

TEMPS FRÉQUENCE STABILITÉ.

PREMIÈRE ANNÉE DE L'ESPCI

JÉRÔME LUCAS

5 octobre 2018

Ce polycopié du cours d'électronique de l'ESPCI réalisé avec $\text{\LaTeX}2_{\epsilon}$ est mis à votre disposition sous la licence ouverte conçue par Etalab.



LICENCE OUVERTE

OPEN LICENCE

www.etalab.gouv.fr/wp-content/uploads/2014/05/Licence_Ouverte.pdf

www.etalab.gouv.fr/wp-content/uploads/2014/05/Open_Licence.pdf

Table des matières

1	De la série de Fourier à la transformée de Laplace	6
1.1	Transformée de Fourier	7
1.2	Distribution de Dirac	8
1.3	Systèmes Linéaires et Invariants dans le temps (SLI)	10
1.3.1	Définition	10
1.3.2	Réponse impulsionnelle et produit de convolution	11
1.3.3	Réponse fréquentielle et produit de convolution	12
1.4	Transformée de Laplace	13
1.4.1	Définition	14
1.4.2	Propriétés	15
1.4.3	Utilisation pratique : systèmes du premier ordre	17
1.4.4	Utilisation pratique : systèmes du deuxième ordre ; forme canonique.	20
1.4.5	Réponses des systèmes du deuxième ordre.	22
1.4.6	Systèmes d'ordre quelconque.	26
2	Stabilité	27
2.1	Définitions	27
2.2	Pôles de la fonction de transfert et stabilité.	27
2.3	Stabilité des systèmes associés	28
2.3.1	Association de systèmes	28
2.3.2	Stabilité des associations de systèmes.	29
2.4	Critère de Routh	30
2.5	Critère de Nyquist	31
2.5.1	Théorème de Cauchy	31
2.5.2	Application à la stabilité d'un SLI bouclé.	32
2.5.3	Exemples	34
2.5.4	Cas particulier des fonctions de transfert en boucle ouverte stables au sens large.	35
2.6	Critère du revers	35
2.7	Marges de Gain, Marge de phase	36
2.7.1	Marges de gain et de phase dans le plan de Nyquist	36
2.7.2	Marges de gain et de phase dans le diagramme de Bode	37
2.7.3	Plan de Black et abaque de Black-Nichols	37
3	Tables & Annexes	40
3.1	Propriétés principales de la transformation de Fourier \mathcal{F} et relations associées	40
3.2	Propriétés principales de la transformation de Laplace \mathcal{L} et relations associées	43
3.3	Table des réponses temporelles et diagrammes de Bode de quelques fonctions de transfert usuelles.	45
3.4	L'Algorithme FFT de calcul de la DFT et relation avec la TF.	46
3.5	Discrétisation de la transformée de Fourier.	50

1 De la série de Fourier à la transformée de Laplace

Les séries de Fourier ont été introduites en 1822 par Joseph Fourier pour résoudre les équations de la chaleur.

On a souvent affaire en physique, et en particulier en électronique à des phénomènes périodiques dans le temps et/ou l'espace. De même de nombreux phénomènes sont décrits par des équations différentielles du 2^{ème} ordre comme l'équation 1 qui décrit la variation des charges q dans le condensateur d'un circuit RLC série (Figure 1).

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = V(t) \quad (1)$$

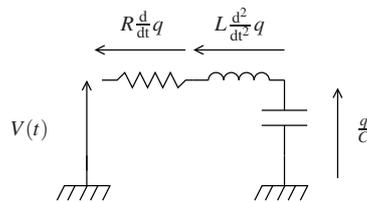


FIGURE 1 – Variation des charges dans un circuit RLC série.

On sait que l'on trouve la solution de ce type d'équation, en ajoutant à la solution générale de l'équation sans 2^{ème} membre une solution particulière de l'équation avec 2^{ème} membre. Lorsque $V(t) = \sin(\omega t)$ par exemple, on cherche une solution générale de la forme $q(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$. Lorsque $V(t)$ est plus compliqué, comme un signal créneau ou en dent de scie, c'est moins simple. Si le signal peut être décomposé en somme de fonctions trigonométriques, avec la linéarité de l'équation 1, la solution s'exprime encore facilement en traitant individuellement le cas de chaque terme de la décomposition.

L'objectif de Fourier avec les séries qui portent son nom était de décrire $V(t)$, ou de façon générale tout signal $s(t)$ comme combinaison linéaire des fonctions trigonométriques sinus et cosinus : $s(t) = \sum_n (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t))$.

Si l'on considère l'expression précédente, il est évident que $s(t)$ admet $T = \frac{2\pi}{\omega}$ comme période. Il est aussi évident que les fonctions sinus et cosinus étant continues et infiniment dérivables, $s(t)$ l'est aussi. Ce type de décomposition ne permet donc pas de décrire avec une somme finie un signal créneau par exemple qui n'est pas dérivable au sens des fonctions. Par un passage à la limite et avec entre autre des considérations de produit scalaire sur l'espace des fonctions périodiques, il est possible de montrer que tout signal périodique "non pathologique", en particulier sans point singulier, autrement dit tout signal périodique de période $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$, couramment rencontré en physique, peut être approché par la limite d'une série de Fourier.

$$s(t) = \langle s(\bar{t}) \rangle + \sum_1^{+\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t) \quad (2)$$

avec

$$\langle s(\bar{t}) \rangle = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} s(t) dt \quad (3)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} s(t) \cos(n\omega_0 t) dt \quad (4)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} s(t) \sin(n\omega_0 t) dt \quad (5)$$

ω_0 est appelée pulsation fondamentale de $s(t)$.

Dans cette décomposition, on voit que l'on fait apparaître séparément, des autres coefficients, la valeur moyenne dans le temps $\langle s(\bar{t}) \rangle$ qui correspond à la composante continue du signal. Les coefficients a_n et b_n correspondent à la projection de $s(t)$ sur les fonctions sinus et cosinus qui forment ainsi une base de l'espace vectoriel des fonctions périodiques.

L'expression de l'équation 2 est non symétrique en terme d'intervalle de sommation et fait un cas particulier de la valeur moyenne. Il est intéressant de la rendre plus symétrique à l'aide des exponentielles complexes :

$$\begin{cases} \cos(n\omega_0 t) &= \frac{e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}}{2} \\ \sin(n\omega_0 t) &= \frac{e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}}{2j} \end{cases} \quad (6)$$

On peut remarquer tous de suite que l'on fait apparaître des termes en fréquences négatives : $-jn\omega_0 t$ et positives $+jn\omega_0 t$. En ordonnant l'expression de $s(t)$ en fonctions de ces fréquences positives et négatives, on peut alors exprimer $s(t)$ sous la forme :

$$s(t) = \langle s(\bar{t}) \rangle + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n e^{jn\omega_0 t} + B_n e^{-jn\omega_0 t} \quad (7)$$

Par identification avec l'équation 2, il vient :

$$\begin{cases} A_n &= \frac{1}{2} [a_n - jb_n] \\ B_n &= \frac{1}{2} [a_n + jb_n] \end{cases} \quad (8)$$

Remarque 1 : Les fréquences négatives que l'on fait apparaître n'ont pas de sens indépendamment de leur dual positif. Ce n'est pas le cas des fréquences positives qui elles ont un sens intrinsèque.

Remarque 2 : En considérant le système d'équation 8, on remarque que : $A_n = B_n^*$, où * dénote le complexe conjugué. La décomposition d'un signal $s(t)$ en fréquences positives et négatives (spectre au sens de Fourier) est pair pour les fréquences positives et impair pour fréquences négatives. Ce résultat très général est à retenir.

Finalement en calculant A_n et B_n à l'aide de 4, 5 et 6, il vient :

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} \quad (9)$$

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} s(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (10)$$

Remarque 3 : Il est notable que, bien que les coefficients C_n soient en général complexes avec $C_n = C_{-n}^*$, $s(t)$ qui est une somme de quantités complexes est purement réelle.

1.1 Transformée de Fourier

Le résultat précédent quoique essentiel est limité aux signaux périodiques. Ce n'est pas toujours le cas. En électronique en particulier, il n'est pas rare par exemple d'exciter un circuit avec un pulse temporel. On aimerait pouvoir généraliser l'expression 9 à tous types de signaux. Cela revient à écrire tout signal $s(t)$ comme une somme, éventuellement continue, d'exponentielles complexes :

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (11)$$

ou bien en fréquence en changeant de variable :

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu \quad (12)$$

On préférera dans ce document la deuxième expression (équation 12).

Il reste à déterminer $S(\nu)$.

Si le signal n'est pas périodique, il ne peut être en pratique mesuré que sur un intervalle de temps limité T . Il est alors possible de le périodiser en répétant le motif connu du signal (intervalle de connaissance) comme c'est présenté dans la Figure 2.

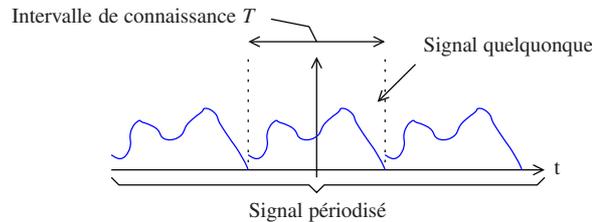


FIGURE 2 – Périodisation d'un signal quelconque à partir d'un intervalle de connaissance .

On obtient alors un nouveau signal de période T qui se décompose donc en série de Fourier.

Remarque 1 : Il est toujours possible, par la pensée en tout cas, d'augmenter T . Si on considère l'équation 9, cela revient à diminuer la pulsation fondamentale ω_0 . On se rapproche ainsi de la somme continue souhaitée en diminuant le pas fréquentiel (ω_0) tout en se rapprochant de $s(t)$.

Remarque 2 : Dans la décomposition en séries de Fourier, les coefficients C_n sont de la dimension de $s(t)$. En revanche, en considérant l'équation 12, on voit que $S(\nu)$ a pour dimension Temps \times dimension du signal, pour que l'intégrale ait la dimension du signal. Le coefficient $\frac{1}{T}$ présent dans la définition des coefficients C_n est celui qui leur donne la dimension du signal puisque l'intégrale est homogène au signal multiplié par le temps.

Compte tenu de ces remarques, on a envie d'omettre le terme $\frac{1}{T}$ et de faire tendre T vers l'infini dans l'équation 10. On pose donc :

$$s(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-i2\pi\nu t} dt \quad (13)$$

ce qui est une des définitions classiques de la transformée de Fourier (TF). On vérifie que la transformée de Fourier a bien pour dimension Temps \times dimension du signal.

La transformée de Fourier est moins générale que la transformée de Laplace que nous allons introduire dans la suite. Cependant elle présente l'avantage de toujours pouvoir être approchée numériquement grâce à l'algorithme FFT qui permet d'en calculer sa version discrétisée (CF Section 3.4).

Les principales propriétés de la TF sont présentée section 3.1

1.2 Distribution de Dirac

Pour un physicien ou électronicien, l'introduction de la transformée de Fourier conduit naturellement à la distribution de Dirac. En effet, on aimerait retrouver avec la transformée de Fourier un spectre comportant une raie aux pulsations $+\omega$ et $-\omega$ pour la TF de $\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}(e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t})$. C'est-à-dire, que l'on cherche une entité mathématique $E(\omega)$ qui soit

solution de l'intégrale : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{t(\omega-\omega_0)} dt$ qui n'a pas de solution dans l'espace des fonctions (elle diverge pour $\omega = \omega_0$ et est nulle en partie principale pour les autres valeurs) et telle que (transformation inverse) : $\int_{-\infty}^{+\infty} E(\omega_0) e^{i\omega t} dt = e^{i\omega_0 t}$.

On a souvent besoin en physique d'un tel objet : nul presque partout sauf en une valeur. On ne peut pas simplement prendre une fonction qui vaut zéro partout et 1 en un point, car elle ne présente pas certaines propriétés essentielles. Elle n'est ni intégrable ni dérivable dans l'espace des fonctions par exemple.

Pour résoudre ce problème, on définit en mathématique une extension de la notion de fonction : les distributions.

De façon générale, les distributions ne sont pas définies de façon explicite comme les fonctions, mais par leur propriétés (leur mesure du point de vue de la physique). Nul besoin pour utiliser les distributions de comprendre leur construction mathématique rigoureuse et compliquée. Par contre, il faut s'en faire une idée pour pouvoir les manipuler.

Définition

— On peut définir la distribution de Dirac notée $\delta_{x_0}(x) = \delta(x - x_0)$ ou simplement $\delta(x)$ si elle est centrée en zéro, comme étant l'objet mathématique tel que pour toute fonction analytique (sympathique) $f(x)$, c'est-à-dire physique en ce qui nous concerne,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) f(x) dx = f(x_0) \tag{14}$$

— La distribution de Dirac peut aussi être approchée comme la limite de suite de fonctions. Ainsi en considérant l'équation 14 appliqué à la fonction $f(x)$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 1$, on obtient une des propriétés fondamentales de la distribution de Dirac :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1 \tag{15}$$

En terme de physicien, l'aire de la distribution de Dirac vaut 1. On peut se faire une image de la distribution de Dirac comme étant la limite de la fonction triangle $T_a(x)$ de largeur a et de hauteur $\frac{1}{a}$ quand a tend vers zéro. Elle est définie par l'équation 16 et représentée figure 3.

$$T_a(x) = \begin{cases} \frac{1}{a^2}x + \frac{1}{a} & -a \leq x \leq 0 \\ -\frac{1}{a^2}x + \frac{1}{a} & 0 < x \leq a \\ 0 & |x| > a \end{cases} \tag{16}$$

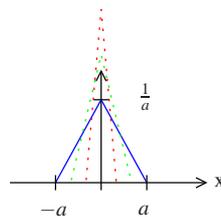


FIGURE 3 – Famille de fonction Triangle $T_a(x)$

Remarque : On aurait tout aussi bien pu prendre la famille de fonctions portes de largeur a et de hauteur $\frac{1}{a}$.

— On peut aussi la définir comme étant la dérivée de la fonction échelon $U(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$ comme illustré figure 4 :

$$U'(x) = \delta(x) \quad (17)$$

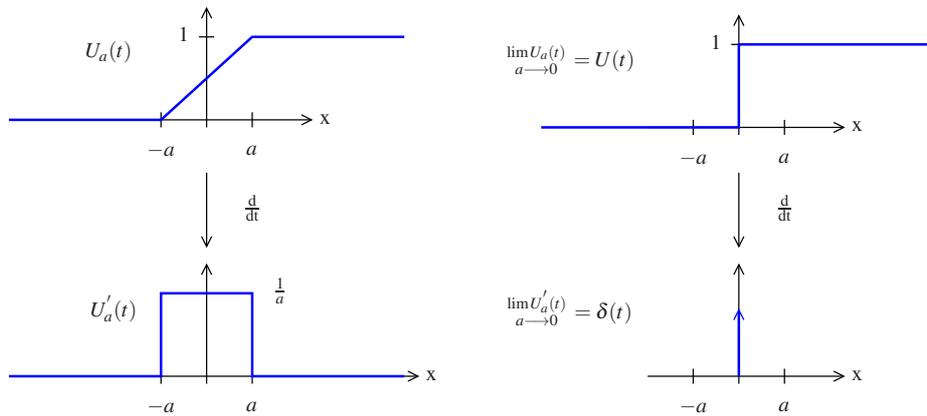


FIGURE 4 – $\delta(t)$ approché comme la dérivée de l'échelon

1.3 Systèmes Linéaires et Invariants dans le temps (SLI)

La transformée de Fourier est une opération linéaire (cf. section 3.1). En cela elle est bien adaptée à l'étude des systèmes linéaires.

1.3.1 Définition

Un **Système** linéaire est un 'truc' physique défini par au moins une entrée et une sortie. La figure 5 illustre ce concept. Dans cette figure le système peut être par exemple soit un circuit électronique pour lequel on est habitué à définir une entrée et une sortie, soit une cloche pour laquelle l'entrée est une excitation mécanique, et la sortie un son.

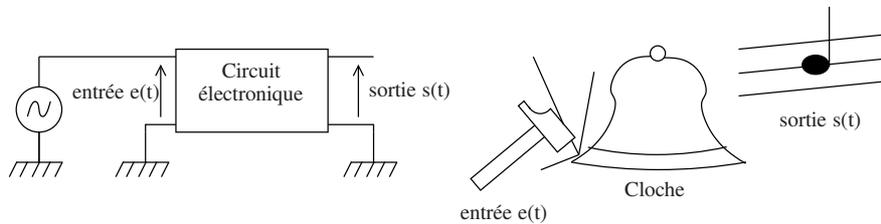


FIGURE 5 – Système physique

Linéaire a le même sens qu'en mathématique. Si on considère deux entrées $e_1(t)$ et $e_2(t)$ qui appliquées tour à tour à un système donnent lieu aux deux signaux de sortie $s_1(t)$ et $s_2(t)$, alors l'excitation du système par le stimulus $a.e_1(t) + b.e_2(t)$ donne lieu au signal de sortie $a.s_1(t) + b.s_2(t)$. Ce que l'on résume par :

$$\text{Pour } \begin{cases} e_1(t) \rightarrow s_1(t) \\ e_2(t) \rightarrow s_2(t) \end{cases} \quad \text{alors } \forall (a, b) \in \mathbb{C}^2 \quad a.e_1(t) + b.e_2(t) \rightarrow a.s_1(t) + b.s_2(t) \quad (18)$$

Invariant dans le temps, signifie que les propriétés du système restent constantes dans le temps ou, plus pragmatiquement, pendant la durée de l'excitation qu'il subit et la durée de sa réponse. Ainsi un condensateur est-il un composant invariant dans le temps même si sa valeur varie avec la température. En effet, les variations de température sont en générales très

lentes si on les compare au temps de réponse des circuits incluant des condensateurs. Un système est souvent invariant dans le temps à une certaine échelle de temps seulement.

1.3.2 Réponse impulsionnelle et produit de convolution

Il est toujours possible d'écrire un signal temporel comme une somme de distribution de Dirac comme présenté figure 6.

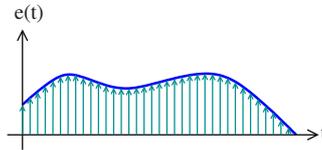


FIGURE 6 – Représentation d'un signal à l'aide d'une somme continue de Dirac.

Un signal $e(t)$ peut être vu comme une suite continue "d'impulsions de Dirac" multipliées par un facteur d'amplitude qui est la valeur signal à l'instant de l'impulsion. Il s'agit en fait d'une réinterprétation de la définition de la distribution de Dirac (équation 14) :

$$e(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(u) \delta(u-t) du \quad (19)$$

Amplitude du Dirac :
"Impulsions de Dirac"
valeur de la fonction en u
centrées en t

Définition : On appelle réponse impulsionnelle la réponse d'un système à une "impulsion de Dirac" que l'on note classiquement $h(t)$ (cf. figure 7).

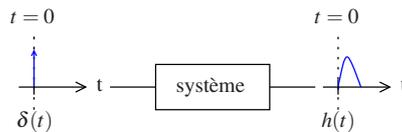


FIGURE 7 – Réponse impulsionnelle.

Remarque : C'est un concept purement théorique. Il n'est pas possible d'exciter un système avec un Dirac. Une impulsion réalisable, aussi courte soit elle, est de largeur non nulle et de hauteur finie. C'est une expérience de pensée. Il est cependant possible de calculer théoriquement $h(t)$ (cf. 1.4.2-2).

Dans la figure 7, on a pris comme référence des temps l'instant de l'excitation par l'impulsion de Dirac. Comme le système est invariant dans le temps, $h(t)$ est la même quelque soit le moment de l'excitation. Avec la linéarité du système, il en résulte que la réponse au signal $s(t)$ de la figure 6, est la somme des réponses aux Diracs comme présenté figure 8.

La réponse du système s'écrit donc :

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(u) h(t-u) du = e(t) * h(t) \quad (20)$$

Amplitude de l'excitation à l'instant u
Réponse du système à un Dirac centré en u

Définition : On dit que la réponse du système est la convolution du signal d'excitation avec la réponse impulsionnelle et on définit au passage le produit de convolution noté $*$ dans l'équation 20.

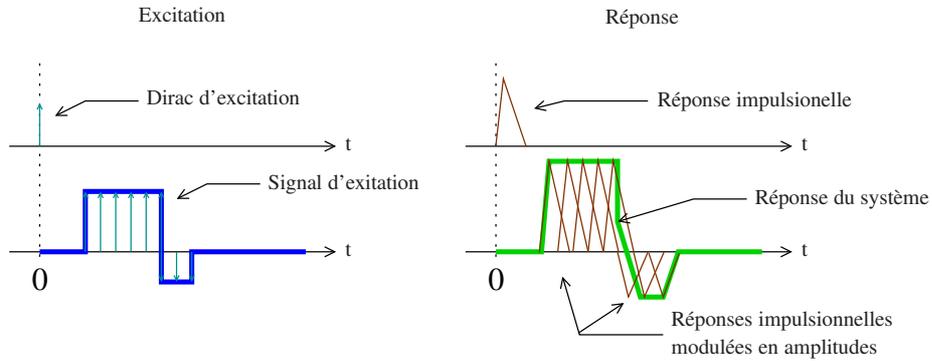


FIGURE 8 – Convolution d'un signal d'excitation et de la réponse impulsionnelle d'un système.

1.3.3 Réponse fréquentielle et produit de convolution

La transformée de Fourier que nous avons introduite est bien utile pour obtenir la décomposition d'un signal selon ses fréquences, mais ce n'est pas là son principal intérêt. Elle est aussi utilisée pour résoudre les équations différentielles linéaires.

Cette application est en générale connue comme "le passage en complexe" en électronique.

Exemple 1 : Considérons un simple circuit RC comme celui de la figure 9

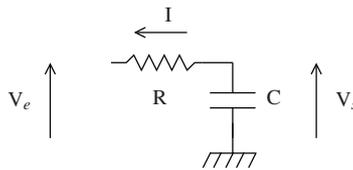


FIGURE 9 – Circuit RC.

L'équation différentielle qui régit ce système est :

$$I(t) = C \frac{dV_s}{dt} \quad (21)$$

En prenant la transformée de Fourier de cette équation, il vient :

$$I(\omega) = C \times j\omega V_s(\omega) \quad (22)$$

↓

$$V_s(\omega) = \frac{1}{jC\omega} I(\omega) \quad (23)$$

Par analogie avec la loi d'Ohm, on pose : $Z = \frac{1}{jC\omega}$ ce qui correspond au passage en complexe tel qu'on en a l'habitude.

Exemple 2 : Toujours avec le circuit RC, en considérant cette fois ci la réponse à $V_e(t)$, l'équation différentielle devient :

$$RI(t) + V_s(t) = V_e(t) \quad (24)$$

↓

$$RC \frac{dV_s}{dt} + V_s(t) = V_e(t) \quad (25)$$

En prenant la transformée de Fourier de l'équation 25, il vient :

$$RC j\omega V_s(\omega) + V_s(\omega) = V_e(\omega)$$

$$\Downarrow$$

$$H(\omega) = \frac{V_s(\omega)}{V_e(\omega)} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}} \quad (26)$$

où $H(\omega)$ est le gain complexe usuel. Ce résultat est aussi obtenu directement en écrivant le pont diviseur de tension pour le circuit RC avec l'équation 23 comme définition de l'impédance. Les deux démarches font en fait appel de façon cachée ou explicite à la TF.

Cas général d'un SLI : Le circuit RC des exemples précédents est un système SLI. La réponse de ce circuit à une excitation quelconque peut donc être obtenue à l'aide de l'équation 20 pour peu que l'on connaisse la réponse impulsionnelle du système. De façon générale, comme la transformée de Fourier a la propriété de transformer le produit de convolution en produit simple, on a pour un système SLI en prenant la TF de l'équation 20 :

$$s(\omega) = H(\omega)e(\omega) \quad (27)$$

Où $H(\omega)$ est la réponse fréquentielle comme dans l'exemple 2, équation 26.

La figure 10 résume les relations entre réponse impulsionnelle, réponse fréquentielle, signaux temporels et harmoniques pour les systèmes SLI.

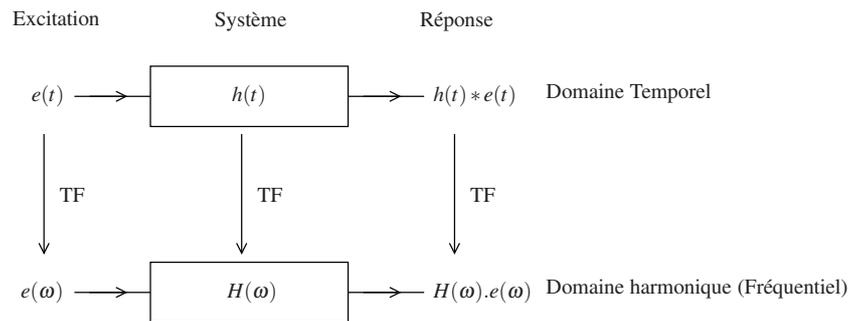


FIGURE 10 – Réponse Fréquentielle des Systèmes Linéaires et Invariants dans le Temps

Utiliser la transformée de Fourier pour résoudre une équation différentielle, c'est chercher les solutions de cette équation sous la forme de combinaison d'exponentielles complexes. Ce type de résolution est bien adapté aux régimes stationnaires. C'est-à-dire lorsque le système est dans son état actuel depuis un temps infiniment long.

Si on considère l'équation 25 en prenant pour $V_e(t)$ un échelon, c'est-à-dire un signal qui démarre à $t = 0$, on est évidemment pas dans le cas d'un régime stationnaire. La solution de l'équation s'écrit en combinaison linéaire de termes de la forme $e^{-\frac{t}{\tau}}$ qui ne sont pas des exponentielles complexes. La transformée de Fourier n'est pas adaptée dans ce cas.

1.4 Transformée de Laplace

Tout système SLI est nécessairement décrit par une équation différentielle linéaire à coefficients constants du type :

$$a_n \frac{d^n}{dt} s(t) + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt} s(t) + \dots + a_0 s(t) = b_m \frac{d^m}{dt} e(t) + b_{m-1} \frac{d^{m-1}}{dt} e(t) + \dots + b_0 e(t) \quad (28)$$

En effets :

1. Les coefficients a_n et b_n ne dépendent pas du temps.

2. La dérivation est une opération linéaire et respecte la propriété de l'équation 18

3. Toute autre opération, $\sqrt{s(t)}$, $s(t)^n, \dots$ est non linéaire.

L'ordre de l'équation différentielle de gauche de cette égalité définit aussi l'ordre d'un SLI. Les systèmes physiques (qui peuvent exister) doivent respecter la causalité. Il sont tels que :

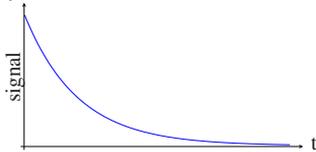
$$\text{(entrées)} \quad m \leq n \quad \text{(sorties)} \quad (29)$$

Supposons en effet que l'on puisse avoir $m > n$. L'équation différentielle suivante serait alors possible : $s(t) = b \frac{d}{dt} e(t)$.

A un instant t_0 donné la sortie $s(t_0)$ dépendrait alors de $\frac{d}{dt} e(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e(t_0+h) - e(t_0)}{h}$ avec $h \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire du futur de $e(t)$. Ce raisonnement se généralise aisément dès que que l'on a dans les termes de droite une dérivée d'ordre supérieure à toutes celles des termes de gauche.

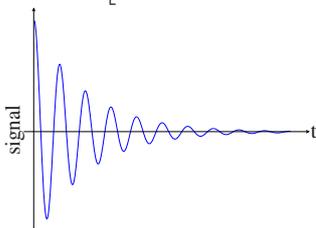
De façon générale, ce type d'équation admet des solutions qui sont des combinaisons linéaires d'exponentielles de la forme : e^{-pt} avec $p \in \mathbb{C}$.

— Si $p \in \mathbb{R}^+$, les solutions sont des exponentielles décroissantes, en posant $p = \frac{1}{\tau}$: $s(t) \equiv e^{-\frac{t}{\tau}}$ (\equiv signifie ici : de la forme).

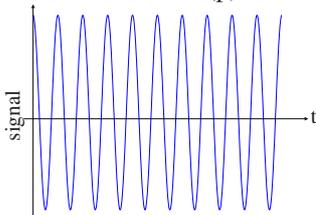


ou τ à la dimension d'un temps.

— Si $\Im m(p) \in \mathbb{R}^+$ et $\Re m(p) \neq 0$, les solutions vont par paires conjuguées l'une de l'autre, en posant $p = \frac{1}{\tau} + j\omega$: $s(t) \equiv \frac{1}{2} [e^{-\frac{t}{\tau} - j\omega t} + e^{-\frac{t}{\tau} + j\omega t}]$



— Dans le cas où $\Re m(p)=0$ alors $\tau \rightarrow +\infty$:



On voit que les solutions de la forme e^{-pt} incluent les solutions de la forme $e^{-j\omega t}$ qui sont les solutions trouvées par la transformée de Fourier. La transformée de Laplace est une extension de la transformée de Fourier. On verra dans la suite que l'on retrouve les résultats de la transformée de Fourier en prenant $p = j\omega$ avec le résultat donné par la transformée de Laplace avec des conditions initiales nulles.

1.4.1 Définition

De la même façon que la TF permet de chercher des solutions harmoniques : $e^{j\omega t}$, on définit la Transformée de Laplace TL pour chercher des solutions du type e^{-pt} . On est donc amené à poser :

$$\text{TL}(s(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-pt} dt \quad (30)$$

où $p \in \mathbb{C}$.

Cette relation définit la transformée de Laplace bilatérale (Les bornes d'intégrations sont symétriques).

Remarque : p n'est pas défini précisément. On prendra la valeur qui nous arrange. En particulier, p est choisi pour que l'intégrale de l'équation 30 converge. On peut aussi remarquer que, en prenant $p = j\omega$, la transformée de Laplace n'est rien de moins que la transformée de Fourier. On vérifie ainsi que la Transformée de Laplace est une extension de la transformée de Fourier adaptée à la recherche de solutions non harmoniques (non stationnaires) pour les systèmes SLI.

Les solutions non harmoniques qui nous intéressent, sont elles-mêmes la réponse du système étudié à une excitation non harmonique. On ne considère pas ici les excitations aléatoires, elles ont donc un instant de démarrage bien identifié. On prend, en général, par commodité, cet instant comme référence des temps : instant zéro ($t = 0$).

Grâce au principe de causalité : **Tout effet suit sa cause**, que l'on peut exprimer en terme de réponse impulsionnelle : pour $t < 0$, $h(t) = 0$. On voit que la réponse d'un système à une excitation qui démarre en $t = 0$ est tout comme l'excitation nulle avant. Ces considérations permettent de limiter l'intégrale de l'équation 30 aux seuls temps positifs. On définit ainsi la transformée de Laplace unilatérale comme :

$$\text{TL}(s(t)) = \mathcal{L}(s(t)) = S(p) = \int_0^{+\infty} s(t) e^{-pt} dt \quad (31)$$

Et on n'oublie pas que cette définition sous entend que $s(t)$ est un signal causal : $\forall t < 0$, $s(t) = 0$. Ce qui implique que : $\forall t < 0$, $\text{TL}(s(t)) = 0$. Cela n'est en général pas explicitement écrit dans les tables de transformées de Laplace.

1.4.2 Propriétés

Le lecteur trouvera comme pour la transformée de Fourier un résumé des principales propriétés de la transformée de Laplace en section 3.2. Les propriétés de la transformée de Laplace sont analogues à celles de la transformée de Fourier. Les différences résultent de l'origine des temps prise en zéro. Ainsi le théorème de dérivation tient compte de la valeur initiale. Il existe en outre quelques propriétés qui n'ont pas de sens en analyse harmonique mais qui sont très utiles comme les théorèmes de la valeur finale, de la valeur initiale, et le théorème de la somme. Ils permettent de trouver les valeurs limites dans l'espace des temps à partir des valeurs limites dans l'espace des fréquences (le lecteur remarquera à ce propos que p constitue une extension au plan complexe de la notion de fréquence).

Dérivation Calculons la transformée de Laplace de la dérivée $\text{TL}(s'(t)) = \int_{+\infty}^{+\infty} s'(t) e^{-pt} dt$ de la fonction $s(t)$. Cela se fait par intégration par parties, en dérivant e^{-pt} et en intégrant $s'(t)$:

$$\text{TL}(s'(t)) = \left[s(t) e^{-pt} \right]_0^{\infty} - \int_{+\infty}^{+\infty} s(t) (-p) e^{-pt} dt \quad (32)$$

Soit finalement si $p \neq 0$ (si $p = 0$, le produit pt est indéfini dans $\left[s(t) e^{-pt} \right]_0^{\infty}$ pour $t = \infty$) :

$$\text{TL}(s'(t)) = p \int_0^{+\infty} s(t) e^{-pt} dt - s(0^-) \quad (33)$$

Dans cette équation, pour un système causal, comme celui ci n'a pas encore pu réagir en $t = 0$, La valeur $s(0)$ doit être comprise comme la valeur initiale de s , c'est-à-dire avant que l'excitation ne commence. Elle est parfois notée $s(0^-)$, dans la littérature, pour rappeler que $s(0)$ est la valeur initiale. Nous allons utiliserons cette notation ici.

Cette notion de valeur initiale est particulièrement importante. Ainsi si l'on calcule la TL de la dérivée de l'échelon unité $U(t)$ (cf équation 17) : $TL(\delta(t)) = pTL(U(t)) - U(0) = 1 - U(0)$.

Hors, $TL(U(t)) = \frac{1}{p}$ et $TL(\delta(t)) = 1$ (CF table 3.2). On doit donc avoir $U(0) = 0$ ce qui est bien la valeur initiale de $U(t)$, et non sa valeur en zéro.

C'est pourquoi la transformée de Laplace est parfois définie comme $\int_0^{+\infty} s(t)e^{-pt} dt$, pour rappeler que $s(0)$ est la valeur initiale.

Théorème de la valeur initiale Si l'on fait tendre p par valeurs réelles vers l'infini $p \in \mathbb{R}, p \rightarrow +\infty$ dans l'équation 32, elle devient :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} s'(t)e^{-pt} dt = \lim_{p \rightarrow +\infty} \left[p \int_0^{+\infty} s(t)e^{-pt} dt + [s(t)e^{-pt}]_0^{\infty} \right] \quad (34)$$

On voit ici que l'on a un problème lorsque $p \in \mathbb{R}, p \rightarrow +\infty$ et $t \rightarrow 0$ en même temps, ce qui rend le produit pt indéfini dans l'exponentielle. Afin de contourner ce problème, on exclut la valeur zéro et on considère l'équation :

$$\lim_{\substack{p \rightarrow +\infty \\ t_0 \rightarrow 0^+}} \int_{t_0}^{+\infty} s'(t)e^{-pt} dt = \lim_{\substack{p \rightarrow +\infty \\ t_0 \rightarrow 0^+}} \left[p \int_{t_0}^{+\infty} s(t)e^{-pt} dt + [s(t)e^{-pt}]_{t_0}^{\infty} \right] \quad (35)$$

On a alors :

$$0 = \lim_{\substack{p \rightarrow +\infty \\ t_0 \rightarrow 0^+}} p \int_{t_0}^{+\infty} s(t)e^{-pt} dt - s(0^+) \quad (36)$$

Finalement, en admettant que le changement de la borne inférieure d'intégration (de 0 à 0^+) ne change pas la valeur de l'intégrale (cela se démontre) :

$$\boxed{s(0^+) = \lim_{p \in \mathbb{R}, p \rightarrow +\infty} pS(p)} \quad (37)$$

Théorème de la valeur finale Si l'on fait tendre $p \in \mathbb{R}, p \rightarrow 0^+$ (On ne peut faire $p \rightarrow 0$ car on doit avoir $p \neq 0$) dans l'équation 33, Elle devient :

$$\lim_{p \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} s'(t)e^{-pt} dt = \lim_{p \rightarrow 0^+} p \int_0^{+\infty} s(t)e^{-pt} dt - s(0^-) \quad (38)$$

soit

$$s(\infty) - s(0^-) = \lim_{p \rightarrow 0^+} p \int_0^{+\infty} s(t)e^{-pt} dt - s(0^-)$$

finalement

$$\boxed{s(\infty) = \lim_{p \in \mathbb{R}, p \rightarrow 0^+} pS(p)} \quad (39)$$

Réponse impulsionnelle De la même façon que l'on définit la réponse fréquentielle comme étant la TF de la réponse à un Dirac d'un SLI, on définit la réponse impulsionnelle $H(p)$ comme étant la TL de la réponse à un Dirac de ce système SLI. La figure 10 devient alors la figure 11.

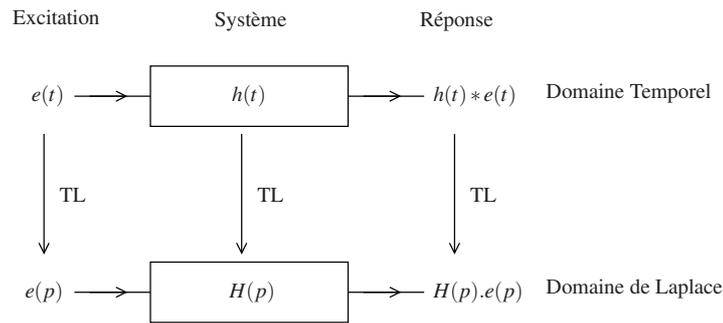


FIGURE 11 – Réponse impulsionnelle des Systèmes Linéaires et Invariants dans le Temps

Remarque : On vérifiera dans les exemples qui vont suivre que la réponse impulsionnelle n'est pas physique. Elle est cependant très utile car elle permet théoriquement de calculer la réponse d'un système à n'importe quelle excitation.

La réponse à un échelon unité $U(t)$ d'un SLI est appelée réponse indicielle. Contrairement à la réponse impulsionnelle, la réponse indicielle est physique. Elle peut être calculée à l'aide de la transformée de Laplace.

1.4.3 Utilisation pratique : systèmes du premier ordre

De façon très générale, les systèmes du premier ordre mettent œuvre un seul réservoir d'énergie qui est dissipée, c'est-à-dire convertie en une autre forme, sans pouvoir être récupérée. En électronique, c'est un condensateur ou une bobine qui dissipent leurs énergies respectives sous forme de chaleur dans une résistance. En mécanique, c'est par exemple de l'énergie cinétique dissipée sous forme de chaleur lorsque qu'un objet, animé d'une certaine vitesse initiale, glissant sur une surface, est freiné par les frottements sur cette surface. Dans ces systèmes, la variable à laquelle on s'intéresse (tension, courant, vitesse dans les exemples cités) est relié de façon linéaire à sa dérivée. Cela traduit une loi de conservation (charge, courant, quantité de mouvement). Comme les lois de conservations sont souvent rencontrées dans la nature, les systèmes du premier ordre décrivent de nombreux phénomènes.

1. Calcul de la réponse indicielle d'un circuit RC

(a) Conditions initiales nulles

Considérons le circuit RC de la figure 9. Nous allons utiliser à titre d'illustration la transformée de Laplace pour en calculer la réponse indicielle.

La tension V_s en sortie s'exprime comme : $V_s = \frac{Q}{C}$.

On en déduit : $\frac{dV_s}{dt} = \frac{i}{C}$, $\Rightarrow V_e - V_s = RC \frac{dV_s}{dt}$

Finalement : $RC \frac{dV_s}{dt} + V_s = V_e$ Ce résultat est normalement bien connu et a déjà été établi section 1.3.3. C'est une équation différentielle du premier ordre. Le circuit RC est donc bien un système du premier ordre.

En prenant la transformée de Laplace de chacun des deux membres de cette équation, avec $V_e = U(t)$, il vient : $RC \left[pV_s(p) - V_s(t=0^-) \right] + V_s(p) = \frac{1}{p}$ Attention à l'apparition du terme $V_s(t=0^-)$ qui constitue une des différences notable avec la TF.

Enfin, en posant $\tau = RC$, on obtient :

$$V_s(p) = \frac{1}{p(1 + \tau p)} + \frac{\tau}{1 + \tau p} V_s(t=0^-)$$

Si le condensateur était initialement déchargé, $V_s(t = 0^+) = 0$, le résultat se simplifie et devient :

$$V_s(p) = \frac{1}{p(1 + \tau p)} = \frac{1}{p} - \frac{\tau}{1 + \tau p}$$

On prend alors la transformée de Laplace inverse de l'équation précédente en utilisant la linéarité et en reconnaissant, dans la table de la section 3.2, les termes $\frac{1}{p}$ et $\frac{\tau}{1 + \tau p}$.

Il vient, pour $t > 0$, : $V_s(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$. C'est le résultat classique bien connu pour la charge a tension constante d'un condensateur CQFD.

(b) Conditions initiales non nulles

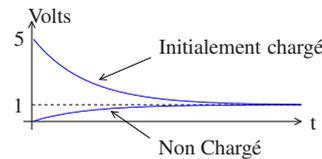
La transformée de Laplace permet aussi de prendre en compte les conditions initiales. Par exemple si le condensateur avait été initialement chargé à 5V, c'est-à-dire $V_s(0) = 5V$. Le terme $V_s(t = 0^-)$ vaut alors 5 V et l'équation à conditions initiale non nulle précédente devient :

$$V_s(p) = \frac{1}{p(1 + \tau p)} + 5 \frac{\tau}{1 + \tau p} = \frac{1}{p} + 4 \frac{\tau}{1 + \tau p}$$

Comme précédemment, on détermine la transformée de Laplace inverse en identifiant les termes dans la table de la section 3.2.

d'où :

$$V_s(t) = 1 + 4e^{-\frac{t}{\tau}}$$



2. Calcul de la réponse impulsionnelle d'un circuit RC.

(a) Calcul

Nous allons maintenant calculer la réponse impulsionnelle du circuit RC de la figure 9 avec la TL.

Le signal en entrée est, par définition de la réponse impulsionnelle, une impulsion de Dirac : $V_e(t) = \delta(t)$.

$$V_e(t) = V_0 \delta(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} V_e(p) = V_0 = 1V$$

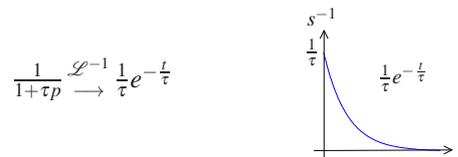
En prenant la TL de l'équation différentielle $\tau \frac{dV_s}{dt} + V_s = V_e$ qui décrit le comportement du circuit, il vient :

$$\tau p V_s(p) - V_s(t = 0^-) + V_s(p) = 1$$

Finalement si le condensateur est initialement déchargé :

$$V_s(p) = \frac{1}{1 + \tau p}$$

On en déduit la réponse impulsionnelle du circuit en déterminant la TL^{-1} par identification :



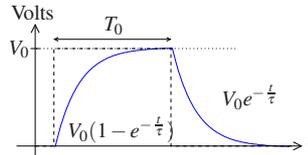
Remarque : Ce qui doit sauter aux yeux tout de suite, c'est la dimension de la réponse impulsionnelle. Elle est homogène à une fréquence. Ce n'est pas très physique mais cela illustre encore une fois que la réponse impulsionnelle n'est pas physique (cf. 1.3.2). La réponse impulsionnelle ne prend une dimension (au sens Volts,

Bar, Ampère, Newton etc) qu'au travers d'une intégrale dans le temps : la convolution avec le signal d'excitation (cf. équation 20). Cela explique son homogénéité à une fréquence. De la même façon, la fonction de transfert et la réponse fréquentielle sont sans dimension car obtenues à partir de la réponse impulsionnelle via une intégrale dans le temps, respectivement la transformée de Laplace et la transformée de Fourier.

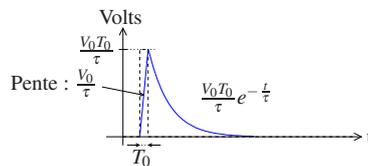
Nota bene : Ce qui précède n'est pas nécessairement la méthode à appliquer pour calculer la réponse impulsionnelle d'un circuit aussi simple que le circuit RC. C'est un exemple d'application.

(a) Lien avec la réponse à une impulsion courte.

On assimile souvent une impulsion de Dirac à une impulsion très courte. A quelle condition cela est-il justifié ? La réponse à une porte (largeur T_0 , hauteur V_0) du circuit RC de la figure 9, est la suivante :

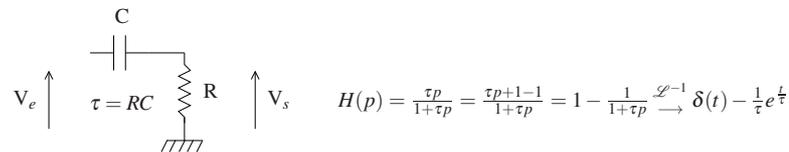


Pour une impulsion courte : $T_0 \ll \tau$ la charge du condensateur peut être assimilée à la tangente, on a alors :

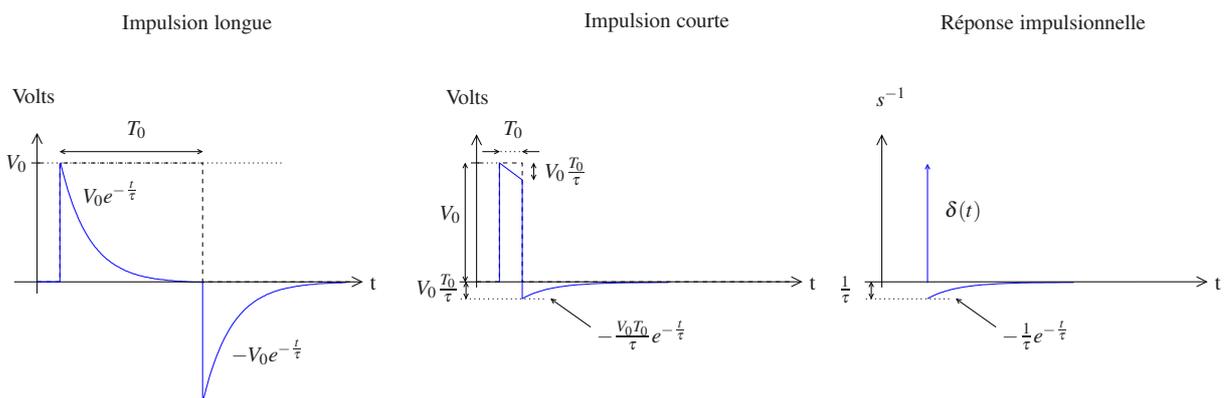


On voit que, à la condition que $\begin{cases} T_0 V_0 = 1 \\ T_0 \rightarrow 0 \end{cases}$, c'est-à-dire $V_0 \rightarrow +\infty$, la réponse à une impulsion courte se rapproche de la réponse impulsionnelle. Cette dernière est un cas limite qui ne peut être atteint.

3. Autre exemple simple, classique et utile : Dérivateur CR



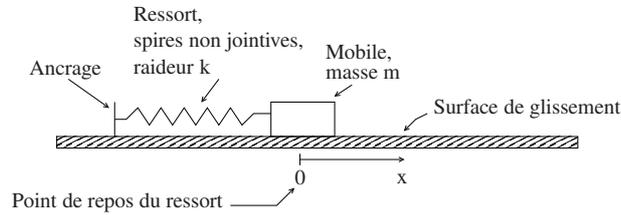
Réponses :



Dans ce cas encore, à condition que $\begin{cases} T_0 V_0 = 1 \\ T_0 \rightarrow 0 \\ V_0 \rightarrow +\infty \end{cases}$, la réponse à une impulsion courte se rapproche de la réponse impulsionnelle.

1.4.4 Utilisation pratique : systèmes du deuxième ordre ; forme canonique.

Les systèmes du deuxième ordre sont de deux types. Soit ils sont constitués de deux systèmes du premier ordre en cascade comme deux filtres RC. Dans ce cas, ils mettent en œuvre deux réservoirs d'énergie de même nature. Ce type de système du deuxième ordre n'est pas de nature oscillante. Soit ils mettent en œuvre deux réservoirs d'énergie de natures différentes, et l'énergie stockée peut passer alternativement d'un réservoir à l'autre. Ces systèmes sont de nature oscillante. C'est le cas des circuits RLC et de systèmes mécaniques tel que le système suivant :



1. Systèmes sans pertes.

Dans le cas de ce système mécanique, avec la relation fondamentale de la dynamique, en régime libre, on a :

$$-kx = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

Soit en régime forcé par $e(x)$:

$$\frac{m}{k} \frac{d^2x}{dt^2} + x(t) = x_e(t)$$

On remarque tout de suite que $\frac{m}{k} \frac{d^2x}{dt^2}$ doit être homogène à une distance (ce terme additionné à une distance est égal à une distance) et donc que $\frac{m}{k}$ est homogène au carré d'un temps.

Pour un circuit LC parallèle par exemple : on a la même forme d'équation différentielle :

$$LC \frac{d^2V}{dt^2} + V(t) = V_e(t)$$

Ici encore, l'on remarque que le terme devant la dérivée seconde est homogène au carré d'un temps.

Un circuit oscillant du deuxième ordre sans perte (oscillateur harmonique) est donc régi par une équation différentielle de la forme :

$$A \frac{d^2s}{dt^2} + s(t) = e(t) \tag{40}$$

où $s(t)$ est la variable d'intérêt, c'est-à-dire la sortie du système et $e(t)$ l'excitation appliquée au système, c'est-à-dire son entrée.

Avec la transformée de Laplace : $A p^2 s(p) + s(p) = e(p)$. On obtient alors une fonction de transfert de la forme : $H(p) = \frac{1}{A p^2 + 1}$. En régime harmonique, c'est-à-dire en prenant $p = j\omega$, on obtient la réponse fréquentielle : $H(\omega) = \frac{1}{1 - A\omega^2}$. On s'aperçoit alors que A est l'inverse d'une pulsation au carré. C'est la pulsation propre du système. Finalement on pose : $A = \frac{1}{\omega_0^2}$.

2. Systèmes avec pertes.

Si le système présente des pertes, un nouveau terme apparaît dans l'équation 40. Par exemple dans le cas d'un circuit RLC parallèle, où les pertes sont des pertes par effet Joule dans la résistance, on a :

$$LC \frac{d^2V}{dt^2} + \frac{L}{R} \frac{dV}{dt} + V(t) = V_e(t)$$

Dans le cas de l'oscillateur mécanique précédent, les pertes sont dues aux frottements. Elles sont proportionnelles à la vitesse et opposées au mouvement d'où :

$$\frac{m}{k} \frac{d^2x}{dt^2} + \alpha \frac{dx}{dt} + x(t) = x_e(t)$$

Un circuit oscillant du deuxième ordre avec pertes est donc régi par une équation différentielle de la forme :

$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2s}{dt^2} + B \frac{ds}{dt} + s(t) = e(t) \quad (41)$$

Dans cette équation, B est un terme de perte qui doit s'opposer à $e(t)$. C'est donc un réel positif.

Avec la transformée de Laplace : on obtient la fonction de transfert suivante : $H(p) = \frac{s(p)}{e(p)} = \frac{1}{1 + Bp + \frac{1}{\omega_0^2} p^2}$. On remarque que comme la fonction de transfert est sans dimension, B est homogène à l'inverse d'une pulsation.

Afin de déterminer les solutions temporelles correspondant à cette fonction de transfert (réponse impulsionnelle et réponse indicielle), il faut la réduire en éléments simples. Pour cela, il faut rechercher les pôles de la fonction de transfert, c'est-à-dire, les zéros du dénominateur. Il faut donc résoudre l'équation caractéristique de l'équation différentielle : $\frac{1}{\omega_0^2} p^2 + Bp + 1 = 0$.

On calcule alors le déterminant : $\Delta = B^2 - 4 \frac{1}{\omega_0^2}$. La forme des solutions dépend du signe de Δ . Afin de pouvoir discuter simplement du signe du déterminant en le factorisant, comme B est homogène à l'inverse d'une pulsation, on pose $B = \frac{2\zeta}{\omega_0}$, où ζ est un réel positif. Il vient : $\Delta = \frac{4}{\omega_0^2} (\zeta^2 - 1)$. Les pôles de la fonction de transfert sont donc réels ou complexes, selon que $\zeta \geq 1$ ou $\zeta < 1$.

(a) Si $\zeta \geq 1$, on a deux pôles réels. les deux pôles ne peuvent être tous les deux nuls car le terme constant de l'équation caractéristique est non nul.

On peut alors avoir un pôle nul et un pôle réel non nul : $p = -\frac{1}{\tau}$. La fonction de transfert peut alors en factorisant le dénominateur à l'aide des pôles se mettre sous la forme :

$$H(p) = \frac{K}{p(1 + \tau p)} \quad (42)$$

Dans cette expression K dépend de ζ , donc de ω_0 . $H(p)$ étant sans dimension, K est homogène à une fréquence. On préférera réécrire $H(p)$ sous la forme :

$$H(p) = \frac{1}{\tau_2 p(1 + \tau_1 p)} \quad (43)$$

En comparant cette expression avec le résultat déjà établi en section 1.4.3, pour les systèmes du premier ordre, on s'aperçoit que τ_1 est une constante de temps du système, et qu'il peut être interprété comme la cascade d'un intégrateur ($H(p) = 1/\tau_2 p$) et d'un système du premier ordre ($H(p) = 1/(1 + \tau_1 p)$).

On peut aussi avoir deux pôles non nuls : $p_1 = -\frac{1}{\tau_1}$ et $p_2 = -\frac{1}{\tau_2}$. La fonction de transfert se met alors sous la forme :

$$H(p) = \frac{K}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)} \quad (44)$$

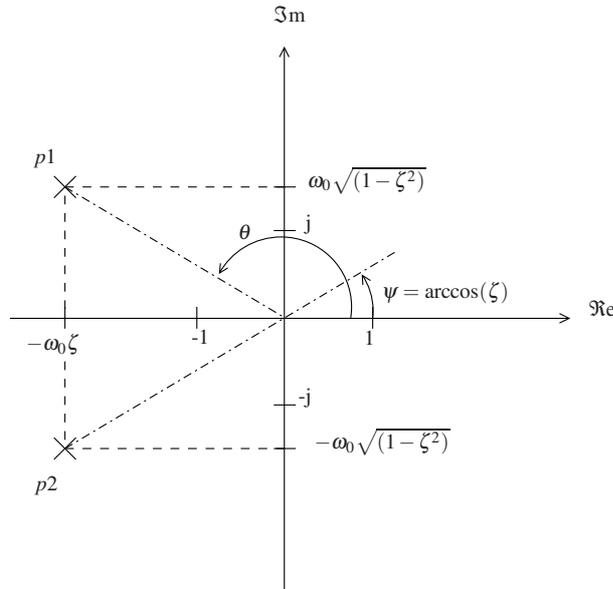
De la même façon que précédemment, τ_1 et τ_2 sont les constantes de temps du système qui peut être vu comme la cascade de deux systèmes du premier ordre.

(b) Si $\zeta^2 < 1$. Les deux pôles $p_{1,2}$ sont complexes conjugués : $\sqrt{\Delta} = \pm j \frac{2}{\omega_0} \sqrt{(1 - \zeta^2)} \Rightarrow p_{1,2} = \frac{-\frac{2\zeta}{\omega_0} \pm j \frac{2}{\omega_0} \sqrt{(1 - \zeta^2)}}{2/\omega_0}$
soit :

$$p_{1,2} = \omega_0(-\zeta \pm j\sqrt{1 - \zeta^2}) \quad (45)$$

$$= \omega_0 e^{\pm j\theta} \quad (46)$$

$$\theta = \pi - \psi = \pi - \arcsin(\sqrt{1 - \zeta^2}) = \pi - \operatorname{atan}\left(\frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta}\right) = \pi - \operatorname{acos}(\zeta) \quad (47)$$



Finalement, la forme générale canonique de la fonction de transfert d'un système de deuxième ordre est la suivante :

$$H(p) = \frac{1}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_0} p + \frac{1}{\omega_0^2} p^2} \quad (48)$$

Conclusion : Tout système du 2^{ème} ordre est régi par une fonction de transfert qui peut toujours se mettre sous la forme de l'équation 48 .

- si $\zeta \geq 1$, le système est non oscillant et amorti à pôles réels dont un au moins est non nul.
- si $\zeta < 1$, le système est oscillant et amorti et présente deux pôles complexes conjugués.
- si $\zeta=0$, le système est oscillant non amorti, c'est-à-dire sans perte.

1.4.5 Réponses des systèmes du deuxième ordre.

Maintenant établies les fonctions de transfert des systèmes du deuxième ordre, il est possible de calculer leurs réponses temporelles caractéristiques : réponse impulsionnelle et indicielle, ainsi que leurs réponses fréquentielles.

Les réponses fréquentielles $H(\omega)$ sont aisément obtenues en remplaçant p par $j\omega$ dans l'expression des fonctions de transfert. Nous ne nous attarderons pas dessus. Elles sont présentées dans la table de la section 3.3.

Le principe de calcul des réponses impulsionnelles et indicelles, consiste à déterminer la transformée de Laplace de chaque réponse, puis de déterminer par identification avec les transformées connues de la table 3.2 sa transformée inverse qui est la réponse cherchée.

Pour ce faire, la technique consiste à décomposer en éléments simples les transformées de Laplace obtenues pour pouvoir les identifier.

Établissons dans un premier temps la décomposition en élément simple d'une fonction de transfert type du 2^{ème} ordre de pôles p_1 et p_2 :

$H(p) = \frac{1}{Ap^2 + Bp + C}$ se décompose en éléments simples comme : $H(p) = \frac{1}{A} \left[\frac{a}{(p-p_1)} + \frac{b}{(p-p_2)} \right]$, ou a et b sont à déterminer.

En écrivant l'égalité des deux termes : $\frac{1/A}{p^2 + \frac{B}{A}p + \frac{C}{A}} = \frac{a}{(p-p_1)} + \frac{b}{(p-p_2)}$

il vient : $\frac{1/A}{p^2 + \frac{B}{A}p + \frac{C}{A}} = \frac{p(a+b) - ap_1 - bp_2}{p^2 - p(p_1+p_2) + p_1p_2}$

on doit donc avoir : $p(a+b) = 0$ soit : $a = -b$.

De même on doit avoir : $ap_1 + bp_2 = -\frac{1}{A}$, soit : $a = \frac{1}{A} \frac{1}{p_1 - p_2}$

Finalement :

$$H(p) = \frac{1}{A} \frac{1}{p_1 - p_2} \left[\frac{1}{p - p_1} - \frac{1}{p - p_2} \right] \quad (49)$$

Deuxième ordre un pôle réel, un pôle nul. La fonction de transfert de ce type de système est donnée par l'équation 43.

Réponse impulsionnelle :

$$\begin{aligned} e(t) = \delta(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} e(p) = 1 \quad \text{et} \quad s(t) &= \mathcal{L}^{-1}(H(p)e(p)) \\ \Rightarrow s(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{\tau_2 p(1 + \tau_1 p)}\right) \\ &= \frac{1}{\tau_2} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{(1 + \tau_1 p) - \tau_1 p}{p(1 + \tau_1 p)}\right) \\ &= \frac{1}{\tau_2} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p} - \frac{\tau_1}{(1 + \tau_1 p)}\right) \\ &= \frac{1}{\tau_2} (U(t) - e^{-\frac{t}{\tau_1}}) \end{aligned}$$

Soit pour les temps positifs (tout est nul avant) :

$$s(t) = \frac{1}{\tau_2} (1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}}) \quad (50)$$

Réponse indicielle :

$$\begin{aligned} e(t) = U(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} e(p) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad s(t) &= \mathcal{L}^{-1}(H(p)e(p)) \\ \Rightarrow s(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{\tau_2 p^2(1 + \tau_1 p)}\right) \\ &= \frac{1}{\tau_2} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{(1 + \tau_1 p) - \tau_1 p}{p^2(1 + \tau_1 p)}\right) \\ &= \frac{1}{\tau_2} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p^2} - \frac{\tau_1}{p(1 + \tau_1 p)}\right) \\ &= \frac{1}{\tau_2} (t - \tau_1 U(t) + \tau_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}}) \end{aligned}$$

Soit pour les temps positifs (tout est nul avant) :

$$s(t) = \frac{\tau_1}{\tau_2} (e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \frac{t}{\tau_1} - 1) \quad (51)$$

Deuxième ordre deux pôles réels $-\frac{1}{\tau_1}$ et $-\frac{1}{\tau_2}$. La fonction de transfert de ce type de système est donnée par l'équation 44.

Réponse impulsionnelle :

$$\begin{aligned} e(t) = \delta(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} e(p) = 1 \quad \text{et} \quad s(t) &= \mathcal{L}^{-1}(H(p)e(p)) \\ \Rightarrow s(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{K}{(1 + \tau_2 p)(1 + \tau_1 p)}\right) \\ &= K \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{1 + (\tau_1 + \tau_2)p + \tau_1 \tau_2 p^2}\right) \end{aligned}$$

Soit avec l'équation 49 :

$$\begin{aligned} s(t) &= K \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{\tau_1 \tau_2} \frac{1}{1/\tau_2 - 1/\tau_1} \left[\frac{\tau_1}{1 + \tau_1 p} - \frac{\tau_2}{1 + \tau_2 p}\right]\right) \\ &= \frac{K}{\tau_1 - \tau_2} (e^{-\frac{t}{\tau_1}} - e^{-\frac{t}{\tau_2}}) \end{aligned}$$

Réponse indicielle :

$$\begin{aligned} e(t) = U(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} e(p) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad s(t) &= \mathcal{L}^{-1}(H(p)e(p)) \\ \Rightarrow s(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p} \frac{K}{(1 + \tau_2 p)(1 + \tau_1 p)}\right) \end{aligned}$$

Soit comme dans le calcul précédent (réponse impulsionnelle) :

$$s(t) = \frac{K}{\tau_1 - \tau_2} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p} \left[\frac{\tau_1}{1 + \tau_1 p} - \frac{\tau_2}{1 + \tau_2 p}\right]\right)$$

en remarquant que : $\frac{\tau}{1 + \tau p} = \tau \frac{1 + \tau p - \tau p}{1 + \tau p} = \tau \left(1 - \frac{\tau p}{1 + \tau p}\right)$:

$$\begin{aligned} s(t) &= \frac{K}{\tau_1 - \tau_2} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p} \left[\tau_1 \left(1 - \frac{\tau_1 p}{1 + \tau_1 p}\right) - \tau_2 \left(1 - \frac{\tau_2 p}{1 + \tau_2 p}\right)\right]\right) \\ &= \frac{K}{\tau_1 - \tau_2} \mathcal{L}^{-1}\left(\tau_1 \left(\frac{1}{p} - \frac{\tau_1}{1 + \tau_1 p}\right) - \tau_2 \left(\frac{1}{p} - \frac{\tau_2}{1 + \tau_2 p}\right)\right) \\ &= \frac{K}{\tau_1 - \tau_2} \mathcal{L}^{-1}\left(\tau_1 (U(t) - e^{-\frac{t}{\tau_1}}) - \tau_2 (U(t) - e^{-\frac{t}{\tau_2}})\right) \end{aligned}$$

Soit pour les temps positifs (tout est nul avant) :

$$s(t) = K \left(1 - \frac{1}{\tau_1 - \tau_2} (\tau_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \tau_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}})\right) \quad (52)$$

Deuxième ordre deux pôles complexes. La fonction de transfert de ce type de système est donnée par l'équation 45.

Réponse impulsionnelle :

$$\begin{aligned} e(t) = \delta(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} e(p) = 1 \quad \text{et} \quad s(t) &= \mathcal{L}^{-1}(H(p)e(p)) \\ \Rightarrow s(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_0} p + \frac{1}{\omega_0^2} p^2}\right) \end{aligned}$$

en connaissant les pôles (équation 45) et avec l'équation 49 :

$$\frac{1}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_0} p + \frac{1}{\omega_0^2} p^2} = \left(\frac{\omega_0^2}{\omega_0((- \zeta + j\sqrt{1 - \zeta^2}) - (- \zeta - j\sqrt{1 - \zeta^2}))} \left[\frac{1}{p - p_1} - \frac{1}{p - p_2} \right] \right)$$

soit :

$$\frac{1}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_0}p + \frac{1}{\omega_0^2}p^2} = \frac{\omega_0}{2j\sqrt{1-\zeta^2}} \left[\frac{1}{p-p_1} - \frac{1}{p-p_2} \right] \quad (53)$$

comme $\frac{1}{p-p_1} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{p_1 t}$:

$$\begin{aligned} s(t) &= \frac{\omega_0}{2j\sqrt{1-\zeta^2}} \left(\left(e^{-\zeta\omega_0 t} e^{+j\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}t} \right) - \left(e^{-\zeta\omega_0 t} e^{-j\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}t} \right) \right) \\ &= \frac{\omega_0}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_0 t} \sin \left(\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}t \right) \end{aligned}$$

Réponse indicielle :

$$\begin{aligned} e(t) = U(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} e(p) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad s(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left(H(p)e(p) \right) \\ &\Rightarrow s(t) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_0}p + \frac{1}{\omega_0^2}p^2} \frac{1}{p} \right) \end{aligned}$$

Avec l'équation 53 :

$$s(t) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{\omega_0}{2j\sqrt{1-\zeta^2}} \left[\frac{1}{p(p-p_1)} - \frac{1}{p(p-p_2)} \right] \right)$$

En décomposant en éléments simples chacun des termes de l'expression entre crochet :

$$\begin{aligned} s(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{\omega_0}{2j\sqrt{1-\zeta^2}} \left[-\frac{1}{pp_1} + \frac{1}{p_1(p-p_1)} + \frac{1}{pp_2} - \frac{1}{p_2(p-p_2)} \right] \right) \\ &= \frac{\omega_0}{2j\sqrt{1-\zeta^2}} \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{p} \left(\frac{p_1-p_2}{p_1p_2} \right) + \frac{1}{p_1(p-p_1)} - \frac{1}{p_2(p-p_2)} \right) \end{aligned}$$

avec les équations 46, 47 et en identifiant les transformées de Laplace :

$$\begin{aligned} s(t) &= \frac{\omega_0}{2j\sqrt{1-\zeta^2}} \left(U(t) \frac{2j\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}}{\omega_0^2} + \frac{e^{-j\psi}}{\omega_0} \left(e^{-\zeta\omega_0 t} e^{+j\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}t} \right) - \frac{e^{j\psi}}{\omega_0} \left(e^{-\zeta\omega_0 t} e^{-j\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}t} \right) \right) \\ &= 1 + \frac{e^{-\zeta\omega_0 t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \left(\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}t - \theta \right) \\ &= 1 + \frac{e^{-\zeta\omega_0 t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \left(\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}t + a \sin(\sqrt{1-\zeta^2}) - \pi \right) \\ &= 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_0 t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \left(\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}t + \text{acos}(\zeta) \right) \end{aligned}$$

Tous les résultats précédents sont résumés dans la table 3.3

1.4.6 Systèmes d'ordre quelconque.

Le comportement d'un Système Linéaire et Invariant dans le temps est décrit par l'équation différentielle 27.

En prenant la transformée de Laplace de cette équation, il vient avec le théorème de la dérivation (cf. table 3.2) :

$$S_0(p) \left\{ \begin{array}{l} (a_0 + a_1 p + \dots + a_{n-1} p^{n-1} + a_n p^n) s(p) \\ -(a_1 + \dots + a_{n-1} p^{n-1} + a_n p^{n-1}) s(0^-) \\ -(a_2 + \dots + a_{n-1} p^{n-1} + a_n p^{n-2}) \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\partial}{\partial t} s(t) \\ \vdots \\ -a_n \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} s(t) \end{array} \right. = \left. \begin{array}{l} (b_0 + b_1 p + \dots + b_{m-1} p^{m-1} + b_m p^m) e(p) \\ -(b_1 + \dots + b_{n-1} p^{m-1} + b_m p^{m-1}) \lim_{t \rightarrow 0^-} e(t) \\ -(b_2 + \dots + b_{m-1} p^{m-1} + b_m p^{m-2}) \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\partial}{\partial t} e(t) \\ \vdots \\ -b_m \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}} e(t) \end{array} \right\} E_0(p)$$

On en déduit ;

$$s(p) = \frac{S_0(p)}{a_0 + a_1 p \dots + a_n p^n} + \frac{(b_0 + b_1 p \dots + b_n p^m)}{a_0 + a_1 p \dots + a_n p^n} e(p) - \frac{E_0(p)}{a_0 + a_1 p \dots + a_n p^n} \quad (54)$$

Dans cette équation, les termes $S_0(p)$ et $E_0(p)$ dépendent des conditions initiales.

Pour un système initialement au repos complet, c'est-à-dire un système pour lequel toutes les dérivées de l'entrée $e(t)$ et de la sortie $s(t)$ sont nulles : $S_0 = 0$ et $E_0 = 0$.

On a alors :

$$\frac{s(p)}{e(p)} = H(p) = \frac{(b_0 + b_1 p \dots + b_n p^m)}{a_0 + a_1 p \dots + a_n p^n} \quad (55)$$

où l'on reconnaît la définition de $H(p)$ la fonction de transfert du système. C'est-à-dire la réponse à $e(t) = \delta(0) \Rightarrow e(p) = 1$.

Comme c'est aussi la transformée de Laplace de la réponse impulsionnelle $h(t)$, on peut théoriquement la calculer :

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{b_0 + b_1 p \dots + b_n p^m}{a_0 + a_1 p \dots + a_n p^n} \right) \quad (56)$$

Interprétation des trois termes de droite de l'équation 54. Chacun des trois termes correspond à la réponse du système sous différentes contraintes.

- Si $e(p)$ et $E_0(p)$ sont nuls, alors $s(p) = \frac{S_0(p)}{a_0 + a_1 p \dots + a_n p^n}$. Comme $S_0(p)$ ne dépend que de l'état initial de la sortie du système, ce terme représente la réponse du système à $S_0(t)$, c'est-à-dire la réponse libre du système.
- Avec un raisonnement, identique on déduit que le deuxième terme représente la réponse au régime forcé par $e(t)$. C'est la fonction de transfert.
- Enfin le troisième terme représente la réponse à une excitation déjà en cours avant que $e(t)$ ne démarre (avant $t = 0$). Ce peut être par exemple une excitation sinusoïdale à laquelle se substitue une rampe ou un échelon à $t = 0$ par exemple.

On s'aperçoit que le polynôme $a_0 + a_1 p \dots + a_n p^n$ intervient dans tous les cas. Il est appelé polynôme caractéristique de l'équation différentielle 28.

2 Stabilité

2.1 Définitions

Stabilité au sens strict : Un système est stable si il revient à l'équilibre après une perturbation.

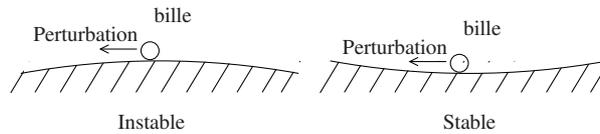


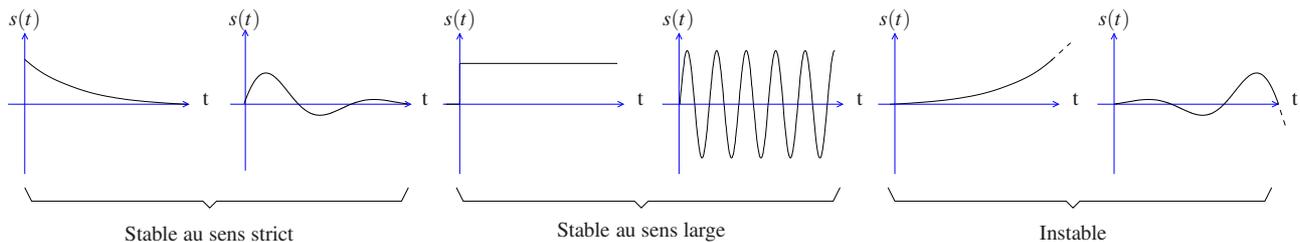
FIGURE 12 – Cas d'une bille avec les frottements de l'air.

Cette stabilité, illustrée figure 12, est aussi appelée : stabilité au sens de Lyapunov d'après Alexandre Lyapunov qui a proposé une méthode pour déterminer si un système est stable ou non, sans résoudre l'équation différentielle qui décrit le comportement du système.

Stabilité au sens large : Un système est stable si pour toute excitation bornée en amplitude la réponse du système est également bornée (Bonded Input Bonded Output : BIBO).

Les deux définitions précédentes ne sont pas tout à fait équivalentes. Un oscillateur est stable au sens large, mais pas au sens strict.

Considérons les exemples de réponses impulsionnelles possibles pour des systèmes du premier ordre ou du deuxième ordre :



On ne couvre pas par ces exemples tous les cas possibles, mais on a tous les genres d'allures possibles. La réponse impulsionnelle peut tendre vers zéro, osciller ou prendre une valeur constante non nulle. Enfin elle peut diverger. On verra section 2.2 que tout système peut être décomposé en systèmes du premier et deuxième ordre, ce genre de comportement pour la réponse impulsionnelle est donc très général pour les SLI.

La réponse d'un SLI peut par définition toujours s'écrire comme une combinaison linéaire continue de réponses impulsionnelles, c'est le produit de convolution : $s(t) = e(t) * h(t)$. Pour que $s(t)$ soit borné ou revienne toujours à son état d'équilibre, il faut que $h(t)$ le soit. On peut donc redéfinir la stabilité au sens strict comme suit :

Stabilité asymptotique : Un SLI est stable au sens strict si et seulement si sa réponse impulsionnelle tend vers zéro :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = 0 \quad (57)$$

2.2 Pôles de la fonction de transfert et stabilité.

Compte tenu de la définition (57) de la stabilité asymptotique, il est possible d'étudier la stabilité d'un SLI en étudiant la convergence à l'infini de sa réponse impulsionnelle. Comme, $H(p) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} h(t)$, il faut déterminer la forme de la transformée de Laplace inverse de la fonction de transfert.

Déterminer la transformée de Laplace inverse de l'équation 55, n'est pas aisé dans le cas général. Il faut comme dans les exemples traités précédemment décomposer la fonction de transfert en éléments simples.

Il faut pour cela déterminer les pôles de la fonction de transfert. Ceux-ci sont réels ou conjugués deux à deux. Compte tenu de l'inégalité 29, la décomposition en éléments simples ne fait apparaître que des termes de la forme $\frac{\alpha}{p-p_i}$ ou p_i est un des pôles éventuellement complexe de la fonction de transfert, et α un coefficient réel ou complexe. Chacun des termes de la décomposition en éléments simples donne lieu à une réponse impulsionnelle $\frac{\alpha_i}{p-p_i} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \alpha_i e^{p_i t}$. Pour respecter la condition (57), il faut que :

$$\Re(p_i) < 0 \quad (58)$$

Remarque : Les pôles peuvent être nuls, et/ou d'ordre $o_i > 1$. Les termes correspondants à des pôles nul : $\frac{1}{p}, \frac{1}{p^2}, \dots, \frac{1}{p^n}$ ont pour transformées de Laplace inverses respectives : $U(t), t, \dots, \frac{1}{(n-1)!} t^{n-1}$ et rendent le système instable. Les termes de la forme $\left(\frac{\alpha}{p-p_i}\right)^{o_i}$ correspondent à o_i systèmes en série de réponse temporelle de la forme $\alpha_i e^{p_i t}$, et ne sont stables qu'à la condition 58 énoncée précédemment.

Finalement :

Un Système Linéaire et Invariant dans le temps est stable si et seulement si tous ses pôles sont à partie réelle négative.

Nous savons maintenant parfaitement déterminer si un SLI est stable ou non.

Cependant :

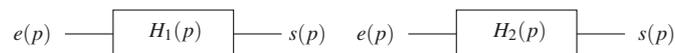
1. On ne connaît pas toujours la forme analytique de la fonction de transfert. On ne peut parfois y avoir accès que par la mesure.
2. Lorsque l'ordre du système est élevé, calculer les pôles de la fonction de transfert peut être rapidement compliqué. C'est souvent le cas pour les systèmes bouclés.

2.3 Stabilité des systèmes associés

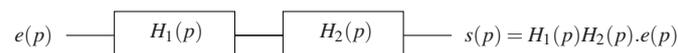
2.3.1 Association de systèmes

Pour modéliser un système complexe, on peut être amené à associer des systèmes plus simples, typiquement des systèmes du premier ou deuxième ordre. On les associe à l'aide d'additionneur ou de soustracteur. Ils peuvent être associés en série, en parallèle, ou en boucle.

Association en série : Soit deux systèmes caractérisés par les fonctions de transfert $H_1(p)$ et $H_2(p)$.



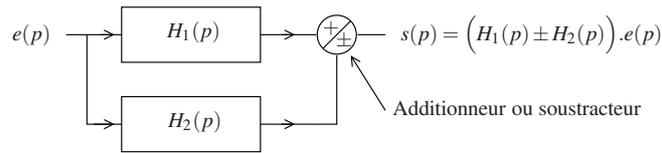
Sans additionneur/soustracteur, il est possible de les additionner en série :



la fonction de transfert résultante est alors égale au produit des fonctions de transfert. Attention, il s'agit d'un modèle. Pour que ce soit vrai avec des quadripôles en électronique, par exemple, il faut s'assurer de l'adaptation d'impédance en tension. En théorie des systèmes, on suppose qu'il est toujours possible de le faire. Il incombe à l'utilisateur de vérifier la validité du modèle et le cas échéant de l'adapter.

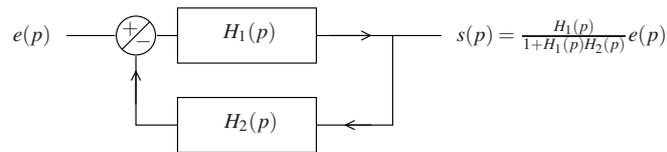
Remarquons que l'ordre de la cascade : H_1 puis H_2 ou H_2 puis H_1 est indifférent.

Association en parallèle : Elle est définie à l'aide avec un additionneur/soustracteur :



Dans ce cas l'additionneur/soustracteur permet de définir la façon dont se fait l'association des fonctions de transfert au nœud.

Association en boucle : De nombreux systèmes ne peuvent être décrits qu'à l'aide d'une boucle. Ils peuvent toujours être décrits avec un soustracteur. Il suffit éventuellement de changer le signe de H_2 :



On a alors : $s(p) = H_1(e(p) - H_2s(p))$ d'où la fonction de transfert du système bouclé : $H(p) = \frac{H_1(p)}{1 + H_1(p)H_2(p)}$

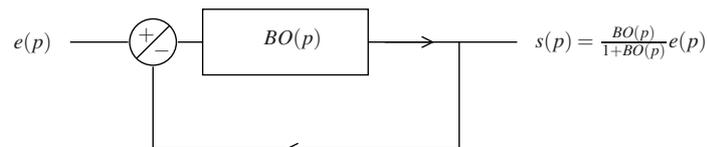
2.3.2 Stabilité des associations de systèmes.

Les trois types d'association passés en revue dans la section précédente, peuvent être rangés en deux groupes. Les associations en série et en parallèle d'une part et les systèmes bouclés d'autre part.

En effet, dans le cas des associations en série, en exprimant H en fonction des Numérateurs et Dénominateurs de H_1 et H_2 : $H = H_1H_2 = \frac{N_1N_2}{D_1D_2}$, les pôles de H sont les pôles de H_1 et de H_2 . Il en est de même pour l'association en parallèle : $H_2 = H_1 \pm H_2 = \frac{N_1}{D_1} \pm \frac{N_2}{D_2} = \frac{N_1D_2 \pm N_2D_1}{D_1D_2}$, les pôles de H sont les pôles de H_1 et de H_2 . Pour conclure, une association en série ou parallèle de systèmes est stable si et seulement si chacun des systèmes associés est stable. Remarque : Considérons le cas particulier où H_1 correspond à un système instable, avec $H_2 = \frac{D_1}{D_2}$ stable. Ce qui donne $H = \frac{N_1D_1}{D_1D_2}$ ne correspond pas à une fonction de transfert de la forme $\frac{N_1}{D_2}$ qui serait stable (pas de zéros à partie réelle positive dans D_2 par hypothèse). En effet on ne peut pour simplifier $H(p)$, diviser par D_1 qui par hypothèse n'est pas toujours nul puisque présentant des zéros.

La stabilité des systèmes bouclés est moins simple. En effet, les pôles de H , c'est à dire les zéros de $1 + H_1H_2$ ne sont à priori pas les pôles de H_1 ou de H_2 . En outre on connaît des exemples tel que l'effet Larsen, où le bouclage rend instable un système stable en boucle ouverte. De même selon le type de bouclage (sur l'entrée - ou sur l'entrée +), un montage à amplificateur opérationnel sera stable ou non. Il est donc nécessaire de déterminer les zéros de $1 + H_1H_2$. Cette étude peut ne pas être simple du tout.

Systèmes à retour unitaire De nombreux systèmes bouclés sont des systèmes à retour unitaire :



L'étude générale de la stabilité des systèmes bouclés se fait pour des systèmes à retour unitaire. Remarquons que si un système bouclé quelconque (H_1 bouclé par H_2 comme précédemment) est stable ou instable en sortie de H_1 il est aussi stable ou instable en sortie de H_2 où il constitue un système à retour unitaire avec $BO = H_1H_2$.

Décomposons $H(p)$. Avec $BO(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$, il vient : $H(p) = \frac{N(p)}{N(p)+D(p)}$. On pose : $Q(p) = N(p) + D(p)$.

Pour que un système à retour unitaire soit stable, il faut et il suffit que le polynôme $Q(p)$, dénominateur de la fonction de transfert en boucle fermée, présente des zéros à partie réelle négative.

2.4 Critère de Routh

Un mathématicien anglais à proposé en 1876 une méthode éponyme qui permet de déterminer si le polynôme $Q(p)$ présente des pôles à partie réelle négative et donc si un système est stable ou non. La démonstration de ce critère est réputée complexe et est largement hors du champ d'un cours de stabilité. Il sera donc admis.

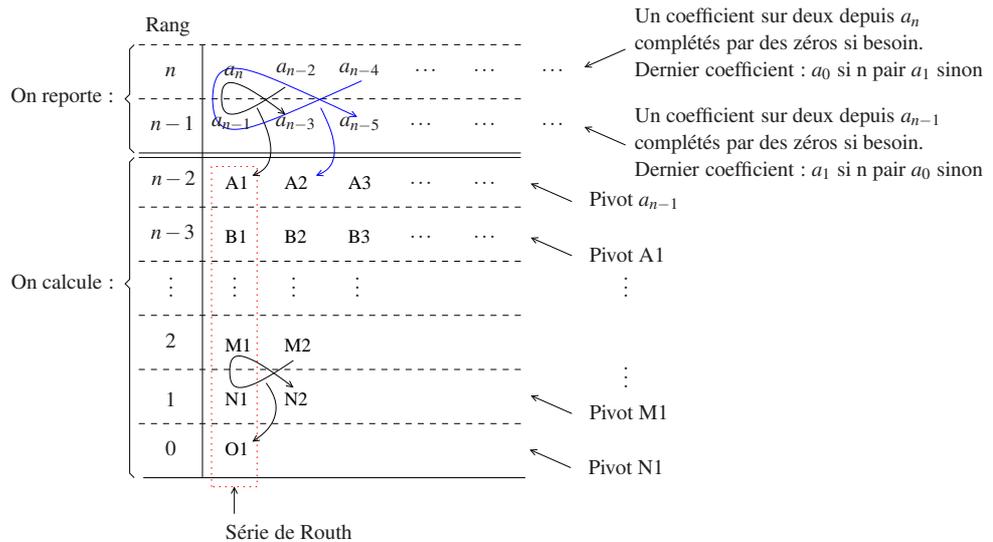
$Q(p)$ est le dénominateur de la fonction de transfert considérée avec $a_n \neq 0$ et $n > 0$.

$$Q(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + a_{n-2} p^{n-2} + \dots + a_1 p + a_0$$

1) Condition nécessaire de stabilité : Tous les coefficients a_i doivent non nul et être de même signe. Sinon $Q(p)$ a des racines à partie réelle positive et e système est instable.

Si au moins un des a_i est nul, le système est juste instable (stable au sens large cf. 2.1).

2) Si tous les coefficients a_i de même signe. En les prenant tous positifs (si ils sont tous négatifs on les multiplie tous par moins -1). On établit le tableau suivant :



Avec

$A1 = \frac{a_{n-2}a_{n-1} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$	$A2 = \frac{a_{n-4}a_{n-1} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$...
$B1 = \frac{a_{n-3}A1 - a_{n-1}A2}{A1}$	$B2 = \frac{a_{n-5}A1 - a_{n-1}A3}{A1}$...
⋮	⋮	
$O1 = \frac{M2N1 - M1N2}{N1}$		

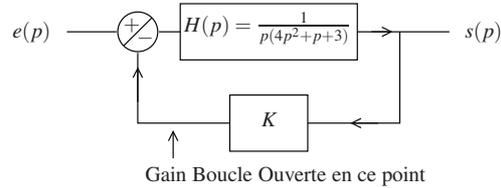
On obtient ainsi la série de Routh qui est la suite : $a_n, a_{n-1}, A_1, B_1, \dots, M_1, N_1, O_1$.

Interprétation de la série :

- Le système est stable si tous les coefficients de la série de Routh sont tous strictement positifs.
- Le nombre de changement de signe de la série est le nombre de pôles instables
- un zéro dans la série indique un pôle juste instable.

Remarquons que l'apparition d'un zéro empêchera de calculer la fin de la série. Si l'on tient vraiment à continuer le calcul de la série. On remplace le zéro par ε que l'on prendra aussi petit que nécessaire et l'on peut continuer le calcul de la série.

Exemple d'application : Soit le système suivant avec $K > 0$:



$$BO(p) = \frac{K}{p(4p^2+p+3)}$$

$$Q(p) = 4p^3 + p^2 + 3p + K$$

Reporté	4	3	0
	1	K	0
Calculé	$\frac{3 \times 1 - 4 \times K}{1} = 3 - 4K$	$\frac{0 \times 1 - 3 \times 0}{1} = 0$	
	$\frac{K(3 - 4K - 1) - 1 \times 0}{3 - 4K} = K$		

Le système est stable en boucle fermée si et seulement si $3 - 4K > 0$ soit $K > 3/4$

Le critère de Routh permet toujours de déterminer la stabilité d'un système. Cependant, pour pouvoir l'appliquer, la fonction de transfert du système doit être connue analytiquement. Ce n'est souvent pas le cas en pratique. Il n'est pas rare de ne pouvoir que mesurer la réponse en Boucle Ouverte d'un système. Il serait intéressant de disposer d'un critère de stabilité pouvant être appliqué sur la mesure de la fonction de transfert en boucle ouverte. C'est le critère de Nyquist.

2.5 Critère de Nyquist

Le critère de Nyquist repose sur le théorème de Cauchy (encore un) :

2.5.1 Théorème de Cauchy

Soit $F(s)$ une fonction rationnelle de la variable complexe s . $F(s)$ admet P pôles et Z zéros.
Soit Ω un domaine connexe de \mathbb{C} (sans trou) et $\partial\Omega$ le contour qui limite ce domaine, tel que les pôles et les zéros de $F(s)$ soient strictement inclus dans Ω (pas sur le bord $\partial\Omega$).

Lorsque $M(s)$ un point d'affixe s parcourt le contour $\partial\Omega$ une fois dans un sens donné (horaire ou trigonométrique), son image par $F(s)$, $Q = M(F(s))$ tourne alors $Z - P$ fois dans le même sens autour de l'origine O . Le nombre de tours est compté algébriquement (-1 fois dans un sens signifie une fois en sens inverse).

La démonstration de ce théorème est assez simple. La fonction $F(s)$ est une fonction rationnelle admettant P pôles p_u et Z zéros z_v , elle peut donc se mettre sous la forme générale :

$$F(s) = K \frac{\prod_1^Z (s - z_v)}{\prod_1^P (s - p_u)} \quad (59)$$

où $K \in \mathbb{C}$ est une constante.

$F(s)$ est donc un complexe d'argument :

$$\arg(F(s)) = \arg(K) + \sum_{v=1}^Z \arg(s - z_v) - \sum_{u=1}^P \arg(s - p_u) \quad (60)$$

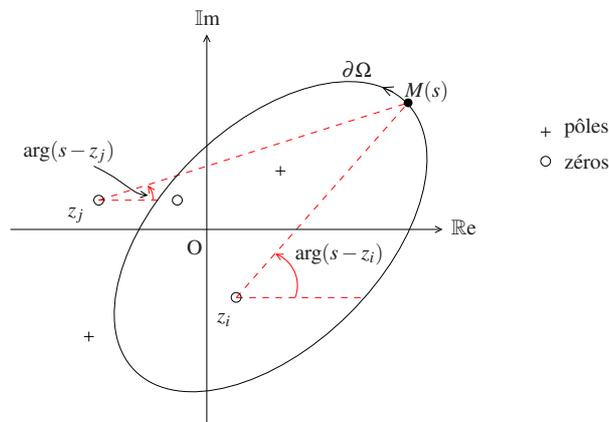


FIGURE 13 – Théorème de Cauchy.

La figure 13 illustre la situation. Considérons le zéro z_i dans cette figure. Écrire $s - z_i$ revient à se placer dans le repère centré en z_i . L'argument de $s - z_i$ est alors l'argument de s dans ce repère comme illustré ci-dessus. Lorsque M effectue un tour, dans le sens trigonométrique par exemple, du contour $\partial\Omega$, comme $z_i \in \Omega$, l'argument de $s - z_i$ varie de $+2\pi$ (+1 tour dans le sens trigonométrique). Compte-tenu de l'équation 60, Q effectue alors un $+1$ tour autour de l'origine puisque son argument varie de $+2\pi$.

Si on considère un point en dehors de Ω comme z_j par exemple, comme M ne lui tourne pas autour, l'argument de M dans le repère centré sur z_j ne varie pas en valeur absolue de 2π . Il part de sa valeur initiale et y revient à chaque tour de M autour de $\partial\Omega$. Il contribue ainsi à zéro tour de Q .

Un raisonnement identique peut être appliqué à chacun des pôles de $F(s)$. Compte tenu du signe - dans l'équation 60 devant la somme des arguments des pôles, chaque pôle de $F(s)$ contribue de -1 tour de Q de l'origine.

Finalement le nombre de tours est $Z - P$ dans le sens trigonométrique, c'est-à-dire dans le même sens de rotation que M le long de $\partial\Omega$.

2.5.2 Application à la stabilité d'un SLI bouclé.

Ce type de système présente, comme nous l'avons vu section 2.3.2, une fonction de transfert en boucle fermée $BF(p)$ de la forme :

$$BF(p) = \frac{BO(p)}{1 + BO(p)} \quad (61)$$

ou $BO(p)$ est la fonction de transfert en boucle ouverte.

Un tel système est stable si $1 + BO(p)$ ne possède aucune racine à partie réelle positive. L'idée est d'utiliser le théorème de Cauchy pour compter les zéros à partie réelle positive de $1 + BO(p)$.

Remarque préliminaire : $1 + BO(p)$ est une fraction rationnelle le théorème de Cauchy s'applique donc.

Les zéros à partie réelle positive de $1 + BO(p)$ sont situés dans la partie droite du plan complexe comme présenté figure 14.

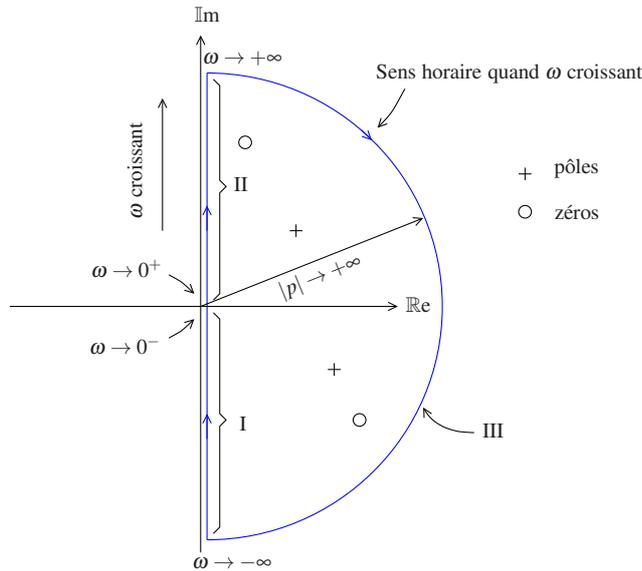


FIGURE 14 – Contour de Nyquist.

Le contour de Nyquist présenté dans cette figure entoure tous les Z zéros à partie réelle strictement positive de $1 + BO(p)$, et ses P pôles à partie réelle positive.

L'image du contour de Nyquist par $BO(p)$ s'appelle le diagramme de Nyquist.

On parcourt en général les segments du contour de Nyquist dans l'ordre I, II puis III (sens horaire). En effet pour parcourir le segment I, on prend $p = j\omega$ ce qui revient à considérer la réponse fréquentielle du système en boucle ouverte $BO(\omega)$, et on travaille de façon naturelle à fréquence croissante. On pourrait cependant parcourir ce contour en sens inverse. On notera dans ce qui suit \hat{N} les tours comptés dans le sens horaire et \tilde{N} les tours comptés dans le sens trigonométrique.

Quant $M(p)$ parcourt le contour dans le sens horaire, $Q = M(1 + BO(p))$ effectue $\hat{N} = Z - P$ tours autour de l'origine dans le sens horaire. Le nombre de zéros de $1 + BO(p)$ est donc égal d'après le théorème de Cauchy à :

$$Z = \hat{N} + P \quad (62)$$

Le système est donc stable si $\hat{N} = -P$ ou encore si $\tilde{N} = P$. Le système est donc stable si l'image du contour de Nyquist par $1 + BO(p)$ tourne N fois dans le sens trigonométrique autour de l'origine.

Si l'image du contour de Nyquist par $1 + BO(p)$ entoure N fois l'origine, alors décalant cette image vers la gauche d'une unité, elle entoure N fois le point -1. Ce décalage est obtenu en soustrayant 1 à $1 + BO(p)$ c'est-à-dire en considérant le diagramme de Nyquist de $BO(p)$.

Finalement le critère de Nyquist s'énonce comme suit :

Un système bouclé à retour unitaire dont le gain en boucle ouverte $BO(p)$ présente P pôles à partie réelle positive est stable, si et seulement si son diagramme de Nyquist parcouru en fréquences croissantes entoure P fois le point -1 (point critique) dans le sens trigonométrique.

2.5.3 Exemples

Exemple 1 : BO stable BF stable

$$BO(p) = \frac{K}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$$

La fonction de transfert en boucle ouverte présente 2 pôles :

$$p_1 = -\frac{1}{\tau_1} \text{ et } p_2 = -\frac{1}{\tau_2}$$

$$\text{Avec } \begin{cases} K = 5 \\ \tau_1 = -1 \\ \tau_2 = -0,5 \end{cases}$$

Les pôles sont à partie réelle négative. Le système est stable en boucle ouverte.

Nombre de pôles à partie réelle positive : $P=0$.

Nombre de tours dans le sens trigonométrique autour du point critique (-1) : $\hat{N} = 0$

$\hat{N} = P$, le système bouclé est stable.

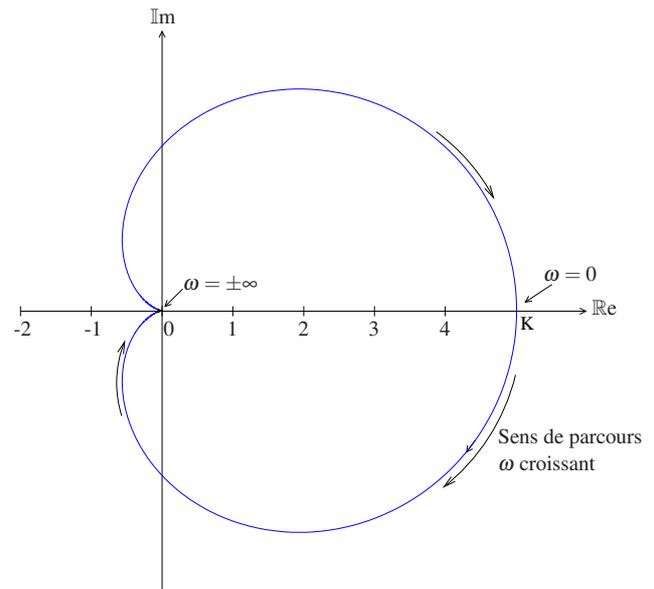


Diagramme de Nyquist de $BO(p)$

Exemple 2 : BO instable BF instable

$$BO(p) = \frac{20}{(p-1)(p^2+5p+25)}$$

Trois pôles : $p_{1,2} = \frac{-5 \pm 5j\sqrt{3}}{2}$ et $p_0 = 1$.

p_0 instable et $p_{1,2}$ stables.

Nombre de pôles à partie réelle positive : $P=1$.

Nombre de tours autour du point critique : $\hat{N} = 0$

$\hat{N} \neq P$, le système bouclé est instable.

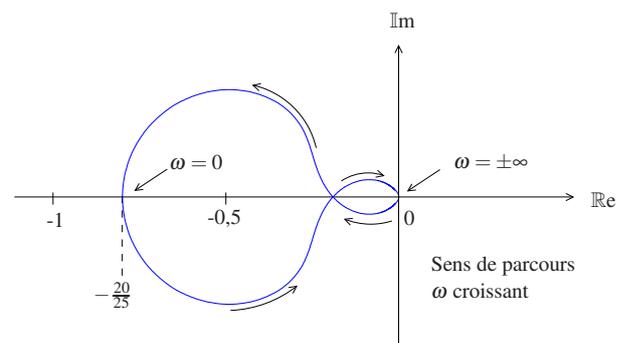


Diagramme de Nyquist de $BO(p)$

Exemple 3 BO instable BF stable

$$BO(p) = \frac{K}{(p+1)(4p-1)}$$

$$\text{Deux pôles : } \begin{cases} p_1 = -1 & \text{stable} \\ p_2 = \frac{1}{4} & \text{instable} \end{cases}$$

Nombre de pôles à partie réelle positive : $P=1$.

Nombre de tours dans le sens trigonométrique autour du point critique :

$$\begin{cases} \hat{N} = 1 & \text{Si } K > 1 \\ \hat{N} = 0 & \text{Si } K < 1 \end{cases} \quad (\text{tracé pour } K=5)$$

le système bouclé est stable si $K > 1$.

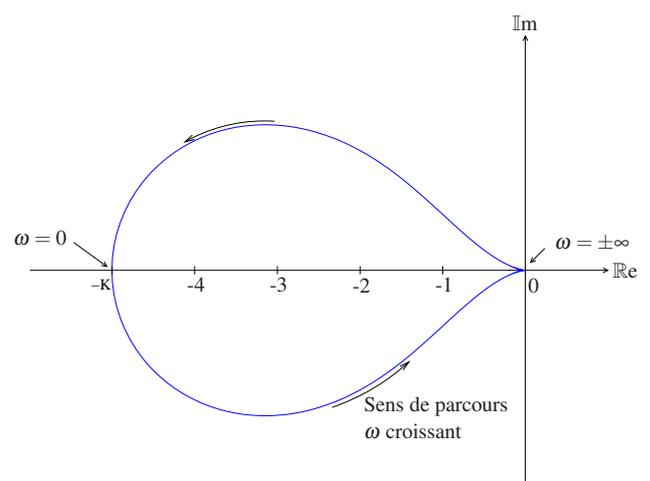


Diagramme de Nyquist de $BO(p)$

2.5.4 Cas particulier des fonctions de transfert en boucle ouverte stables au sens large.

Nous n'avons, dans ce qui précède, considéré que la stabilité au sens strict. Les pôles de $BO(p)$ étaient à partie réelle strictement positive et ne se situaient pas sur l'axe imaginaire. Que faire lorsque $BO(p)$ est stable au sens large, c'est-à-dire qu'il y a un pôle ou plus sur l'axe imaginaire. Dans ce cas le théorème de Cauchy ne s'applique pas. Il est alors nécessaire en modifiant le contour de Nyquist d'inclure ou d'exclure ces pôles.

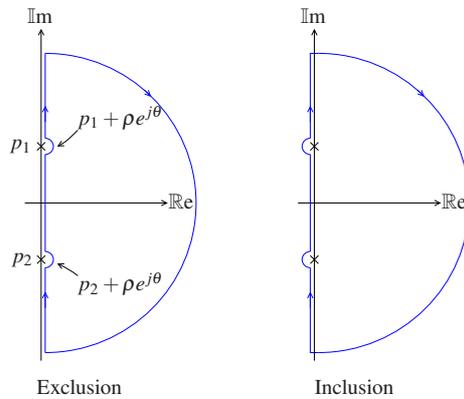


FIGURE 15 – Contour de Nyquist modifié pour traiter le cas de pôles à partie réelle nulle.

Si le nouveau contour inclut les pôles stables à partie réelle nulle, ils sont comptés avec P . Ils ne le sont pas dans le cas contraire.

Exemple classique de l'intégrateur

$$BO(p) = \frac{K}{p}$$

Un pôle nul : stable au sens large : $P = 0$

Le contour de Nyquist modifié exclut le pôle nul : $(0, 0)$.

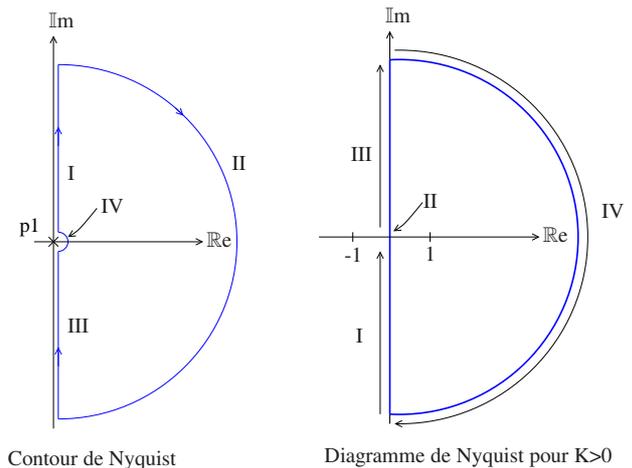
La partie IV dans le diagramme de Nyquist correspond à l'évitement du pôle : $p = \varepsilon e^{i\theta}$, avec $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Soit $BO(p) = K \frac{1}{\varepsilon} e^{-i\theta} \cdot e^{-i\theta}$ décrit l'arc de cercle de rayon 1 à droite de l'axe des imaginaires.

Nombre de tours autour du point critique :

$$\begin{cases} \widehat{N} = 0 & \text{Si } K \geq 0 \\ \widehat{N} = 1 & \text{Si } K < 0 \end{cases} \quad (\text{tracé pour } K > 0)$$

le système bouclé est stable si $K \geq 0$.



2.6 Critère du revers

Le critère de Nyquist est très général, il s'applique dans tous les cas.

Il existe un critère moins général : le critère du revers. Il est moins général car il ne s'applique que dans le cas où la réponse en boucle ouverte est stable. Il ne permet pas en particulier de discuter de la stabilisation d'un système par contre réaction.

Dans le cas où $BO(p)$ est stable on a : $P = 0$. Dans ce cas le critère de Nyquist nous indique que pour que le système bouclé à retour unitaire soit stable, il faut que $\widehat{N} = 0$. Pour cela il suffit que le diagramme de Nyquist passe à droite du point critique lorsque l'on parcourt le contour de Nyquist sur les fréquences positives. En effet compte tenu de la symétrie de la partie réelle et de l'antisymétrie de la partie imaginaire de toute fonction de transfert (cf. section 1), passer à droite du point critique garantit qu'il ne sera pas entouré. On aura bien dans ce cas $\widehat{N} = 0$.

Finalement le critère du revers s'énonce comme suit :

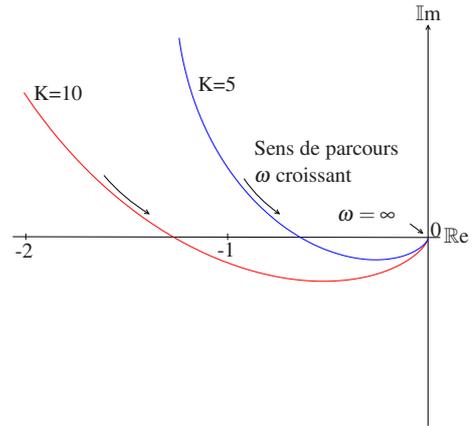
Un système bouclé à retour unitaire stable en boucle ouverte est stable en boucle fermée si et seulement si son diagramme de Nyquist passe à droite du point critique.

Exemple d'application du critère du revers

$$BO(p) = \frac{K}{(p+1)^3}. \text{ Stable en boucle ouverte.}$$

Le tracé pour $K = 5$ laisse le point critique à gauche. Le système bouclé est stable pour $K = 5$.

Le tracé pour $K = 10$ passe à gauche du point critique. Le système bouclé est instable pour $K = 10$.



2.7 Marges de Gain, Marge de phase

Le critère du revers définit une limite absolue de stabilité. En pratique avec les diverses perturbations (bruit, paramètres d'influences extérieurs), il convient de respecter ce critère avec une marge de "sécurité" qui garantisse qu'elles ne viennent pas déstabiliser un système théoriquement stable. On définit ainsi la marge de gain et la marge de phase qui correspondent respectivement à l'augmentation de gain et de phase nécessaires pour passer d'un système stable à instable.

2.7.1 Marges de gain et de phase dans le plan de Nyquist

Dans le plan de Nyquist, la marge de gain peut être obtenue en considérant le critère du revers. Le diagramme de Nyquist laisse le point critique à gauche. C'est-à-dire que lorsque la phase de $BO(p)$ vaut 180° , son module G_{180} est inférieur à 1. Pour rendre le système stable, il faut augmenter le module de $BO(p)$ de M_g la marge de gain absolue comme présenté figure 16. On a alors :

$$M_g = 1 - G_{180} \tag{63}$$

Remarquons qu'un système dont la phase du gain en boucle ouverte n'atteint jamais 180° est toujours stable.

On exprime souvent en pratique la marge de gain en relatif. En effet, pour rendre le système instable, on peut aussi multiplier le module de $BO(p)$ par $\frac{1}{G_{180}}$. On exprime alors souvent la marge de gain en décibel :

$$M_{g\text{dB}} = 20 \log_{10} \left(\frac{1}{G_{180}} \right) \tag{64}$$

En ce qui concerne la marge de phase, elle est définie si le module de $BO(p)$ atteint ou dépasse 1 pour une fréquence donnée ω_φ . Si une telle fréquence n'existe pas, une variation de la phase seule ne peut pas rendre le système instable et la marge de phase est infinie. Si la phase de $BO(p)$ correspondant à la fréquence ω_φ , $\varphi = \arg(BO(j\omega_\varphi))$, augmente jusqu'à atteindre 180° (cf. figure 16) alors le système devient instable. Cela permet de définir la marge de phase (en degré) comme :

$$M_\varphi = \arg(BO(j\omega_\varphi)) - 180^\circ \tag{65}$$

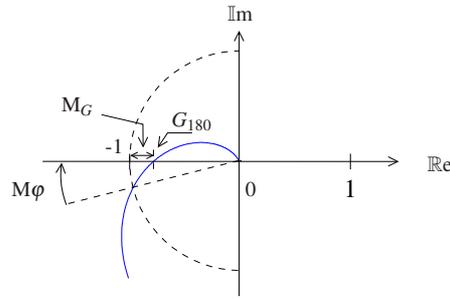


FIGURE 16 – Marges de gain et de phase dans le plan de Nyquist

2.7.2 Marges de gain et de phase dans le diagramme de Bode

Les marges de gain et de phase sont obtenues directement si l'on trace le diagramme de Bode de $BO(p)$, ce qui permet de discuter simplement de la stabilité des systèmes à l'aide du critère du revers, comme présenté figure 17

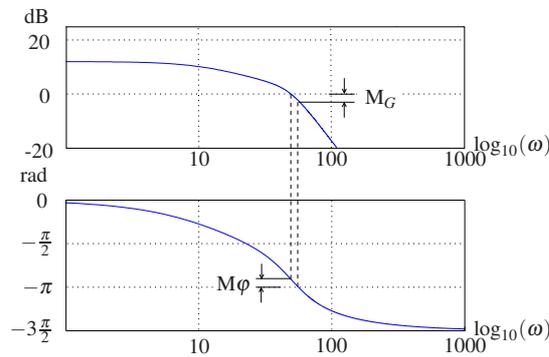


FIGURE 17 – Marges de gain et de phase dans le diagramme de Bode

2.7.3 Plan de Black et abaque de Black-Nichols

Il existe en automatique c'est-à-dire pour la science qui a pour but le contrôle des processus une autre représentation que Nyquist et Bode. C'est la représentation dans le plan de Black.

Le plan de Black est un plan dont l'axe horizontal est l'axe des phases gradué en degrés. L'axe des ordonnées est lui l'axe des modules gradué en dB. L'axe horizontal est en général gradué de -360° à zéro, et l'axe vertical est gradué de façon symétrique par rapport à 0 dB de telle sorte que le point critique soit situé au milieu du tracé.

Avec ces coordonnées, il est aisé de tracer comme pour les représentations de Nyquist et de Bode le lieu de toute fonction de transfert en reportant la phase et le module de cette dernière.

Abaque de Black-Nichols On a déjà évoqué le fait que le point critique se situe au milieu du tracé. On conçoit aisément qu'avec une telle représentation, il est facile de savoir à quelle distance on se trouve du point critique, et donc que l'on pourra aisément déterminer la marge de gain et de phase. Or du point de vue de la stabilité des systèmes, il serait intéressant de pouvoir, en traçant le lieu de $BO(p)$, déterminer non seulement la stabilité du système bouclé, mais aussi le module et le gain de sa fonction de transfert.

La fonction de transfert boucle ouverte $BO(p)$ et la fonction de transfert boucle fermée $BF(p)$ sont liées par la relation 61. On trace donc dans le plan de Black les iso-modules et les iso-phases de $\frac{z}{1+z}$, avec $z \in \mathbb{C}$. On construit ainsi l'abaque de Black qui est présentée figure 18.

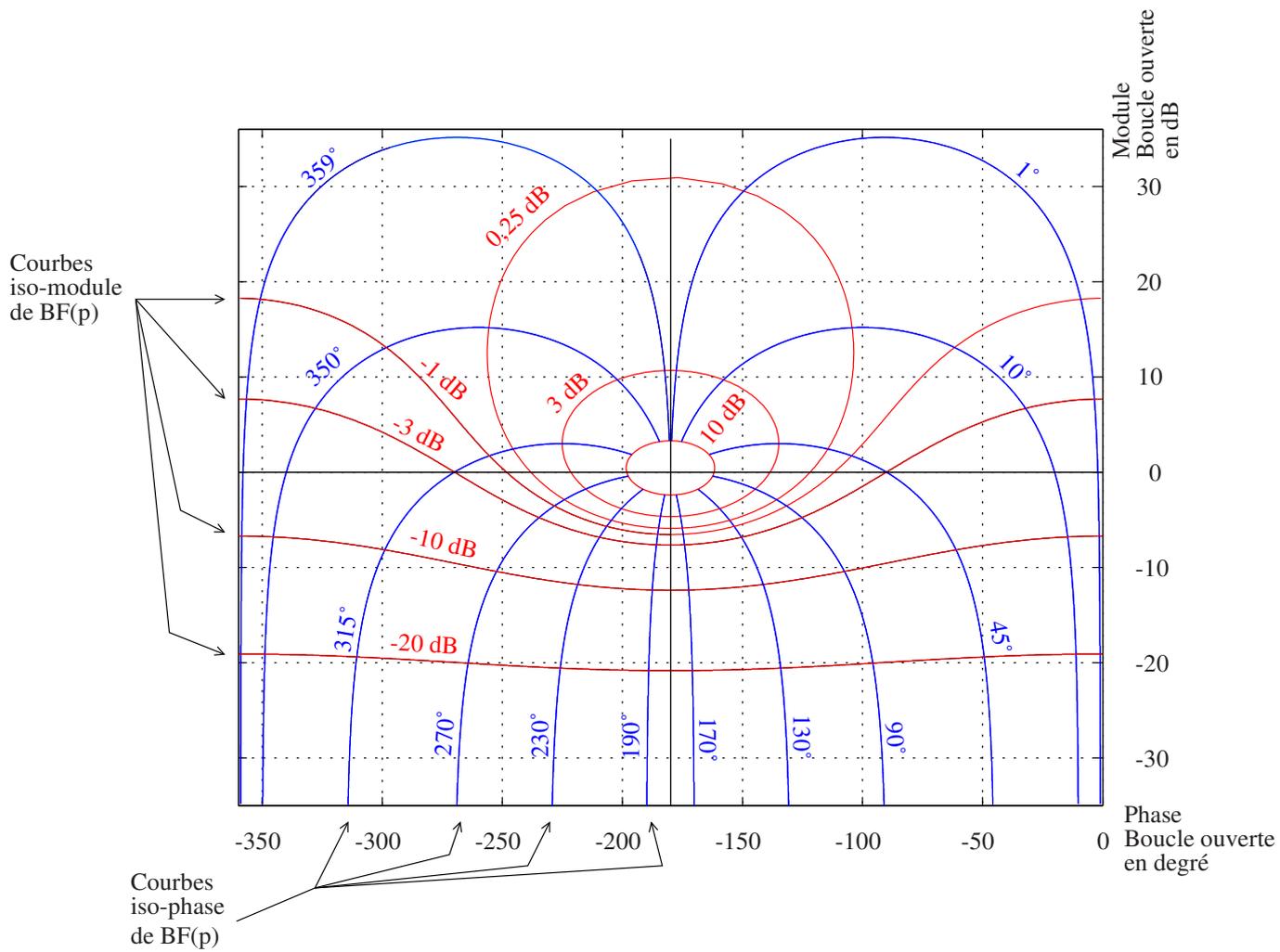


FIGURE 18 – Abaque de Black-Nichols

Marge de gain et de phase dans le plan de Black Traçons par exemple dans le plan de Black le lieu de $BO(p) = \frac{K}{(p/1.3+1)(p^2+5p+25)}$. Cet exemple est déjà celui utilisé pour les tracés des figures 16 et 17 avec $K = 100$. Le lecteur vérifiera que les pôles de $BO(p)$ sont à partie réelle positive. On obtient le tracé de la figure 19 pour $K=150$ et $K = 150$

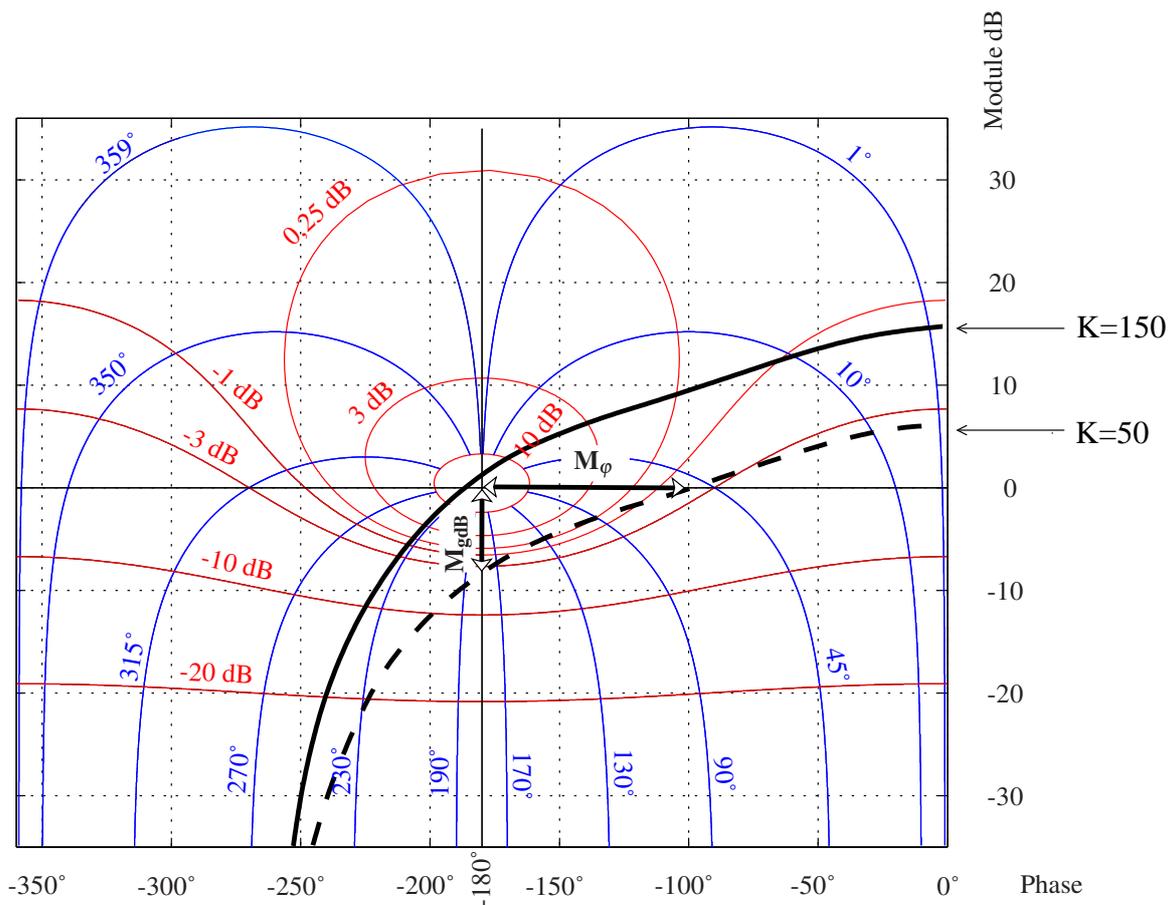


FIGURE 19 – Marge de Gain et de phase dans le plan de Black

Dans cette figure, les doubles flèches repèrent la marge de gain pour la flèche verticale, et la marge de phase pour la flèche horizontale dans le cas où $K = 50$. On peut lire directement que la marge de gain est approximativement de 8 dB (hauteur de la flèche verticale). La marge de phase vaut quant à elle : $M_\phi = 180 - 100 = 80^\circ$.

Le tracé pour $K = 150$, nous montre comment lire la stabilité en boucle fermée. En effet, comme la courbe passe au dessus du point critique, on est passé à droite de ce dernier dans le plan de Nyquist (le module est supérieur à 1 pour une phase de 180°) ce qui signifie que pour $K = 150$ le système en boucle fermée est instable.

On peut énoncer le critère du revers dans le plan de Black :

Un système bouclé à retour unitaire, stable en boucle ouverte, dont le lieu du gain en boucle ouverte $BO(p)$ passe au dessus du point critique dans le plan de Black, est instable en boucle fermée.

3 Tables & Annexes

3.1 Propriétés principales de la transformation de Fourier \mathcal{F} et relations associées

Propriété	Domaine temporel	Domaine fréquentiel
Transformation directe	$x(t)$	$X(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi\nu t} dt$
Transformation inverse	$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu)e^{j2\pi\nu t} d\nu$	$X(\nu)$
Dualité (Double application)	$\mathcal{F}(\mathcal{F}(x(t))) = x(-t)$	
Conjugaison	$y(t) = x^*(t)$	$Y(\nu) = X^*(-\nu)$
Multiplication par une constante $a > 0$	$y(t) = x(at)$	$Y(\nu) = \frac{1}{a} X(\frac{\nu}{a})$
Translation temporelle (retard)	$y(t) = x(t - t_0)$	$Y(\nu) = X(\nu) e^{-j2\pi\nu t_0}$
Translation fréquentielle (Changement de fréquence)	$y(t) = x(t) e^{+j2\pi\nu_0 t}$	$Y(\nu) = X(\nu - \nu_0)$
Dérivation	$y(t) = \frac{d^n}{dt^n} x(t)$	$Y(\nu) = (j2\pi\nu)^n X(\nu)$
Dérivation 2	$\frac{d}{dt} \mathcal{F}(x(t)) = -j2\pi \mathcal{F}(tx(t))$	
Linéarité (Superposition)	$y(t) = ax(t) + by(t)$	$Y(\nu) = aX(\nu) + bY(\nu)$
Multiplication	$z(t) = x(t)y(t)$	$Z(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu_0)Y(\nu - \nu_0) d\nu_0$
Convolution	$z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t - \tau) d\tau$	$Z(\nu) = X(\nu)Y(\nu)$
Décalage par convolution par la distribution de Dirac	$y(t) = x(t) * \delta(t_0) = x(t - t_0)$	$Y(\nu) = X(\nu) e^{-j2\pi\nu t_0}$
Théorème de Parseval Plancherel	$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) ^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu) ^2 d\nu$	

Table illustrée de transformées de Fourier

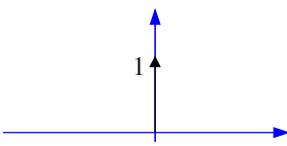
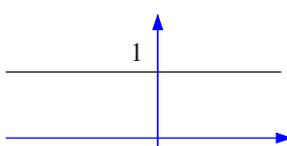
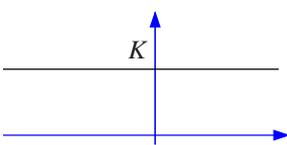
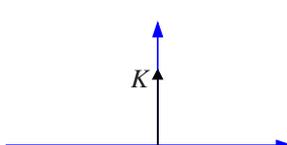
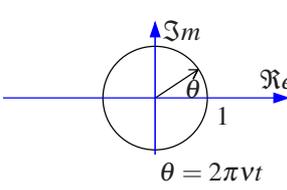
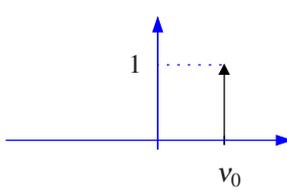
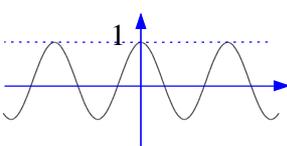
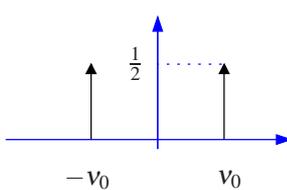
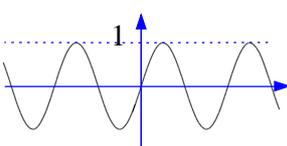
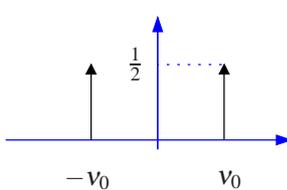
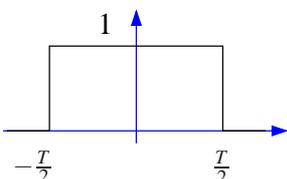
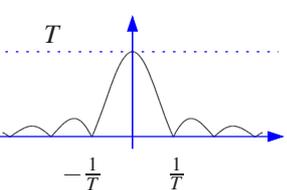
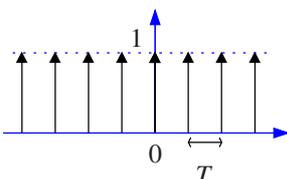
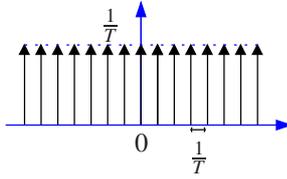
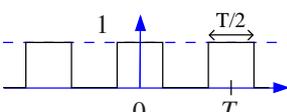
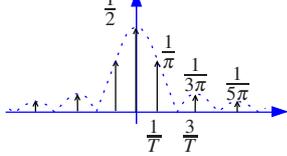
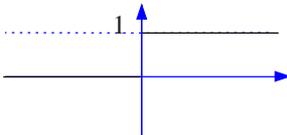
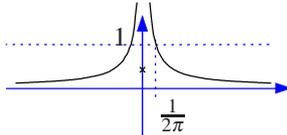
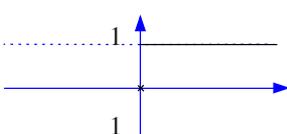
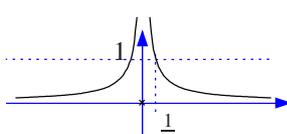
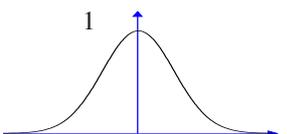
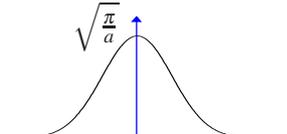
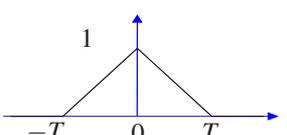
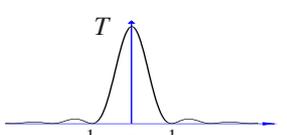
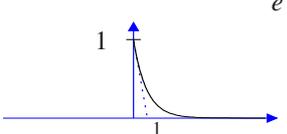
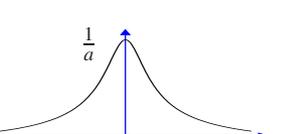
$x(t)$	$X(\nu)$	$ X(\nu) $
$\delta(t)$ 	1	
Dirac		
K 	$K\delta(\nu)$	
Constante		
$e^{j2\pi\nu_0 t}$ 	$\delta(\nu_0)$	
Exponentielle complexe (déphasage)		
$\cos(2\pi\nu_0 t)$ 	$\frac{1}{2}(\delta(-\nu_0) + \delta(\nu_0))$	
cosinus		
$\sin(2\pi\nu_0 t)$ 	$\frac{1}{2}j(\delta(-\nu_0) - \delta(\nu_0))$	
sinus		
$\Pi_T(t)$ 	$T \frac{\sin(\pi\nu T)}{\pi\nu T}$	
Impulsion rectangulaire		

Table illustrée de transformées de Fourier (suite)

Les valeurs aux pôles s'entendent comme valeur principale.

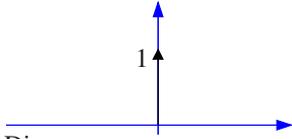
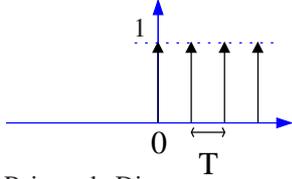
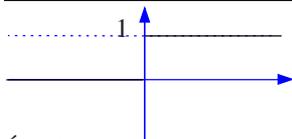
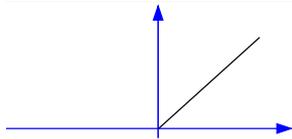
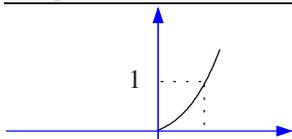
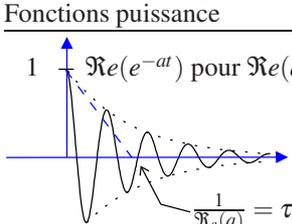
$x(t)$	$X(v)$	$ X(v) $
$\text{III}_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT)$ 	$\frac{1}{T} \text{III}_{\frac{1}{T}}(v)$ $=$ $\frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(v-n\frac{1}{T})$	
Peigne de Dirac		
$\text{III}_T(t) * \Pi_{\frac{T}{2}}(t)$ 	$\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\delta(v - (2n+1)\frac{1}{T})}{(2n+1)}$	
Signal carré périodique		
$H(t)$ 	$\frac{1}{2} \delta(v) - j \frac{1}{2\pi v}$	
Heaviside		
$\text{sgn}(t)$ 	$-\frac{j}{\pi v}$	
Fonction Signe		
e^{-at^2} 	$\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\pi^2}{a} v^2}$	
Gaussienne		
$\text{Tri}_T(t)$ 	$T \frac{\sin^2(vT)}{(vT)^2}$	
Impulsion triangulaire		
$e^{-at}, a \geq 0$ 	$\frac{1}{a+j2\pi v}$	
Impulsion exponentielle		

3.2 Propriétés principales de la transformation de Laplace \mathcal{L} et relations associées

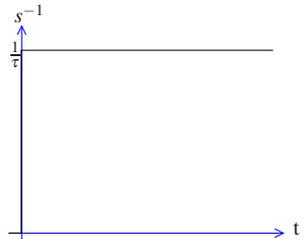
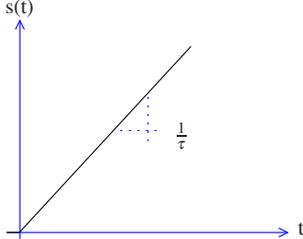
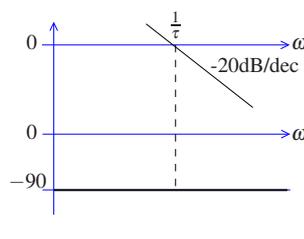
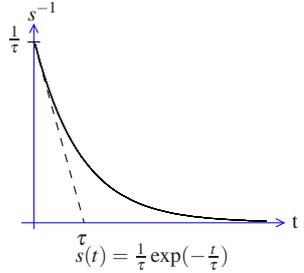
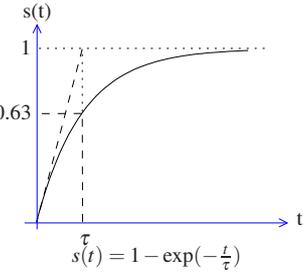
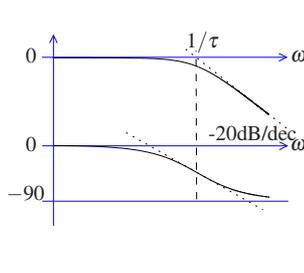
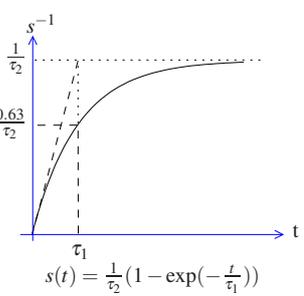
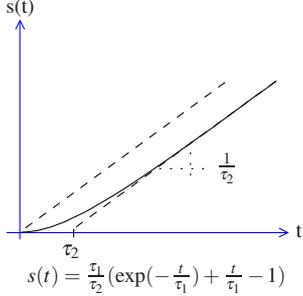
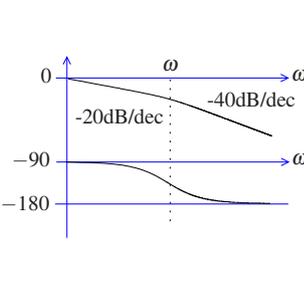
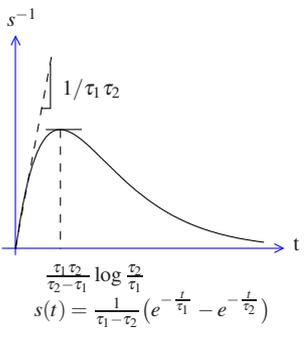
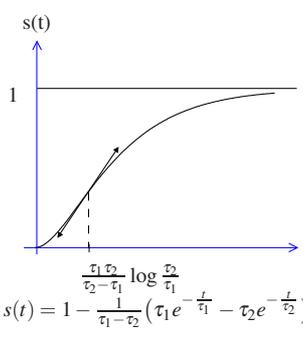
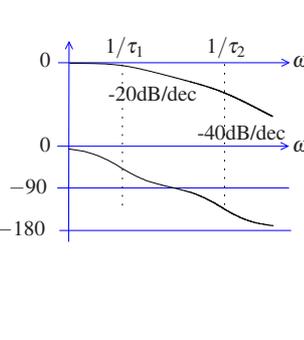
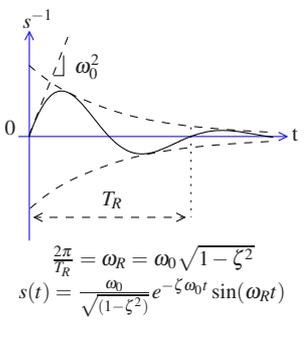
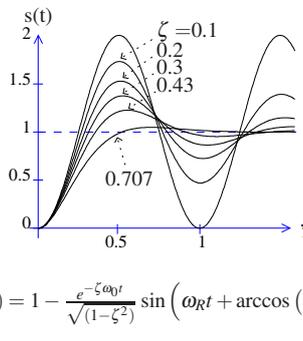
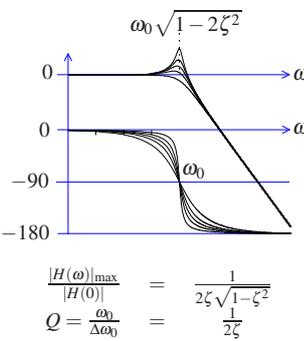
Propriété	Domaine temporel	Domaine de Laplace
Transformation directe	$x(t) \cdot \mathcal{U}(t)$	$X(p) = \int_0^{+\infty} x(t)e^{-pt} dt$
Transformation inverse	$x(t) = \frac{1}{2j\pi} \int_0^{+\infty} X(p)e^{pt} dp$	$X(p)$
Conjugaison	$y(t) = x^*(t)$	$Y(p) = X^*(-p)$
Multiplication par une constante $a > 0$	$y(t) = x(at)$	$Y(p) = \frac{1}{ a } X\left(\frac{p}{a}\right)$
Translation temporelle (retard)	$y(t) = x(t - t_0)$	$Y(p) = X(p)e^{-t_0 p}$
Translation fréquentielle (Changement de fréquence)	$y(t) = x(t)e^{+p_0 t}$	$Y(p) = X(p - p_0)$
Dérivation simple	$y(t) = \frac{\partial}{\partial t} x(t)$	$Y(p) = pX(p) - x(0^-)$
Dérivation double	$y(t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} x(t)$	$Y(p) = p^2 X(p) - px(0^-) - \frac{\partial}{\partial t} x(t=0^-)$
Dérivation ordre n	$y(t) = \frac{\partial^n}{\partial t^n} x(t)$	$Y(p) = p^n X(p) - p^{n-1}x(0^-) - p^{n-2}\frac{\partial}{\partial t}x(0^-) - \dots - \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}x(0^-)$
Dérivation dans l'espace de Laplace	$y(t) = -tx(t)$	$Y(p) = \frac{\partial}{\partial p} X(p)$
Linéarité (Superposition)	$y(t) = ax(t) + by(t)$	$Y(p) = aX(p) + aY(p)$
Multiplication	$z(t) = x(t)y(t)$	$Z(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(p')Y(p-p')dp'$
Convolution	$z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$	$Z(p) = X(p)Y(p)$
Théorème de la valeur finale	$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)$	$\lim_{p \rightarrow 0^+} pX(p)$
Théorème de la valeur initiale	$\lim_{t \rightarrow 0^+} x(t)$	$\lim_{p \rightarrow +\infty} pX(p)$
Théorème de la somme	$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)$	$\lim_{p \rightarrow 0} X(p)$

Table illustrée de transformées de Laplace

Dans ce tableau a est une constante complexe, t , τ et ω sont des constantes réelles et n est un entier.

GRAPHIQUE	$x(t)$	$X(p)$
 Dirac	$\delta(t)$	1
 Peigne de Dirac	$\sum_{n=0}^{+\infty} \delta(t - nT)$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_0^n e^{-npT} = \frac{1}{1 - e^{-pT}}$
 Échelon unité	$U(t)$	$\frac{1}{p}$
 Rampe	t	$\frac{1}{p^2}$
 Fonctions puissance	t^m	$\frac{m!}{p^{m+1}}$
 Impulsion exponentielle	$a \in \mathbb{C}$ $a = \frac{1}{\tau} + j\omega$ $e^{-at} = e^{-t/\tau} e^{-j\omega t}$	$a \in \mathbb{R}^+$ $a = 1/\tau$ $e^{-t/\tau}$
Echelon exponentielle	$1 - e^{-t/\tau}$	$\frac{1}{p(1 + \tau p)}$
Rampe exponentielle	$t e^{-at}$	$\frac{1}{(p+a)^2}$
cosinus	$\cos(\omega t)$	$\frac{p}{(p^2 + \omega^2)}$
cosinus	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(p^2 + \omega^2)}$
cosinus décroissant	$e^{-at} \cos(\omega t)$	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$
sinus décroissant	$e^{-at} \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$

3.3 Table des réponses temporelles et diagrammes de Bode de quelques fonctions de transfert usuelles.

Fonction de transfert	Réponse impulsionnelle	Réponse indicielle	Bode (Échelle horiz logarithmique)
Intégrateur idéal $H(p) = \frac{1}{\tau p}$			
Premier ordre $H(p) = \frac{1}{1+\tau p}$			
Second ordre 1 pôle nul (intégrateur) $H(p) = \frac{1}{\tau_2 p(1+\tau_1 p)}$			
Second ordre avec pôles réels $\frac{1}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$ $\frac{1}{1+(\tau_1+\tau_2)p+\tau_1\tau_2 p^2}$			
Second ordre avec pôles complexes $\frac{1}{1+\frac{2\zeta}{\omega_0}p+\frac{1}{\omega_0^2}p^2}$ $\zeta < 1$			

Système de référence : 1^{er} dépassement de la réponse indicielle = 20% \Rightarrow $\begin{cases} \zeta = 0,43 \\ \frac{|H(\omega)|_{\max}}{|H(0)|} = 1,3 \end{cases}$

3.4 L'Algorithme FFT de calcul de la DFT et relation avec la TF.

La transformée de Fourier (TF) $S(\nu)$ d'un signal $s(t)$ est définie comme suit :

$$S(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-j2\pi\nu t} dt \quad (66)$$

avec $j = \sqrt{-1}$.

Application à un signal échantillonné : Discrete Fourier Transform

Un signal $s(t)$ est échantillonné régulièrement pendant une durée T avec N points. Il en résulte la suite de nombres $x_k = s(k\frac{T}{N})$ avec $k \in [0, N-1]$. On a pris ici comme valeur zéro pour le temps, l'instant du premier échantillonnage.

Le signal n'est connu (échantillonné) que pendant un temps T , alors que la TF est une intégrale de $-\infty$ à $+\infty$. Pour pouvoir calculer quand même la transformée de Fourier, on considère que le signal est nul en dehors de l'intervalle de temps où il est mesuré. La transposition directe de l'équation 66 au signal échantillonné donne (CF annexe 3.5) :

$$X(\nu) = \sum_{k=0}^{N-1} s(k\frac{T}{N})e^{-j2\pi\nu k\frac{T}{N}} \quad (67)$$

La DFT est donc une suite de N nombres définis par l'équation 67. La fréquence d'échantillonnage est $\nu_e = \frac{N}{T}$. Compte-tenu du théorème de Shannon, $\nu \in [-\frac{\nu_e}{2}, \frac{\nu_e}{2}]$, cela donne une étendue spectrale $\frac{N}{T}$. Il est d'usage de quantifier la DFT sur le même nombre de points que le signal soit N points (ce n'est sans doute pas obligatoire et il doit être possible échantillonner plus le spectre même si ce n'est pas ce qui est fait en général). Le pas fréquentiel est donc $\frac{1}{T}$, et $\nu = n\frac{1}{T}$ où $n \in [0, N-1]$ est l'index de l'échantillon. En notant $X(n\frac{1}{T}) = X_n$, et en remplaçant ν par sa valeur discrétisée dans la somme, Il vient :

$$\begin{aligned} X_n &= \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-\frac{j2\pi nk}{N}} \\ X_n &= DFT(\{x_k\}, n) \end{aligned} \quad (68)$$

Cette équation définit la DFT (Direct Fourier Transform).

Propriété : $X_{n+N} = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-\frac{j2\pi(n+N)k}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-\frac{j2\pi nk}{N}} e^{-j2\pi k} = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-\frac{j2\pi nk}{N}} = X_n$,
soit :

$$X_{n+N} = X_n \quad (69)$$

La DFT admet N comme période.

Remarque : Par nature, la DFT est un spectre discret, c'est à dire un spectre de raies. La plus petite fréquence non nulle contenue dans ce spectre est $\nu_0 = \frac{1}{T}$ et toutes les autres en sont multiples c'est donc une série de Fourier. Par conséquence, le signal à variable continue $s'(t)$ qui est à l'origine de ce spectre est périodique de période T .

Finalement si on reste dans le domaine des signaux à variable continue, tout se passe comme si la DFT du signal était la TF du signal $s(t)$ enregistré pendant le temps T et dupliqué dans le temps :

$$s^\dagger(t) = s(t)\Pi_T(t) * \text{III}_T(t) \quad (70)$$

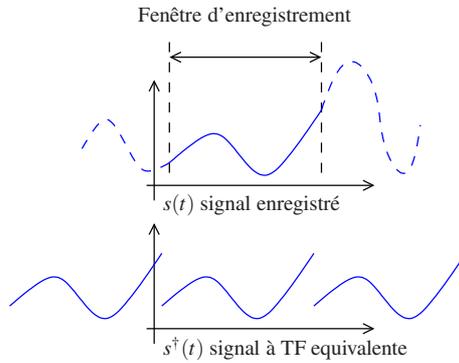


FIGURE 20 – Fenêtre d'enregistrement et signal équivalent.

Calcul : La DFT peut être calculée numériquement assez facilement à l'aide de deux boucles imbriquées l'une dans l'autre :

Par exemple en MATLAB

```
for n=0:N-1;
    for k=0:N-1;
        X(n)=x(k)*exp(-1i*pi*k*n);
    end;
end;
```

Ce calcul nécessite $N \times N$ opérations. Cela peut devenir rapidement coûteux en temps quand N est grand. On dit que la complexité de cet algorithme est de $N \times N$.

Remarque : Il est plus efficace en MATLAB de coder ce calcul sous forme matricielle en remarquant que :

$$\begin{pmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ \vdots \\ X(N-2) \\ X(N-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{-\frac{j2\pi \times 1}{N}} & \dots & e^{-\frac{j2\pi(N-2) \times 1}{N}} & e^{-\frac{j2\pi(N-1) \times 1}{N}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \dots & e^{-\frac{j2\pi \times k \times p}{N}} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & e^{-\frac{j2\pi \times (N-2)}{N}} & \dots & \dots & e^{-\frac{j2\pi(N-1) \times (N-2)}{N}} \\ 1 & e^{-\frac{j2\pi \times (N-1)}{N}} & \dots & e^{-\frac{j2\pi(N-2) \times (N-1)}{N}} & e^{-\frac{j2\pi(N-1) \times (N-1)}{N}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ \vdots \\ x(N-2) \\ x(N-1) \end{pmatrix}$$

Passage à la FFT.

Le passage à la FFT n'est pas très compliqué mais dérive de la DFT avec quelques astuces (Gauss pour le principe en 1815, puis Cooley&Tukey 1965. Comme quoi il faut lire les anciens, surtout en Mathématique).

Cet algorithme prend en entrée un nombre d'échantillons qui est une puissance de 2.

l'équation 1 peut donc être réécrite entre échantillons d'ordre pair et impair (N est divisible par 2) :

$$\begin{aligned}
X(n) &= \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2k)e^{-j2\pi\frac{n}{N}(2k)} + \sum_k^{\frac{N}{2}-1} x(2k+1)e^{-j2\pi\frac{n}{N}(2k+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2k)e^{-j2\pi\frac{n}{N}(2k)} + e^{-j2\pi\frac{n}{N}} \sum_k^{\frac{N}{2}-1} x(2k+1)e^{-j2\pi\frac{n}{N}(2k)} \\
&= \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2k)e^{-j2\pi\frac{nk}{N/2}} + e^{-j2\pi\frac{n}{N}} \sum_k^{\frac{N}{2}-1} x(2k+1)e^{-j2\pi\frac{nk}{N/2}}
\end{aligned}$$

Finalement :

$$X(n) = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} x_p(k)e^{-j2\pi\frac{nk}{N/2}} + e^{-j2\pi\frac{n}{N}} \sum_k^{\frac{N}{2}-1} x_I(k)e^{-j2\pi\frac{nk}{N/2}}$$

ou les $x_p(k)$ et $x_I(k)$ sont respectivement les $\frac{N}{2}$ échantillons d'ordre pair et impair du signal.

On reconnaît dans les termes $\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} x_p(k)e^{-j2\pi\frac{nk}{N/2}}$ et $\sum_k^{\frac{N}{2}-1} x_I(k)e^{-j2\pi\frac{nk}{N/2}}$ les DFT des échantillons pairs et impairs du signal à ceci près que $n \in [0; N-1]$ alors que $k \in [0; \frac{N}{2}-1]$.

Quant $n \in [0; \frac{N}{2}-1]$, le calcul de $X(p)$ est direct :

$$\begin{aligned}
\text{Pour } n &< \frac{N}{2} \\
X(n) &= DFT\left(x_p(k), n\right) + e^{-j2\pi\frac{n}{N}} DFT\left(x_I(k), n\right)
\end{aligned} \tag{71}$$

Quant $n \in [\frac{N}{2}, N-1]$, c'est moins direct :

Comme $n \geq \frac{N}{2}$ peut lui retrancher $\frac{N}{2}$, pour se retrouver à nouveau dans l'intervalle $[0; \frac{N}{2}-1]$. Posons $n' = n - \frac{N}{2}$.

La $DFT\left(x_p(k), n\right)$ est calculée sur $\frac{N}{2}$ points. Grâce à la périodicité de la DFT (équation 69) : $DFT\left(x_p(k), n\right) = DFT\left(x_p(k), n' + \frac{N}{2}\right) = DFT\left(x_p(k), n - \frac{N}{2}\right)$. Il en est de même de la DFT sur les échantillons d'ordre impairs.

De plus : $e^{-j2\pi\frac{n}{N}} = e^{-j2\pi\frac{n'}{N}} e^{-j2\pi\frac{1}{2}} = e^{-j2\pi\frac{n'}{N}} \times -1$

$$\begin{aligned}
\text{Pour } n &\geq \frac{N}{2} \\
X(n) &= DFT\left(x_p(k), n - \frac{N}{2}\right) - e^{-j2\pi\left(\frac{n-N/2}{N}\right)} DFT\left(x_I(k), n - \frac{N}{2}\right)
\end{aligned} \tag{72}$$

Le calcul de la DFT sur N échantillons est donc ramenée au calcul de deux DFT. L'une sur les $N/2$ échantillons pairs et l'autre sur les $N/2$ échantillons impairs.

Finalement :

$$\text{N valeurs : } \begin{cases} n \in [0; \frac{N}{2}] \\ X(n) = DFT\left(x_p(k), n\right) + e^{-j2\pi\frac{n}{N}} DFT\left(x_I(k), n\right) \\ X(n + \frac{N}{2}) = DFT\left(x_p(k), n\right) - e^{-j2\pi\frac{n}{N}} DFT\left(x_I(k), n\right) \end{cases} \tag{73}$$

Le groupe d'équation 73 peut être codé de façon récursive, car on fait appel à une DFT pour calculer la DFT.

Avec un nombre d'échantillons puissance de 2, $N = 2^p$, Calculer la FFT consiste à séparer les échantillons entre ceux d'ordre pair et impair pour calculer les DFT de chacun des sous ensembles. Chaque sous ensemble qui comprend aussi un nombre pair d'échantillons peut à son tour être divisé en échantillons d'ordre pair et impair jusqu'à ce qu'il n'en reste plus qu'un seul. La DFT du dernier échantillon est l'échantillon lui même (Équation 68). On effectue ainsi $p = \log_2(N)$ divisions du tableau initial pour chacun des N échantillons soit $N \log_2(N)$ opérations. On dit que la complexité de cet algorithme est de $N \log_2(N)$.

La FFT peut donc être codée assez facilement en utilisant la réétranche, par exemple en MATLAB :

```
% on définit une fonction nommée FFT qui prend un tableau x en entrée et retourne un table
function X=FFT(x);
```

```
N=length(x); % N est le nombre de points dans x
```

```
% Où l'on vérifie que l'on n'est pas arrivé au dernier échantillon
```

```
if N==1;
```

```
    X=x; return;
```

```
end;
```

```
% Séparation entre échantillons Pairs et Impairs
```

```
Pairs = x(1:2:end); % On part du 1er échantillon (indice zero) de deux en deux
```

```
Impairs = x(2:2:end); % On part du 2eme échantillon (indice 1) de deux en deux
```

```
X=[1:N]; % Allocation d'un tableau N lignes ,1 colonne pour stocker le résultat
```

```
% Calcul de la FFT de chaque point en fréquence discrétisée
```

```
% On utilise la réétranche ici car la fonction FFT s'appelle elle-même.
```

```
for n=1:N/2;
```

```
    Wn = exp(-%i*2*pi*n/N); % Boucle sur les N/2 points pairs et impairs
```

```
    X(n) = FFT(Pairs)+Wn*FFT(Impairs); % Ce code n'est pas très optimisé,
```

```
    X(n+N/2) = FFT(Pairs)-Wn*FFT(Impairs); % on appelle 2 fois chaque fonction
```

```
end; % Il est écrit ainsi pour rester plus lisible
```

```
return;
```

Remarque : Il n'est pas optimal particulièrement en terme de mémoire de coder la FFT de cette façon. Cooley&Turkey ont optimisé cet algorithme tant en terme de mémoire que de vitesse (leur algorithme est parfois appelé algorithme « Papillon » parce que sa représentation sous forme graphique (data flow) fait penser à un papillon). A moins de vouloir en faire un travail digne d'une thèse portant sur une optimisation ultime de l'algorithme, il n'y a pas d'intérêt de nos jours à coder soi-même l'algorithme FFT. Il est disponible dans de nombreuses formes (langages, matériel, etc).

3.5 Discrétisation de la transformée de Fourier.

Passage de la transformée de Fourier à la DFT

La s'écrit :

$$TF(f(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j2\pi vt} dt$$

L'échantillonnage idéal de $f(t)$ aboutit à :

$$f_e(t) = f(t)\text{III}_{T_e}(t)$$

Cette fonction n'est pas intégrable au sens de Rieman classique. on est donc **obligé** d'utiliser les distributions pour calculer sa TF :

$$\begin{aligned} TF(f_e(t)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_e(t)e^{-j2\pi vt} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left[\sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e) \right] e^{-j2\pi vt} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left[\sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e) \right] e^{-j2\pi vt} dt \end{aligned}$$

$f(t)$ et $e^{-j2\pi vt}$ ne dépendent pas de k . Ils peuvent rentrer dans la somme :

$$\begin{aligned} TF(f_e(t)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t - kT_e)e^{-j2\pi vt} \right] dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{-\infty}^{+\infty} f(kT_e)\delta(t - kT_e)e^{-j2\pi vkT_e} \right] dt \end{aligned}$$

Avec le Théorème de Lebesgue d'intégration terme à terme on peut échanger le signe somme et l'intégrale :

$$TF(f_e(t)) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(kT_e)\delta(t - kT_e)e^{-j2\pi vkT_e} dt \right]$$

On sort tous les termes indépendants de t de l'intégrale :

$$TF(f_e(t)) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \left[f(kT_e)e^{-j2\pi vkT_e} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e) dt \right]$$

Comme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e) dt = 1$$

On a :

$$TF(f_e(t)) = \sum_{-\infty}^{+\infty} f(kT_e) e^{-j2\pi v k T_e}$$

En posant : $x_k = f(kT_e)$ et $TF(f_e(t)) = f(v)$:

$$f(v) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x(k) e^{-j2\pi v k T_e}$$

En discrétisant le spectre sur N point entre les fréquences $-\frac{N}{2T}$ et $+\frac{N}{2T}$, il vient $v = n\frac{N}{T}\frac{1}{N} = \frac{n}{T}$.

En posant $X_n = f(n\frac{N}{T})$, on aboutit à :

$$X_n = \sum_{-\infty}^{+\infty} x(k) e^{-j2\pi \frac{n}{T} k \frac{T}{N}}$$

soit, comme les échantillons du signal sont nul en dehors de l'intervalle $[0, T]$

$$X_n = \sum_0^{N-1} x(k) e^{-\frac{j2\pi kn}{N}}$$

Ce qui est la définition de la DFT.