

Transformée de Fourier

Vincent Croquette

16 janvier 2012

Décomposition d'un signal sur une base de polynômes orthogonaux.

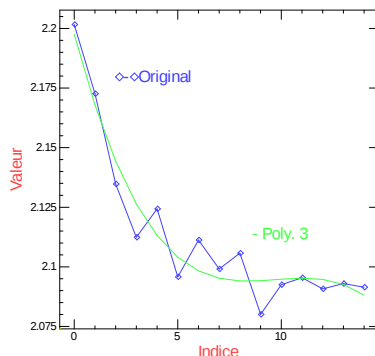


Figure: Signal expérimental (en bleu) sur 15 points, que l'on souhaite ajuster à une courbe lisse. En vert un ajustement à un polynôme d'ordre 3 obtenu par projection sur une base de polynômes orthogonaux.

Construction d'une base de polynômes orthogonaux.

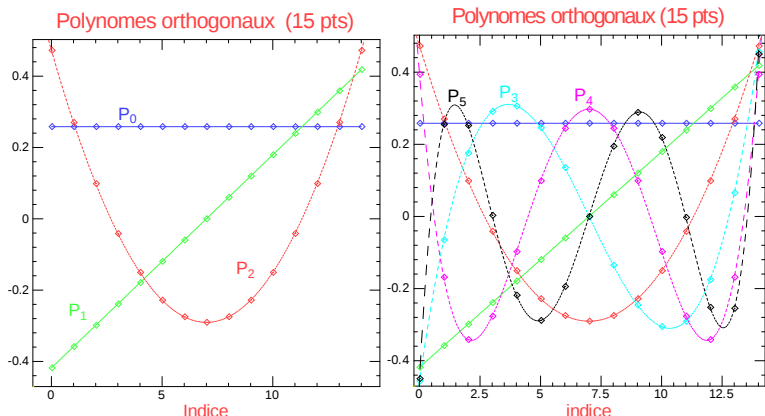


Figure: Construction d'une base de polynômes orthogonaux sur 15 points. A gauche, le premier P_0 correspond à une valeur constante, le second P_1 est une droite dont la valeur moyenne est nulle. Le troisième P_2 est une parabole qui est automatiquement orthogonale à P_1 , par contre sa valeur moyenne est nulle pour être orthogonale à P_0 . A droite on peut itérer le processus pour définir P_3 , P_4 et P_5

Transformée de Fourier discrète

Signal dans l'espace direct, $S_r \in \mathbb{C}$ avec $r \in [0, N[$ les composantes de Fourier s'écrivent :

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} S_r \cdot \exp(-2i\pi \cdot k \cdot r / N) \quad (1)$$

avec $k \in [-N/2, N/2[$ et

N points $\in \mathbb{C}$ de signal (soit $2N$ variables) $\rightarrow N$ modes de Fourier $\in \mathbb{C}$ soit $2N$ variables). On peut évidemment définir la TF inverse :

$$S_s = \sum_{k=-N/2}^{k < N/2} a_k \cdot \exp(2i\pi \cdot k \cdot s / N)$$

L'énergie du signal dans l'espace direct est évidemment égale à l'énergie dans l'espace de Fourier c'est **le théorème de Parseval**.

Les modes de Fourier sont orthogonaux

$$\frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \exp(-2i\pi.p.r/N) \cdot \exp(-2.i\pi.q.r/N) = \delta(p - q)$$

Il est intéressant de développer a_k dans l'expression de S_s :

$$S_s = \sum_{k=-N/2}^{k < N/2} \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} S_r \cdot \exp(-2.i\pi.k.r/N) \cdot \exp(2.i\pi.k.s/N)$$

On peut regrouper et inverser l'ordre des signes de sommation :

$$S_s = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} S_r \sum_{k=-N/2}^{k < N/2} \exp(-2.i\pi.k.(r - s)/N)$$

La somme sur k à droite est plus facile à visualiser dans l'espace complexe, elle correspond à une somme de N vecteurs de module 1 et dont l'angle décrit les sommets d'un polygone à N cotés si $r \neq s$

Cas d'un signal de Dirac

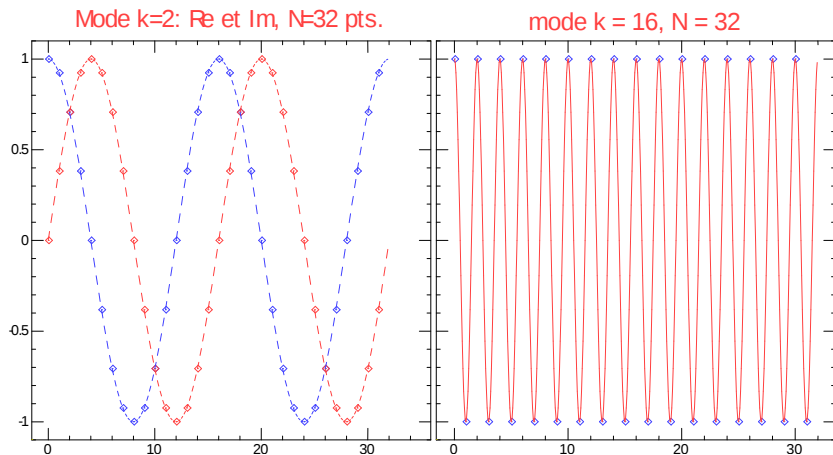


Figure: A gauche, mode $k = 2$ pour $N = 32$, seuls les points ont un sens par rapport aux échantillons, les lignes pointillées sont des guides pour les yeux. En rouge le cosinus en bleu le sinus. A droite, le mode $k = 16$ pour $N = 32$, pour ce mode particulier $k = N/2$ la partie réelle en cosinus

Cas d'un signal réel.

Le signal s'écrit $S_r \in \mathbb{R}$ avec $r \in [0, N[$ dans l'espace direct, les composantes de Fourier s'écrivent :

$$\operatorname{Re}(a_k) = \alpha \sum_{r=0}^{N-1} S_r \cdot \cos(-2.i\pi.k.r/N)$$

et

$$\operatorname{Im}(a_k) = \alpha \sum_{r=0}^{N-1} S_r \cdot \sin(-2.i\pi.k.r/N)$$

avec $k \in [0, N/2]$.

Le mode $k = 0$ est particulier car sa partie imaginaire est nulle. Le mode $k = 1$ correspond à une arche de cosinus ou de sinus sur la totalité de la longueur du signal soit $[0, N]$. Tous les modes sont exactement périodiques dans la fenêtre du signal.

Le mode $k = N/2$ est à nouveau très particulier.

Cas d'un signal carré.

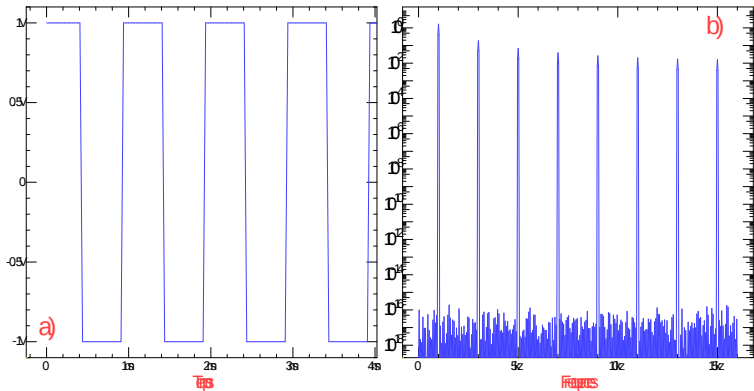


Figure: A gauche, signal carré dans l'espace des temps de période 32 pts avec $N = 1024$. A droite puissance spectrale en échelle logarithmique. On remarque que ce spectre contient des raies intenses pour tous les modes harmoniques impairs $k = (2.n + 1).32$. Tous les autres modes ne contiennent que du bruit numérique.

Reconstruction d'un signal carré.

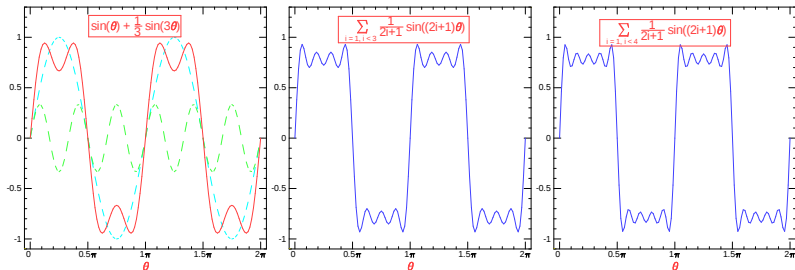


Figure: On peut reconstruire un signal carré en ajoutant les différents harmoniques de sa fréquence fondamentale. Nous avons ici différents stades de cette reconstruction.

Cas d'un signal de Dirac

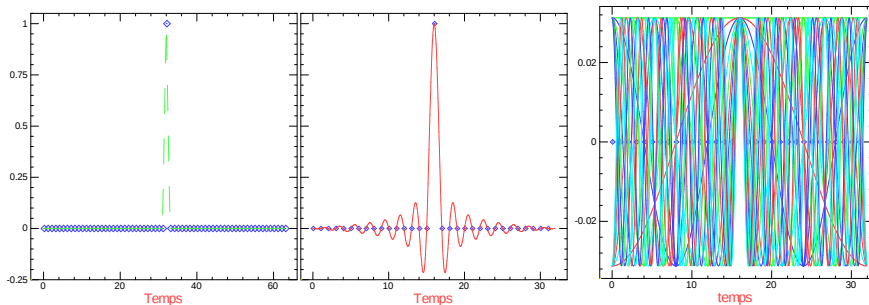


Figure: A gauche, signal de Dirac ($N = 32$). A droite, modes de Fourier représentés dans l'espace réel correspondant au pic de Dirac de gauche. Au milieu, reconstitution du pic à partir de ses composantes. Le pic de Dirac est en fait un sinus cardinal. Par contre, le fait que les 31 autres points du signal de gauche soient nuls correspond simplement au fait que ces points sont localisés précisément aux zéros du sinus cardinal.

Signaux périodiques et peigne de Dirac

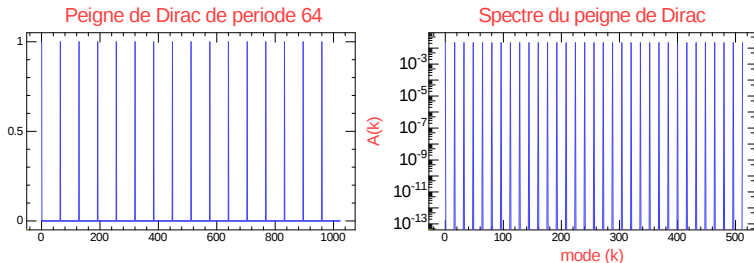


Figure: La transformée de Fourier d'un peigne de Dirac est également un peigne de Dirac. A gauche, peigne de Dirac dans l'espace réel avec un pic tous les 64 points. A droite, spectre du signal de gauche, avec un pics tous les 16 modes.

Correspondance phase et décalage (théorème du retard)

$$\phi(k) = -2.\pi.k.\delta x/N,$$

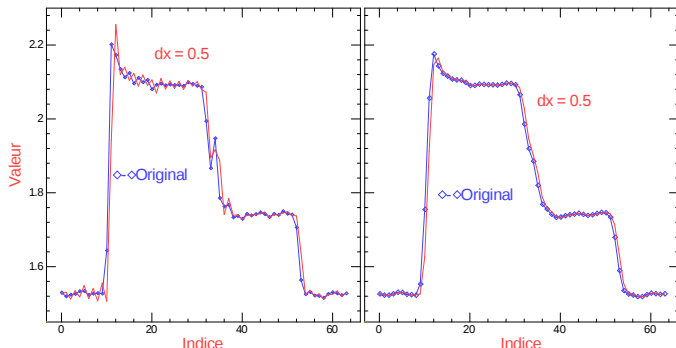


Figure: A gauche, signal original et décalé d'un demi pixel en utilisant la transformée de Fourier. Comme ce signal contient des fréquences élevées, le signal décalé fait ressortir des oscillations. A droite même chose mais le signal a été filtré passe bas pour éliminer les fréquences élevées, le signal décalé présente beaucoup moins d'oscillations.

Fonction de corrélation et Transformée de Fourier

$$C(\tau) = \sum_0^{N-1} X(t) \cdot \tilde{Y}(t - \tau)$$

$$C(\tau) = \sum_{t=0}^{N-1} \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} X_k e^{2i\pi \cdot k \cdot t/N} \cdot \sum_{k'=-N/2}^{N/2-1} \tilde{Y}_k e^{2i\pi \cdot k' \cdot t/N} \cdot e^{-2i\pi \cdot k' \cdot \tau/N}$$

soit

$$C(\tau) = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} X_k \cdot \sum_{k'=-N/2}^{N/2-1} \tilde{Y}'_k \sum_{t=0}^{N-1} e^{2i\pi \cdot (k+k') \cdot t/N} \cdot e^{-2i\pi \cdot k' \cdot \tau/N}$$

Où la somme sur t n'est différente de zéro que si $k = -k'$, ce qui conduit à

$$C(\tau) = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} X_k \tilde{Y}_{-k} e^{2i\pi.k.\tau/N}$$

Exemple de fonction de corrélation

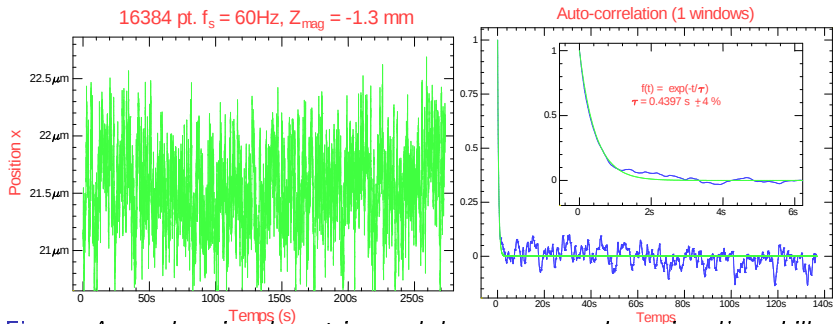


Figure: A gauche, signal expérimental de mouvement brownien d'une bille attachée par une molécule d'ADN. A droite, fonction d'autocorrélation du signal de gauche (en bleu), celle-ci démontre que les fluctuations ont une mémoire dont le temps caractéristique est d'une demie seconde (voir insert). Aux temps plus longs, la fonction d'autocorrélation présente un bruit statistique.

Produit de convolution : cristal à 1D

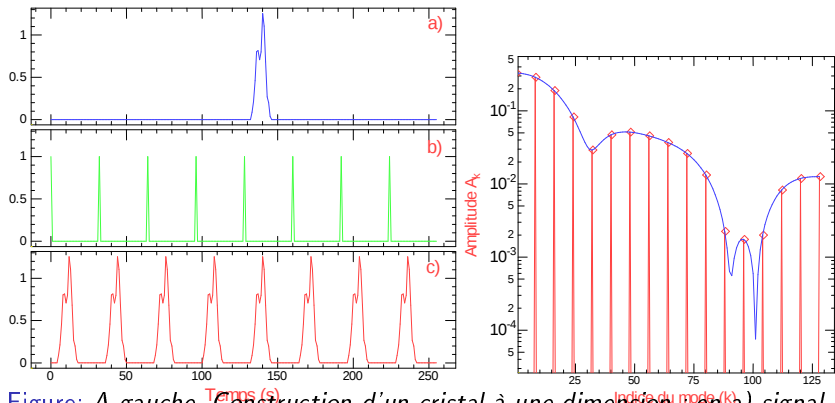


Figure: A gauche, Construction d'un cristal à une dimension : en a) signal expérimental, en b) peigne de Dirac en c) produit de convolution de a) et b) reproduisant un signal périodique comme un cristal. A droite, spectre d'amplitude de Fourier du signal isolé a) (ligne continue verte), et du signal périodique c).

Produit de convolution et Transformée de Fourier

Pour des signaux continus, le produit de convolution s'écrit :

$$f \otimes g(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t).g(\tau - t)dt$$

pour un signal discret

$$f \otimes g(\tau) = \sum_0^{N-1} f_r.g_{\tau-r}$$

En écrivant $f(r)$ et $g(\tau - r)$ en Fourier et en utilisant le théorème du retard, on obtient une relation intéressante :

$$f \otimes g(\tau) = \sum_{r=0}^{N-1} \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} F_k e^{2i.\pi.k.r/N} . \sum_{k'=-N/2}^{N/2-1} G_{k'} e^{-2i.\pi.k'.r/N} . e^{2i.\pi.k'.\tau/N}$$

Produit de convolution et Transformée de Fourier...

soit

$$f \otimes g(\tau) = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} F_k \cdot \sum_{k'=-N/2}^{N/2-1} G'_k \sum_{r=0}^{N-1} e^{2i.\pi.(k-k').r/N} . e^{2i.\pi.k'.\tau/N}$$

Où la somme sur r n'est différente de zéro que si $k = k'$, ce qui conduit à

$$f \otimes g(\tau) = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} F_k G_k e^{2i.\pi.k.\tau/N}$$

Convolution et dé-convolution

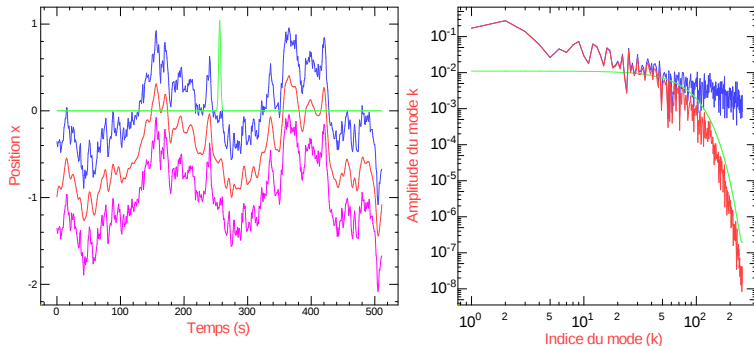


Figure: A gauche, en bleu signal original, en vert fonction de réponse gaussienne (décalée). En rouge signal de convolution des signaux bleu et vert (filtrage passe-bas le signal original). En magenta, signal rouge dé-convolué par le vert en utilisant la TF. A droite, Amplitude des modes de Fourier de signaux

Filtrage en fréquence

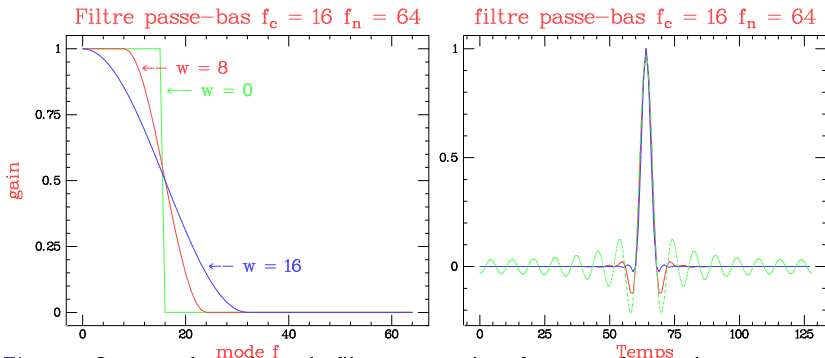


Figure: Comparaison de trois filtres passe-bas $f_c = 16$. À gauche, coefficient de transmission de ces filtres en TF. La transmission est pour $f < f_c - w$, 0 quand $f > f_c + w$ et dans la zone intermédiaire $T = (1 + \sin(\pi.(f_c - f)/2.w))/2$. À droite, réponse impulsionnelle de ces filtres.

Filtrage passe bande et passe haut

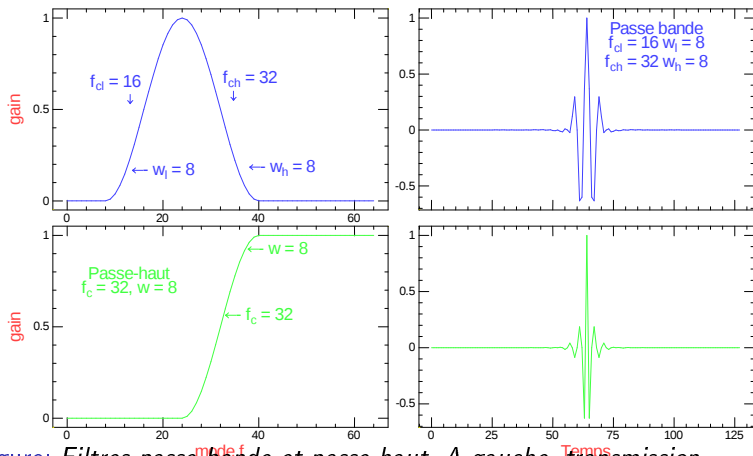


Figure: Filtres passe-bande et passe-haut. A gauche, transmission passe-bande en haut et passe-haut en bas. A droite, réponse impulsionnelle (ces réponses impulsionnelles ont été décalées de 64 points pour plus de clarté).

Signaux non périodiques

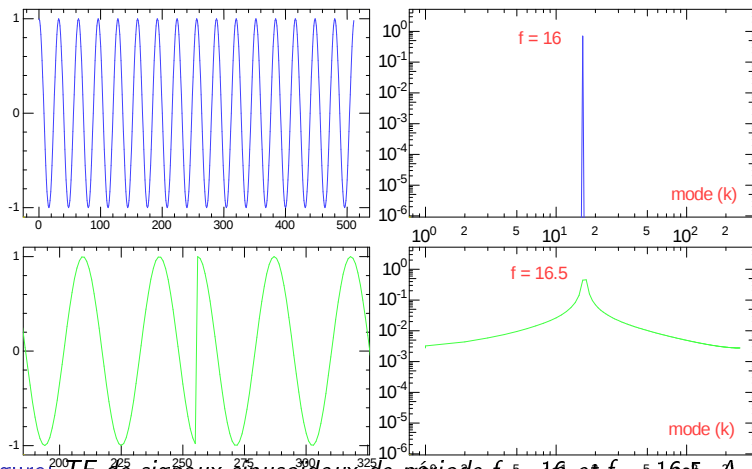


Figure. TF de signaux sinusoidaux de période $f = 16$ et $f = 16.5$. A gauche, le signal décalé de $N/2$ en bas ce décalage fait apparaître un saut de phase. A droite, TF des signaux, le saut de phase induit une très forte perturbation du spectre.

Fenêtre de Hanning $F(r) = (1 - \cos(2\pi * r/N))/2$

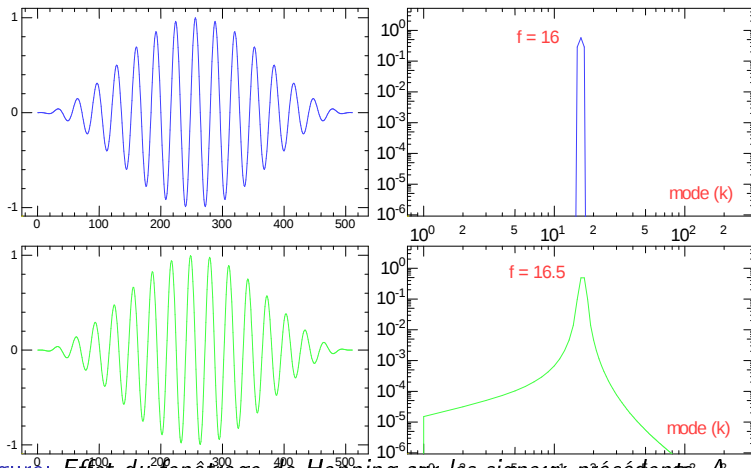


Figure: Effet du fenêtrage de Hanning sur les signaux précédents. À gauche, le signal dans l'espace réel multiplié par la fenêtre de Hanning. À droite, TF de chacun des signaux.

Fenêtre de Hamming $F(r) = 0.54 - 0.46.\cos(2.\pi * r/N)$

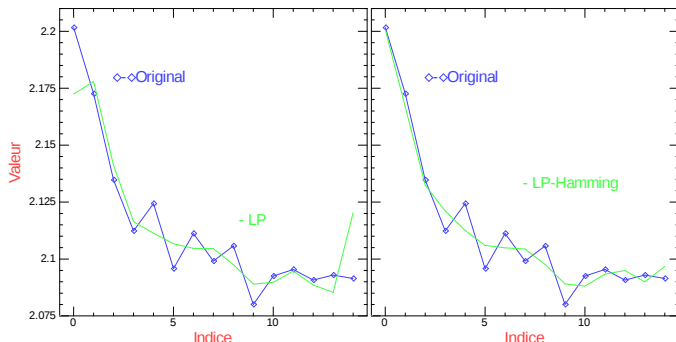


Figure: Fenêtrage de Hamming appliqué à un signal non périodique. A gauche, le signal est traité directement en FFT. La discontinuité an bord induit une perturbation. A droite, le signal a été filtré en utilisant la fenêtre de Hamming la discontinuité des bords a disparu.

Filtre passe-bas d'ordre 1, le cas du circuit RC

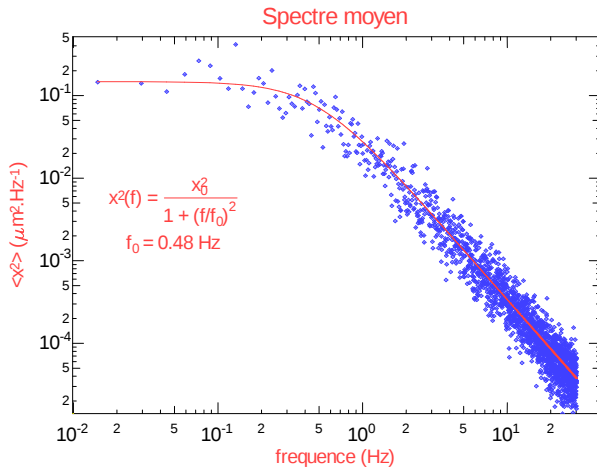


Figure: Spectre des fluctuations d'une bille attachée à une molécule d'ADN. Ce spectre est ajusté à une Lorentzienne il faut le comparer à la fonction de corrélation de la figure 9 car il s'applique au même signal.

Filtre passe-bas d'ordre 2

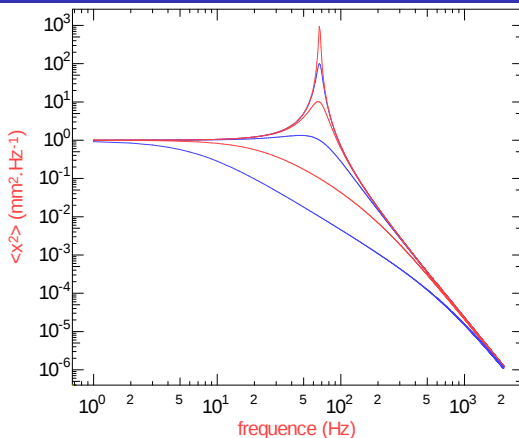


Figure: Spectre des déplacements de la membrane d'un haut-parleur en fonction de la fréquence d'excitation sur des échelles log-log. Nous avons fait varier le coefficient de frottement de façon importante passant d'un comportement avec de fortes oscillations au cas extrême où ces oscillations sont sur-amorties.

La transformée de Hilbert

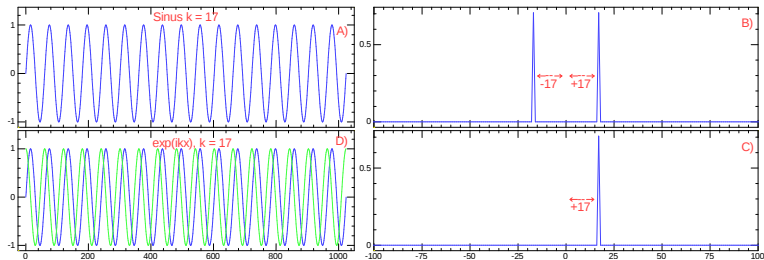


Figure: Principe de la transformée de Hilbert.

Principe de la conversion analogique digitale

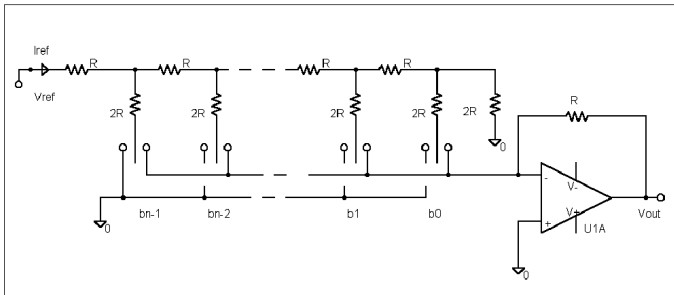


Figure: Principe d'un convertisseur numérique analogique utilisant un réseau de résistance $R/2R$.

Nécessité d'un filtrage avant la numérisation, théorème de Shanon

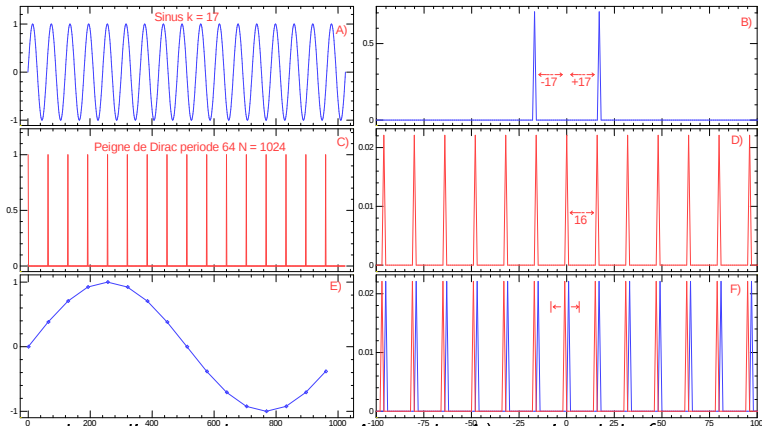


Figure: le repliement de spectre : A gauche A) un signal de fréquence $k = 17$. B) TF e A). C) peigne de Dirac (CNA tous les 64 pts.). D) TF de C) présentant des pics à $k = n.1024/64 = n.f_e$ avec $n \in \mathbb{Z}$. E) le signal échantillonné

Cas particulier des capteurs matriciels : camera CCD

Elles associent maintenant quelques millions de pixels qui sont autant de capteurs indépendants. Il est impossible de placer un filtre derrière chaque pixel pour prévenir les repliements de spectre. Les séquences vidéo prises avec des caméras peuvent présenter des repliements de spectre forts. L'effet est généralement atténué (mais pas supprimé) par leur temps d'intégration qui induit un filtrage notable. Dans leur mode normal de fonctionnement, les caméras intègrent la lumière de d'une image presque durant toute la durée d'une période d'échantillonnage (il y a généralement un petit temps mort entre deux images), cette intégration dans le temps avec une fenêtre rectangulaire de largeur τ_e induit un filtrage fréquentiel en sinus cardinal dont les zéros sont précisément les harmoniques de la fréquence d'échantillonnage.

Obtenir une photo d'un objet sans objectif ni lentille

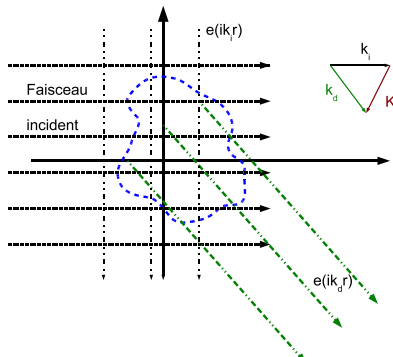
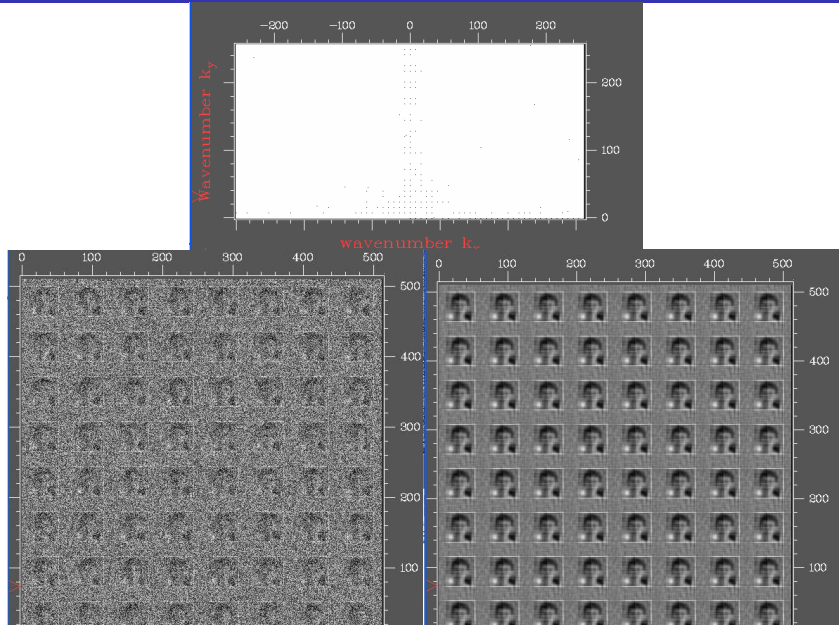


Figure: Une onde plane arrive sur un objet transparent diffusant (en bleu). Si nous considérons la direction $\vec{k}_d$, l'intensité de l'onde diffusée est la somme des intensités diffusées par chaque point $\vec{r}$ de l'objet avec un déphasage $\phi = (\vec{k}_i - \vec{k}_d) \cdot \vec{r}$. Ceci n'est autre que la transformée de Fourier de l'objet avec le vecteur d'onde $\vec{k}_i - \vec{k}_d$.

Structure d'un cristal par diffraction des rayons X



Mesure de la position au-delà de la limite de résolution

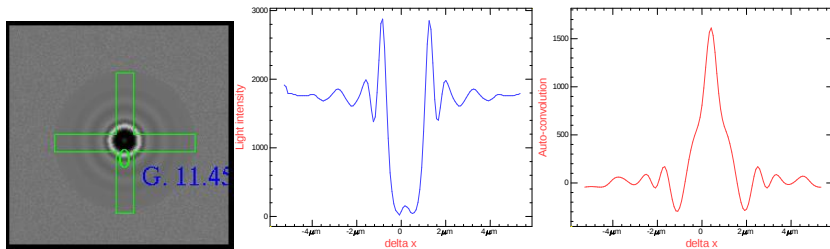
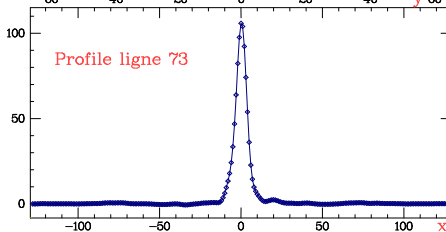
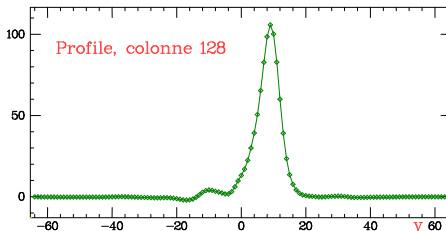
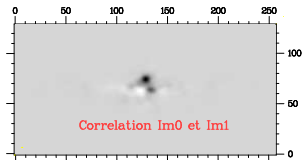
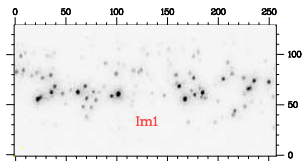
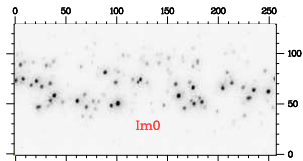


Figure: A gauche, image de la bille et de la croix servant à la suivre. Au milieu, profil suivant X d'intensité de l'image suivant le montant horizontal de la croix. A droite, fonction d'auto-convolution du profil précédent (en ayant retranché la partie continue). Cette fonction présente un maximum centré en $2 \cdot \delta x$ (le décalage du profil par rapport à son centre).

Particle Image Velocimetry PIV



Principe de la tomographie

La TF d'une projection n'est autre qu'un profil dans l'espace de Fourier passant par l'origine.

Changement de variable de $(\vec{x}, \vec{y})$ vers $(\vec{u}, \vec{v})$ où $\vec{v}$ est la direction de projection. On peut écrire l'intensité de la projection par :

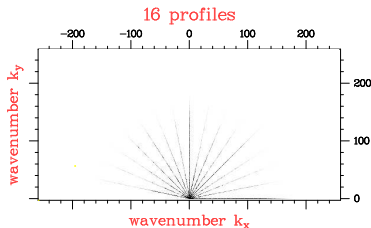
$$P(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(u, v) dv$$

et sa TF par

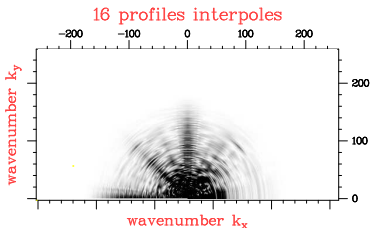
$$\begin{aligned}\tilde{P}(k_u) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(u, v) e^{-ik_u \cdot u} du \cdot dv \\ &= \tilde{P}(k_u, k_v = 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(u, v) e^{-i(k_u \cdot u + (0 \cdot v))} du \cdot dv\end{aligned}$$

On voit ainsi que la TF du profil s'exprime comme la TF-2D de la densité de l'image avec $k_v = 0$ et k_u quelconque.

Principe de la tomographie appliquée à une photo



fft^{-1} 2D 16 profiles interpolés



fft^{-1} 2D 256 profiles



Original

