promotion 131

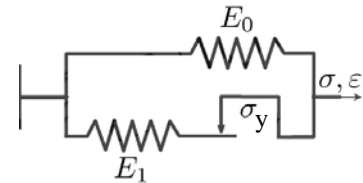
1. La courbe de comportement en traction uniaxiale monotone suivante permet de conclure que le matériau a un comportement de type :

- Elastique
- Elasto-plastique
- Visco-élastique
- On ne peut pas tirer des conclusions

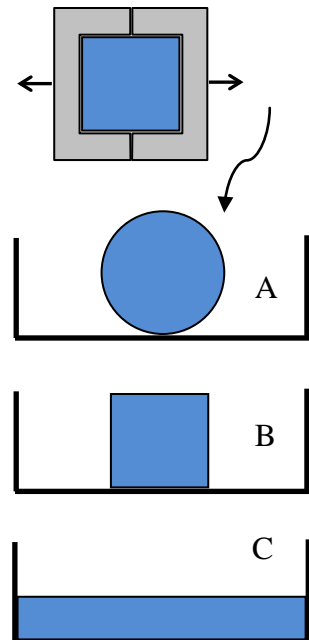


2. Quel est le module élastique statique en petite déformation du modèle rhéologique suivant :

- $E_0$
- $E_0 + E_1$
- $E_1$
- On ne peut pas tirer des conclusions



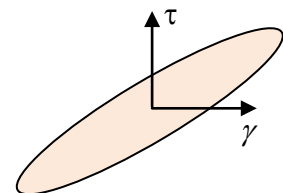
3. On prépare dans un moule un cube de taille  $L$  d'un matériau élastique de module  $E$ , densité  $\rho$ , et tension de surface  $\gamma$  (à interpréter comme dans les cas d'un liquide). Ensuite on le démoule, on le pose dans un récipient à fond plat lubrifié (glissement permis) et on observe le changement de forme. Associer chacune des 3 situations illustrées dans les figures A, B, C à une combinaison de critères fondés sur la comparaison entre la taille  $L$  du cube et l'une des longueurs physiques obtenues en comparant les énergies entre élastique, gravitaire et surfacique par paires.



- |      |                          |                                      |                          |                            |                            |                            |
|------|--------------------------|--------------------------------------|--------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| I.   | $L \gg \frac{\gamma}{E}$ | $L \gg \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}$ | $L \ll \frac{E}{\rho g}$ | <input type="checkbox"/> A | <input type="checkbox"/> B | <input type="checkbox"/> C |
| II.  | $L \gg \frac{\gamma}{E}$ | $L \gg \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}$ | $L \gg \frac{E}{\rho g}$ | <input type="checkbox"/> A | <input type="checkbox"/> B | <input type="checkbox"/> C |
| III. | $L \ll \frac{\gamma}{E}$ | $L \ll \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}$ | $L \ll \frac{E}{\rho g}$ | <input type="checkbox"/> A | <input type="checkbox"/> B | <input type="checkbox"/> C |

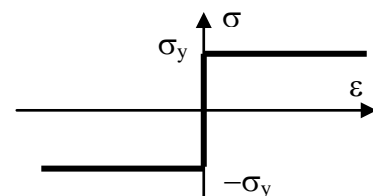
4. L'aire de la courbe contrainte-déformation relative à un test cyclique nous renseigne sur :

- Le module de stockage
- L'énergie dissipée
- La nature fluide ou solide du matériau
- La densité volumique d'énergie dissipée



5. La courbe de comportement illustrée correspond à un matériau :

- Ductile
- Ecrouissant
- Fragile
- Complaisant



NOM :  
Prénom :

Partie B

Examen MSM2 – 18/02/2014 - Promotion 131

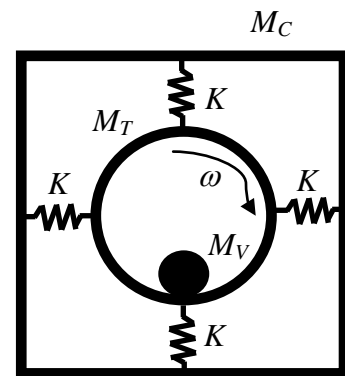
### Problème 1 : Domptage d'un lave-linge

Quand le lave-linge n'est pas très plein, les vêtements mouillés finissent par s'accumuler sur un côté du tambour en rotation, et au moment de la centrifugation finale (pouvant atteindre une vitesse de  $f_C = 1200$  tours/minute) l'excentricité effective du tambour conduit à des soubresauts capables de faire déplacer le lave-linge dans la salle de bain, ou alors à du tapage bruyant contre les autres meubles. L'exercice présente visuellement la conception de plots amortisseurs fondés sur la dissipation viscoélastique, destinés à être entreposés entre les pieds du lave-linge et le sol pour limiter la dérive du lave-linge, ainsi que la nuisance sonore et l'usure des pièces par fatigue cyclique.



#### Analyse de la sollicitation sans amortisseurs

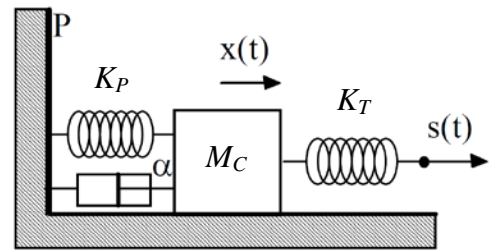
Le schéma mécanique idéalisé du lave-linge est représenté à côté. Le tambour en rotation (de masse  $M_T = 20$  kg) est connecté au châssis extérieur (de masse  $M_C = 40$  kg) par 4 gros ressorts très rigides (raideur  $K=15$  kN/m). On peut modéliser la charge des vêtements comme une masse  $M_V = 1$  kg à une distance moyenne  $R_T = 20$  cm de l'axe du tambour. La rotation rapide du tambour excentrique se fera naturellement autour du centre de masse commun (tambour + linge). L'axe du tambour effectuera donc une trajectoire circulaire à une distance  $S_0$  du centre de masse immobile.



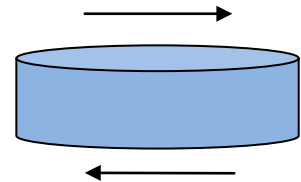
- 1) Déterminer la distance  $S_0$ , qu'on supposera invariante sous toute condition dynamique.
- 2) Déterminer l'amplitude de la force effective  $F_C$  que la rotation du tambour applique sur le châssis extérieur.
- 3) Déterminer la pulsation propre  $\omega_L$  du châssis en supposant qu'il puisse bouger librement.
- 4) Discuter l'éventualité de soubresauts dans les deux directions verticale et horizontale, admettant un coefficient de frottement statique  $\mu_C=0.6$  entre châssis et sol.

## Modélisation des oscillations du châssis en présence de plots amortisseurs

Pour amortir les oscillations du châssis on rajoute aux quatre pieds du lave-linge des plots amortisseurs en polymère viscoélastique de forme cylindrique avec diamètre de base  $D = 5$  cm et hauteur  $h = 1$  cm. Comme on a besoin d'une réponse à la fois complaisante et dissipative, on travaillera à la frontière entre le plateau caoutchoutique et le début de la zone de transition vitreuse. Le comportement du matériau peut alors être approché par un modèle rhéologique de Kelvin-Voigt, et l'ensemble des plots peut être représenté par le parallèle entre un ressort élastique de rigidité  $K_P$  et un amortisseur de loi  $F_A = -\alpha\dot{x}$ . On va se concentrer sur l'oscillation horizontale, qui est la plus limitante, et qu'on peut montrer être équivalente au schéma à droite.  $s(t)$  est le déplacement (imposé) de l'axe du tambour,  $K_T$  est le ressort équivalent qui relie l'axe du tambour au châssis,  $x(t)$  représente la position du châssis de masse  $M_C$ , et les deux éléments à gauche représentent l'ensemble des 4 plots qui relient le châssis au sol. Remarque : le même schéma pourrait décrire aussi l'oscillation verticale.



5) Déterminer les relations entre les grandeurs  $K_P$  et  $\alpha$  relatives à l'ensemble de 4 plots en cisaillement et les paramètres  $\mu_0$  et  $\eta$  du matériau (modèle de Kelvin-Voigt). Evaluer  $K_P$  dans le domaine caoutchoutique. Vérifier que la réponse des plots aux fréquences en jeu soit quasistatique.



6) Ecrire l'équation différentielle du mouvement horizontal  $x(t)$  du châssis. En déduire la nouvelle pulsation propre  $\omega_r$  du châssis et la force excitatrice  $F_C$  agissant sur le châssis.

7) Trouver le déplacement en régime permanent de la masse  $M_C$  et montrer que l'expression de son amplitude de vibration  $X_0$  en fonction de la pulsation  $\omega$  vaut (avec  $\beta = \alpha/M_C$ ) :

$$\frac{X_0}{S_0} = \frac{\omega_L^2}{\sqrt{(\omega_r^2 - \omega^2)^2 + \beta^2 \omega^2}}$$

8) Exprimer l'amplitude  $X_0$  des mouvements de la masse  $M_C$  à la résonance. Calculer le coefficient d'amortissement  $\alpha$  pour que telle amplitude soit égale à 1/10 de l'amplitude  $S_0$  du mouvement du tambour. Sur quels paramètres peut on jouer pour obtenir une telle valeur de  $\alpha$  ?

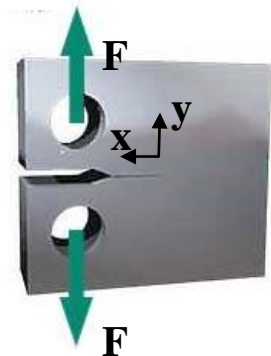
9) A partir de la relation pour la puissance dissipée :  $P_D = \frac{1}{2} \alpha \omega^2 X_0^2$ , estimer le taux d'augmentation de la température par unité de temps passé à la résonance. La capacité calorifique massique du caoutchouc est d'environ 2500 J/kg K. Discuter le résultat.

**Problème 2 : Fracture d'un matériau élasto-plastique – Fragilité ou ductilité ?****Taille de la zone plastique en pointe d'une fissure longue**

On considère un échantillon classique de test de rupture contenant une fissure majeure de longueur  $c$ , constitué d'un matériau à loi de comportement élastique de module d'Young  $E$ . La théorie de la mécanique de la fracture linéaire élastique nous dit qu'en proximité de la pointe de fissure le champ de contrainte prend la forme :

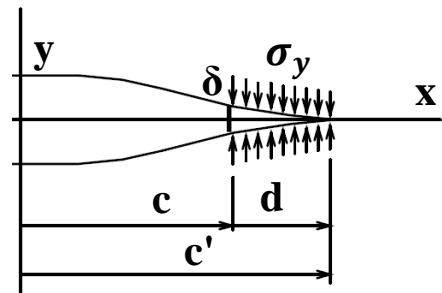
$$\sigma \sim \frac{K_{Ext}}{\sqrt{r}}$$

où  $r$  est la distance à la pointe de fissure et  $K_{Ext}$  est le facteur d'intensité de contrainte, proportionnel à chargement extérieur macroscopique  $F$ . Toutes les questions du problème seront à traiter en loi d'échelle.



1) Déterminer en loi d'échelle la forme du profil d'ouverture  $u_y$  de la fissure (initialement plate).

2) Considérons à présent un matériau qui suit une loi de comportement élasto-plastique parfaite (module d'Young  $E$ , seuil de plasticité  $\sigma_Y$ ). Dans le cadre de l'approximation de petites déformations plastiques, déterminer l'ordre de grandeur de la taille  $d$  de la région plastifiée en pointe de fissure, qu'on supposera petite devant la longueur de fissure  $c$ , ainsi que la valeur typique de la contrainte dans cette région. Conseil : on négligera les variations du champ de contrainte dans les régions qui restent élastiques.



3) Une deuxième étape de modélisation consiste à considérer que la vraie pointe de fissure se trouve à une position  $c' = c + d$  ( $d \ll c$ ), et que la région entre  $c$  et  $c'$  soit soumise à un champ de contraintes de traction interne constant et égal à  $\sigma_Y$ . La nouvelle pointe de fissure se trouve alors soumise à la superposition du champ de contrainte macroscopique représenté par  $K_{Ext}$ , et du champ de contrainte induit par la distribution de contraintes internes, qui donnera en pointe de fissure une contribution identifiée par  $K_{Int}$ . Comme la nouvelle pointe à la position  $c'$  se trouve dans un point intérieur au matériau, la contrainte ne peut pas être infinie à ce point, et on doit donc avoir  $K_{Tip} \sim K_{Int} + K_{Ext} \sim 0$ . Exprimer la valeur de  $K_{Int}$ , et justifier son expression par des arguments dimensionnels ou par analogie avec l'expression de  $K_{Ext}$  pour un crack de Griffith. Conseil : Considérer les deux situations où  $c = \infty$  ou  $d = c$ .

4) En faisant l'approximation que le profil d'ouverture de la fissure dans la zone extérieure à la zone plastique ( $x > d$ ) ne soit pas fortement altéré par la présence de la zone plastique, estimer l'ordre de grandeur de l'ouverture  $\delta$  à la fin de la zone plastique.

5) En utilisant le même échantillon de test, on mesure la ténacité du matériau et on obtient sa valeur  $K_C$ . Exprimer la valeur maximale de la taille de la zone plastifiée  $d_{max}$  et de l'ouverture  $\delta_{max}$ .

6) En se fondant sur l'équivalence entre  $K$  et  $G$  (taux de restitution de l'énergie) exprimer l'énergie de fracture  $G_C$  en fonction de  $\sigma_Y$  et  $\delta_{max}$ . Commenter le résultat.

### Taille de la zone plastique en pointe d'une fissure courte

On considère maintenant un échantillon sans préfissure majeure, constitué du même matériau élasto-plastique, et conçu pour un essai de traction uniaxiale afin d'étudier la loi de comportement du matériau. On supposera la présence d'une microfissure de longueur  $2c$  dans une position quelconque à l'intérieur de la région centrale de section  $S$ . On supposera que la fissure est perpendiculaire à la direction de la traction uniaxiale  $\sigma_0 = F/S$ , et on traitera pour simplifier le problème en deux dimensions.

7) En supposant initialement que la taille  $d$  de la zone plastique développée au deux extrémités de la microfissure soit petite par rapport à la taille  $2c$  de la fissure, exprimer le facteur d'intensité de contrainte agissant sur les deux lèvres de fissure et la charge maximale  $\sigma_{max}$  supportée par l'échantillon avant rupture.

8) Exprimer la condition à respecter pour que l'approximation  $d \ll c$  reste valide jusqu'à rupture.

9) Bien que les approximations effectuées ne permettent pas de traiter le cas  $c < d_{max}$ , interpréter le comportement qu'aurait l'échantillon pendant un chargement jusqu'à  $\sigma_{max}$ .

10) Estimer la conséquence de la présence de microdéfauts de taille typique  $c \sim 1 \mu\text{m}$  dans les deux matériaux suivants :

- a) Verre de silice :  $E = 70 \text{ GPa}$ ,  $\sigma_Y = 10 \text{ GPa}$ ,  $K_C = 0.7 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$
- b) Acier :  $E = 180 \text{ GPa}$ ,  $\sigma_Y = 1.2 \text{ GPa}$ ,  $K_C = 85 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$

