

Examen de Mécanique des Solides et des Matériaux 2

Examen du 20 Février 2015 : 9h30-12h00

Promotion 132

La durée totale de l'examen (partie A et partie B) est de 2h30.

PARTIE A *Ecrivez lisiblement votre nom sur chaque copie*

Durée : 30 minutes. Les copies seront ramassées à la fin de la partie A.

La **partie A** se compose d'un QCM.

Attention : une seule réponse valable par question

Documents :

Aucun document n'est autorisé dans la partie A et pas de calculatrice.

PARTIE B *Ecrivez lisiblement votre nom sur chaque copie*

Durée : la durée de la partie **B** est de **2h**

La **partie B** se compose de deux problèmes traitant respectivement l'atténuation viscoélastique et le délaminage d'une couche sous pression.

Documents :

Une feuille A4 manuscrite et signée comportant un résumé des formules et concepts essentiels.

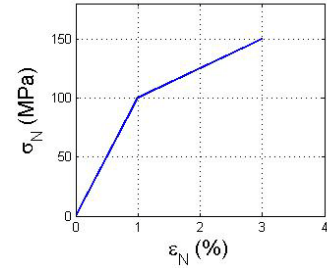
NOM :
Prénom :

Partie A – QCM

Examen MSM2 – 20/02/2015 - Promotion 132

Attention : une seule réponse valable par question

1. Un cube de côté $L = 10$ cm constitué d'un matériau élasto-plastique suivant la loi de comportement en figure, subit une traction uniaxiale jusqu'au point de rupture à $\varepsilon_R = 3\%$.



I. Quelle est l'énergie élastique stockée dans le cube à l'instant qui précède la rupture ?

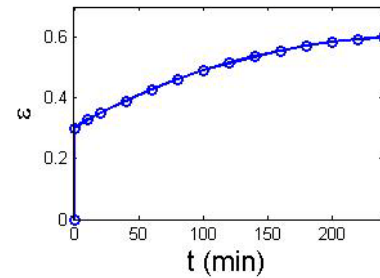
- 500 J 1.1 MPa 1.1 kJ 3 MJ/m³

II. Représenter sur le graphique l'estimation effectuée.

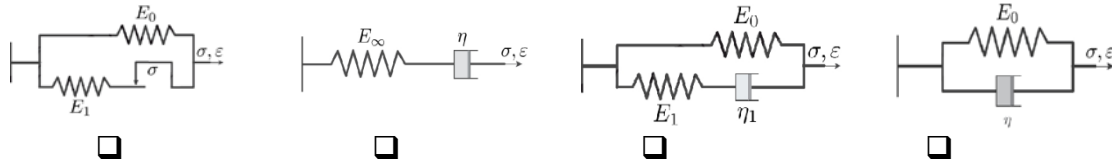
2. Quel des critères suivants décrit l'initiation d'une fissure dans un matériau **non fissuré** ?

- $(\sigma_1 - \sigma_3)/2 \geq k$
 $K \geq K_c$
 $\sigma_1 \geq \sigma_R$
 $G \geq G_c$

3. On réalise un essai de fluage sur une fibre de polymère. Une contrainte de traction constante de 15 MPa est appliquée. La déformation du matériau est enregistrée à différents instants après la mise en charge, voir les données dans la figure à droite.



I. Identifier le modèle rhéologique compatible avec la mesure.

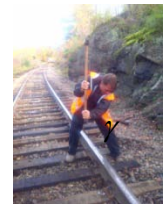


II. On réalise par la suite un essai de cyclage comportant l'application d'une contrainte constante de 15 MPa au temps $t=0$ et le retour à une contrainte nulle au temps $t=100$ min. Quelle est la nature de la déformation au temps $t=200$ min :

- Contraction Déformation nulle Extension On ne peut rien dire

III. Représenter sur le graphique l'estimation effectuée.

4. Un long rail en metal est percuté au marteau à l'instant $t = 0$ pour inspecter son intégrité structurale. On assimile le rail à une barre libre de section carrée, avec hauteur h très inférieure à la longueur L . On nomme c_L et c_B les vitesses de propagation des ondes longitudinales et de flexion respectivement (avec $c_L > c_B$). Associer le mode d'onde prédominant aux échelles temporelles indiquées :



- | | | | |
|----------------------------------------------|--------------------------|-----------------------------------------|--------------------------|
| | $t \ll \frac{h}{c_L}$ | $\frac{h}{c_L} \ll t \ll \frac{L}{c_B}$ | $t \gg \frac{L}{c_B}$ |
| I. Propagation onde de flexion | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| II. Propagation onde longitudinale de volume | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| III. Mode propre de vibration en flexion | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

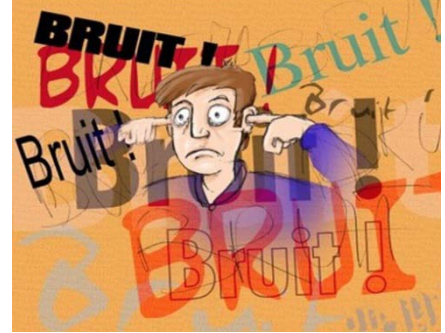
NOM :
Prénom :

Partie B

Examen MSM2 – 20/02/2015 - Promotion 132

Problème 1 : Un peu de paix pour nos oreilles...

Les matériaux viscoélastiques sont très utilisés pour atténuer le bruit et les vibrations, grâce à leur capacité de dissiper l'énergie mécanique en chaleur. Aujourd'hui dans une automobile on peut en trouver une trentaine de kilos, en particulier dans les tôles sandwich de la carrosserie (portières, plafond, coffre). Ils sont aussi très employés dans l'aéronautique, l'habitat et l'électroménager.

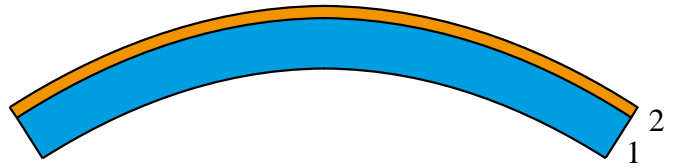


L'émission de bruit est particulièrement efficace au niveau de la vibration des plaques et coques de la structure. La stratégie la plus simple à mettre en œuvre pour réduire l'amplitude des vibrations est de coller une couche viscoélastique sur toute l'extension de la plaque.

Une deuxième stratégie, moins simple mais plus efficace, est d'insérer la couche viscoélastique en sandwich entre deux plaques du matériau rigide. Le but du problème est de modéliser et comparer la capacité d'atténuation des deux types d'assemblages.

Efficacité d'un revêtement antivibratoire

On considère la vibration en flexion simple d'une bicouche obtenue en collant sur une plaque élastique d'aluminium (épaisseur $H_1 \sim 10$ mm, longueur $L \sim 1$ m, largeur $b \sim 1$ m, module d'Young $E_1 \sim 70$ GPa) une couche de polymère mou et viscoélastique (épaisseur $H_2 \sim 1$ mm $\ll H_1$, mêmes dimensions latérales que la plaque). La réponse viscoélastique de la couche polymère à la fréquence de résonance f de l'assemblage bicouche est caractérisée par ses modules complexes E_2' et E_2'' , où le module de stockage $E_2' \sim 10$ MPa $\ll E_1$ est très faible, et le facteur de perte $\tan \delta_2 = E_2''/E_2' = 0.1$ est très grand. Dans tout l'exercice on assumera qu'il n'y ait pas de décollement ni de glissement à l'interface aluminium/polymère.



On fera les calculs en loi d'échelle.

1) En supposant une vibration élémentaire de la plaque bicouche en flexion simple (profil de flexion en arc de cercle), dont l'amplitude est caractérisée par un rayon de courbure R , déterminer la nature des déformations de la plaque et de la couche viscoélastique. Estimer les valeurs typiques ε_1 et ε_2 .

2) En se fondant sur le principe de correspondance et sur la notion de modules complexes, estimer les énergies élastiques U_1^{stock} et U_2^{stock} stockées respectivement dans la plaque et dans la couche pendant l'oscillation.

3) Estimer l'ordre de grandeur de l'énergie dissipée dans la bicouche U_{bc}^{diss} dans une oscillation.

4) Montrer que l'ordre de grandeur du facteur de perte $\tan \delta_{bc}$ de l'assemblage bicouche peut être exprimé comme :

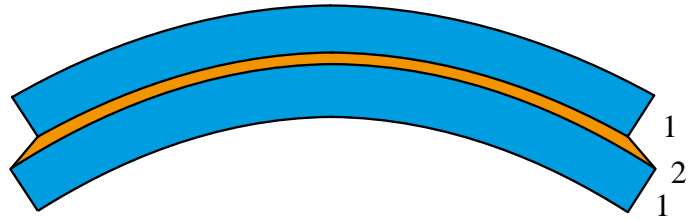
$$\tan \delta_{bc} = \frac{U_{bc}^{diss}}{U_{bc}^{stock}} \sim \tan \delta_2 \frac{g_{bc}}{1 + g_{bc}} \quad \text{avec} \quad g_{bc} = \frac{E'_2 H_2}{E_1 H_1}$$

5) Estimer l'ordre de grandeur de $\tan \delta_{bc}$ et commenter le résultat.

6) Sur quels paramètres peut on jouer pour augmenter l'atténuation ? Est-ce que c'est envisageable ?

Plutôt une couche sandwich ?

On considère maintenant la vibration d'un assemblage sandwich, obtenu en entreposant une couche du polymère viscoélastique entre deux plaques rigides. Lors de la vibration en flexion simple de l'assemblage sandwich, la sollicitation de la couche viscoélastique est profondément différente, comme illustré dans la figure. On rappelle qu'il n'y a pas de décollement ni de glissement aux interfaces. Tous les symboles, les matériaux et les dimensions restent les mêmes que dans l'exercice sur l'assemblage bicouche. L'épaisseur et le matériau de la deuxième plaque élastique seront supposés être identiques à ceux de la première.



7) En supposant que pendant la vibration la déformation des deux plaques élastiques reste une flexion simple avec le même rayon de courbure R , déterminer la nature de la déformation de la couche viscoélastique. Estimer les valeurs typiques ε_1 et ε_2 .

8) Répéter la même procédure d'analyse que pour l'assemblage bicouche (en détaillant chaque étape) et montrer que le facteur de perte $\tan \delta_{sw}$ de l'assemblage sandwich peut s'exprimer dans la même forme, mais avec une expression différente pour la fonction g_{sw} :

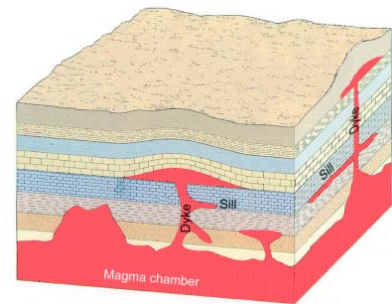
$$\tan \delta_{sw} \sim \tan \delta_2 \frac{g_{sw}}{1 + g_{sw}} \quad g_{sw} = \frac{\mu'_2 L^2}{E_1 H_1 H_2}$$

où $\mu'_2 = E'_2/3$ est le module de cisaillement de la couche viscoélastique (le polymère mou étant incompressible), et L est la longueur de la plaque.

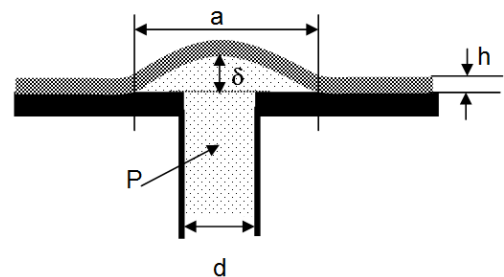
9) Estimer la valeur numérique de $\tan \delta_{sw}$ pour une plaque de longueur $L = 1$ m. Commenter le résultat et discuter de l'efficacité relative des deux assemblages (bicouche et sandwich).

Problème 2 : La dure montée d'une colonne de magma

Avant d'atteindre la surface terrestre pour engendrer une éruption volcanique, le magma doit remonter à partir d'une chambre magmatique soumise à une pression colossale, en se frayant un chemin à travers les couches de roche de la croûte terrestre. L'avancée du magma se fait en alternant l'ouverture de fissures verticales (dyke) qui traversent les couches à des phases de propagation horizontale par fracturation de l'interface faible entre deux couches de roche.

**Délaminage d'une couche sous pression**

Pour modéliser les conditions de propagation horizontale d'une fissure pressurisée entre deux couches de roche, on étudie la situation simplifiée indiquée sur la figure ci contre. On considère une couche élastique d'épaisseur h et module élastique E , collée sur un substrat rigide présentant une ouverture de diamètre d qui contient un fluide à la pression P . On supposera que la fissuration interfaciale soit déjà initiée et qu'elle présente une longueur a grande par rapport à l'épaisseur h et au diamètre d . On nommera Γ l'énergie de fracture interfaciale qu'on traitera comme une énergie d'adhésion de Dupré (réversible). On traitera le problème en deux dimensions (symétrie de translation selon la direction perpendiculaire à la figure).



Les calculs sont à effectuer en loi d'échelle.

- 1) Décrire qualitativement la nature des déformations dans la partie décollée de la couche (éventuellement plusieurs modes en superposition).
- 2) Montrer qu'indépendamment de la forme précise du profil de flexion, l'énergie de flexion est dominante tant que la flèche δ de la cloque reste petite devant l'épaisseur h (ce que l'on vérifiera ensuite). Justifier qu'en conséquence le profil d'équilibre prendra une forme de cosinus.
- 3) Estimer le travail exercé par la pression P en fonction de a et δ .
- 4) Trouver la flèche δ de la cloque à l'équilibre par minimisation de l'énergie potentielle à longueur de fissure a constante.
- 5) Ecrire l'énergie de surface en fonction de la longueur de fissure a .
- 6) Représenter schématiquement sur un graphique l'énergie potentielle totale, l'énergie de surface, ainsi que leur somme pour une pression P donnée. Suggestion : se souvenir que le travail effectué pour charger une structure élastique à force constante équivaut au double de l'énergie élastique. Indiquer sur le diagramme la position d'équilibre, et discuter de sa stabilité.
- 7) Ecrire le taux de restitution de l'énergie G par rapport à l'avancée de la fissure à pression P constante.

8) Calculer la relation entre la pression critique P_c et la longueur de fissure a au point d'équilibre et vérifier que la condition de stabilité sur G soit cohérente avec les conclusions de la méthode graphique de la question 6.

9) On considère l'application numérique pour la croûte terrestre. Les roches de la croûte ont un module élastique de l'ordre de $E = 100$ GPa et une énergie de fracture interfaciale de l'ordre de $\Gamma = 10$ J/m². Considérant une couche d'épaisseur $h = 1$ km, décollée sur une longueur initiale $a = 10$ km, estimer la pression critique P_c du magma qui induirait l'extension de la fracture, ainsi que la flèche δ_c correspondante.

10) Au vu des ordres de grandeurs estimés, discuter de la validité du modèle pour décrire la propagation du magma entre deux couches de roche (NB : on rappelle que 1 bar = 10⁵ Pa). Quel paramètre physique a-t-on oublié dans le modèle ?