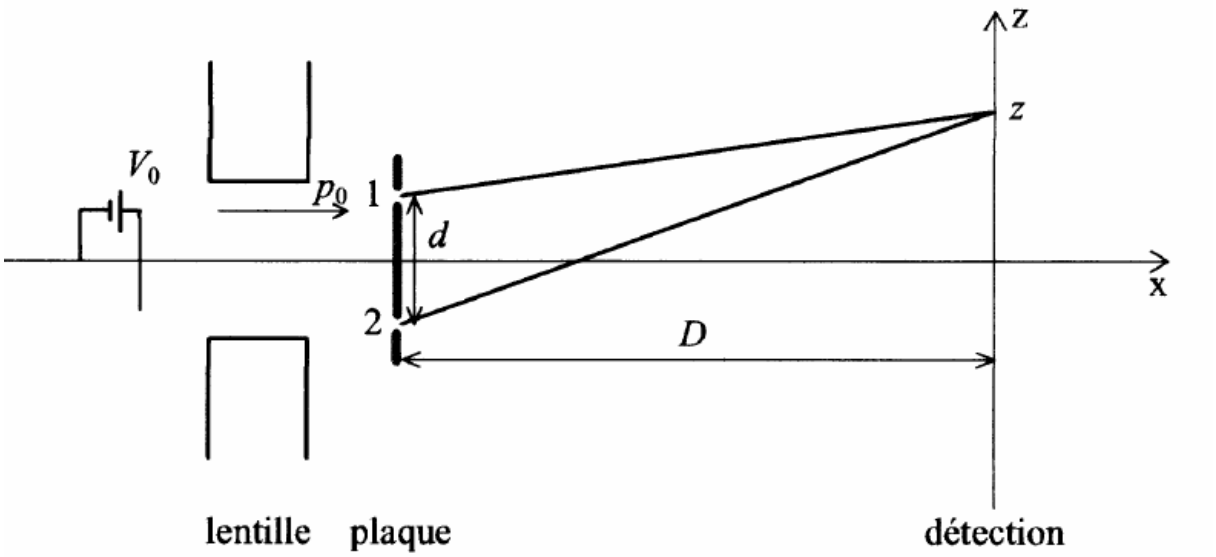
EXAMEN DE PHYSIQUE QUANTIQUE

PARTIE A

Traiter un exercice au choix
Aucun document n'est autorisé
Temps alloué : 1H

EXERCICE 1 : INEGALITES DE HEISENBERG & INTERFERENCES D'YOUNG AVEC DES ELECTRONS

Soit l'expérience décrite sur la figure ci-dessous. Un faisceau d'électrons émis par un filament chauffé est accéléré par une grille à la tension V_0 puis est rendu parallèle à l'axe Ox par une lentille électrostatique. Ce faisceau arrive sur une plaque (mobile suivant Oz) percée de deux fentes parallèles à Oy et séparées de d. On mesure à une distance D le nombre d'électrons reçus par un détecteur placé à une distance z le long de Oz.



On observe une figure d'interférences identique à celle produite par un faisceau lumineux de longueur d'onde $\frac{h}{p_0}$. La distance δz entre un minimum et un maximum d'intensité est égale à : $\delta z = \frac{\lambda D}{2d} = \frac{hD}{2p_0 d}$ $\left(\text{avec } p_0 = \sqrt{2mV_0}\right)$. La plaque doit être considérée comme un objet quantique. Sa position ξ dans la direction Oz possède une indétermination caractérisée par un écart quadratique σ_ξ. Si cet écart est trop grand, le système de franges sera brouillé. Pour observer l'interférence, il faut donc que l'on ait : $\sigma_\xi < \eta\delta z$ avec $0<\eta<1$ (1). Une valeur raisonnable de η est par exemple $\eta = \frac{1}{3}$.

1.- Montrer que l'on peut, par une mesure de l'impulsion q transférée à la plaque dans la direction Oz, déterminer par quelle fente l'électron est passé. On notera q_1 (respectivement q_2) l'impulsion transmise à la plaque par l'électron passant par la fente 1 (respectivement 2).

Pour simplifier le calcul de la cinématique de la collision, on supposera que la masse M de la plaque est beaucoup plus grande que la masse m de la particule.

2.- Les impulsions q_1 et q_2 possèdent une indétermination caractérisée par un écart quadratique σ_q. Pour que l'on puisse trancher entre les deux cas, l'électron passant par la fente 1 ou par la fente 2, montrer que σ_q doit satisfaire l'inégalité :

$$\sigma_q < \eta' p_0 \frac{d}{D} \text{ avec } \eta' < 1 \quad (2)$$

(On pourra prendre $\eta' = \eta$).

3.- A partir des inégalités (1) et (2), montrer que :

$$\sigma_\xi \sigma_q < \eta\eta' \frac{h}{2}$$

4.- Le résultat précédent implique que l'on peut observer une interférence tout en sachant par quelle fente est passé l'électron. Or le phénomène d'interférence disparaît si l'on ferme une des deux fentes. Résoudre ce paradoxe.

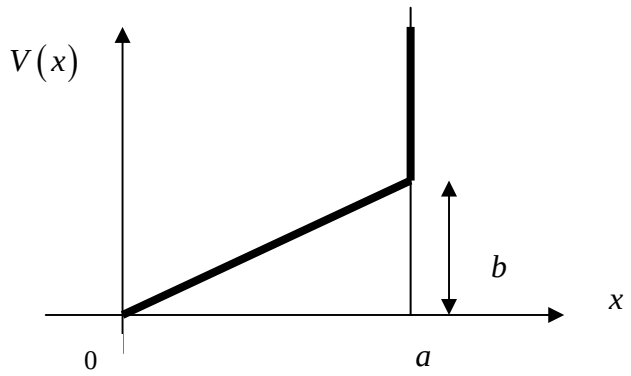
EXERCICE 2 : PARTICULE SOUMISE A UN GRADIENT DE POTENTIEL

Soient E_n et $|\phi_n\rangle$ (n entier) l'énergie et l'état du n-ième niveau d'une particule de masse m enfermée dans une « boite de potentiel »[(*)], unidimensionnelle, de largueur a. On soumet cette particule à un gradient linéaire de potentiel (*voir figure ci-dessous*).

1. Calculer la correction $\Delta E_n^{(1)}$, au premier ordre de la théorie des perturbations stationnaires, à l'énergie E_n.
2. Ecrire, au premier ordre de la théorie des perturbations stationnaires, sous forme d'un développement sur les $\{|\phi_n\rangle\}$, l'état $|\psi_1\rangle$ du premier niveau.

On rappelle les énergies et états propres d'une particule de masse m à l'intérieur d'un puits de potentiel infini de largeur a : $E_n^{(0)} = n^2 \dfrac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$ et $\phi_n = \sqrt{\dfrac{2}{a}} \sin\left(n\dfrac{\pi x}{a}\right)$

[(*)] *potentiel nul à l'intérieur de la boite, infini à l'extérieur.*



EXAMEN DE PHYSIQUE QUANTIQUE

PARTIE B

Traiter un problème au choix
Documents autorisés (sauf livres)
Temps alloué : 2H

• PROBLEME 1 : TRANSFERT DE POPULATION PAR LA TECHNIQUE « STIRAP » (STImulated Raman Adiabatic Passage)

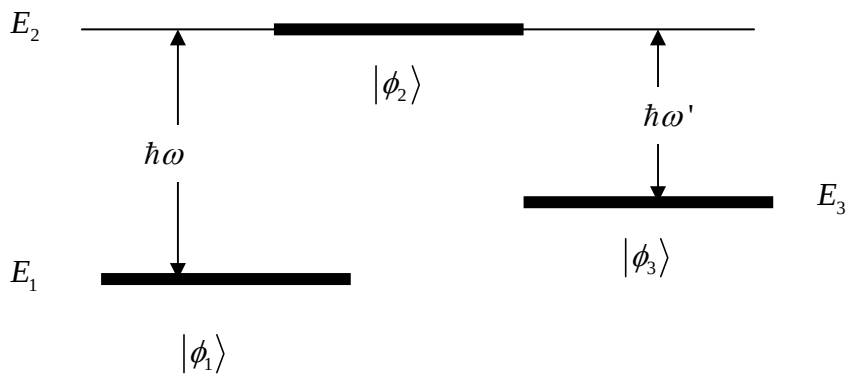
On suppose un système physique décrit par un Hamiltonien $\hat{H}_0$ indépendant du temps, d'états propres normés $\{|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, |\phi_3\rangle\}$ avec les valeurs propres respectives E_1, E_2 et E_3. Ce système est soumis à l'action d'une perturbation de la forme :

$$V(t) = -\hat{\vec{\mu}}.\vec{\mathcal{E}}(t) - \hat{\vec{\mu}}.\vec{\mathcal{E}}'(t) \quad (1)$$

où $\hat{\vec{\mu}}$ est l'opérateur dipôle électrique et $\vec{\mathcal{E}}(t)$ et $\vec{\mathcal{E}}'(t)$, deux champs électriques monochromatiques :

$$\vec{\mathcal{E}}(t) = \vec{\mathcal{E}}_0 \cos\omega t \ ; \ \vec{\mathcal{E}}'(t) = \vec{\mathcal{E}}_0' \cos\omega' t \quad (2)$$

avec $\omega = \dfrac{E_2 - E_1}{\hbar}$ et $\omega' = \dfrac{E_2 - E_3}{\hbar}$ (voir figure ci-dessous).



1.1 Equations de la variation des constantes

On écrira le vecteur d'état $|\Psi(t)\rangle$ du système sous la forme :

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{n=1,2,3} b_n(t) e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t} |\phi_n\rangle \quad (3)$$

Donner les équations différentielles qui régissent la dépendance en temps des coefficients $b_n(t)$. On notera par Ω et Ω' les éléments de matrice (supposés réels) :

$$\Omega = \frac{\langle\phi_1|\hat{\vec{\mu}}.\vec{\mathcal{E}}_o|\phi_2\rangle}{2\hbar} = \frac{\langle\phi_2|\hat{\vec{\mu}}.\vec{\mathcal{E}}_o|\phi_1\rangle}{2\hbar} \quad ; \quad \Omega' = \frac{\langle\phi_2|\hat{\vec{\mu}}.\vec{\mathcal{E}}_o'|\phi_3\rangle}{2\hbar} = \frac{\langle\phi_3|\hat{\vec{\mu}}.\vec{\mathcal{E}}_o'|\phi_2\rangle}{2\hbar} \quad (4)$$

et on admettra que les règles de sélection sont telles que *tous les autres* éléments de matrices sont nuls.

1.2 Approximation séculaire

Dans l'approximation séculaire (ou approximation résonnante), on néglige dans les équations de la variation des constantes, tous les termes qui ont des facteurs exponentiels avec des fréquences élevées. Montrer que si on ne garde que les termes strictement en résonance, on obtient pour le cas étudié ici :

$$i\frac{d\vec{b}}{dt} = [A]\vec{b} \quad (5)$$

où $\vec{b}$ est le vecteur de composantes $b_n(t)\,(n=1,2,3)$ et $[A]$ une matrice constante à déterminer.

1.3 Etats de Floquet

a.) Montrer que les valeurs propres de la matrice $[A]$ sont données par :

$$\lambda^{(0)} = 0 \qquad ; \qquad \lambda^{(\pm)} = \pm\sqrt{\Omega^2 + \Omega'^2} \quad (6)$$

b.) En posant $b_n^{(\lambda)} = a_n^{(\lambda)} e^{-i\lambda t}$ dans (5), trouver des solutions particulières pour chaque valeur propre $\lambda = \lambda^{(0)}, \lambda^{(\pm)}$.

c.) Montrer que les vecteurs d'états normés (états de Floquet) associés à ces solutions sont donnés par (à une phase constante près sans importance) :

$$\left|\psi^{(0)}(t)\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{\Omega^2 + \Omega'^2}}\left[\Omega' e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t}\left|\phi_1\right\rangle - \Omega e^{-\frac{i}{\hbar}E_3 t}\left|\phi_3\right\rangle\right] \quad (7)$$

et

$$\left|\psi^{(\pm)}(t)\right\rangle = \frac{e^{\mp i\sqrt{\Omega^2+\Omega'^2}\,t}}{\sqrt{2\left(\Omega^2+\Omega'^2\right)}}\left[\Omega e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t}\left|\phi_1\right\rangle + \Omega' e^{-\frac{i}{\hbar}E_3 t}\left|\phi_3\right\rangle \pm \sqrt{\Omega^2+\Omega'^2}\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_2 t}\left|\phi_2\right\rangle\right] \quad (8)$$

d.) Montrer que ces états sont orthogonaux et donc que les trois états $\left\{\left|\psi^{(0)}(t)\right\rangle, \left|\psi^{(\pm)}(t)\right\rangle\right\}$ constituent une base orthonormée (base de Floquet).

1.4 Expression de l'état $|\phi_1\rangle$ en termes des états de Floquet

Montrer, en utilisant (7) et (8) que :

$$\left|\phi_1\right\rangle = \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t}}{\sqrt{\Omega^2+\Omega'^2}}\left[\Omega'\left|\psi^{(0)}(t)\right\rangle + \frac{\Omega}{\sqrt{2}}\left(e^{i\sqrt{\Omega^2+\Omega'^2}\,t}\left|\psi^{(+)}(t)\right\rangle + e^{-i\sqrt{\Omega^2+\Omega'^2}\,t}\left|\psi^{(-)}(t)\right\rangle\right)\right] \quad (9)$$

1.5 Condition initiale

On suppose que le système, en l'absence des champs appliqués, se trouve dans l'état $|\phi_1\rangle$. A l'instant $t=0$ on branche l'interaction avec $\mathcal{E}_o = 0$ et $\mathcal{E}_o' \neq 0$ (c'est-à-dire $\Omega = 0$ et $\Omega' \neq 0$). Montrer que l'état du système à l'instant t est donné par :

$$\left|\Psi(t=0)\right\rangle = \left|\psi^{(0)}(t=0)\right\rangle \quad (10)$$

1.6 Evolution adiabatique des champs

Pour $t > 0$ on fait varier les amplitudes $\mathcal{E}_o$ et $\mathcal{E}_o'$ des champs (et donc Ω et Ω') très lentement, de telle sorte que l'état du système se trouve toujours décrit par le même état de Floquet. On a donc, pour $t > 0$, $\left|\Psi(t)\right\rangle = \left|\psi^{(0)}(t)\right\rangle$. Montrer alors que si on augmente lentement Ω et simultanément on décroît lentement Ω' vers zéro, le système va se trouver transféré à 100% vers l'état $\left|\phi_3\right\rangle$.

Cette technique, développée ces dernières années, pour créer des populations dans des états excités atomiques et moléculaires sans compétition avec l'émission spontanée, a reçu le nom de STIRAP (Stimulated Raman Adiabatic Passage).

• PROBLEME 2 : CRYPTOGRAPHIE QUANTIQUE

PRINCIPES ET EXEMPLE DE LA DETECTION D'UNE ECOUTE INDESIRABLE

La cryptographie est l'art - vieux comme le monde - de communiquer au moyen de conventions assurant que le message transmis est à l'abri des indiscrétions. L'idée la plus naturelle est d'utiliser un *codage* des messages confidentiels : toute lettre de l'alphabet est remplacée biunivoquement par un autre signe, généralement un nombre – d'où l'expression *message chiffré*. Le lexique donnant la correspondance biunivoque s'appelle la *clé* et c'est elle qui doit rester absolument confidentielle. Le procédé porte le nom de *cryptographie à clé secrète.* Par exemple, on code une lettre en langage binaire, lui associant une suite $\{x_i\}$ de 0 à 1, laquelle n'a rien de confidentiel (tout le monde peut prendre la même) puis on tire au hasard une autre suite $\{y_i\}$ de 0 à 1, qui constitue la clé à proprement parler et qui, elle, est confidentielle. Le chiffrage de la lettre est constitué par la suite des sommes $\{x_i + y_i \text{ modulo } 2\}$.

L'élément crucial est la confidentialité de la clé permettant de coder et décoder le message transmis, étant entendu que celui-ci peut à la limite être rendu public. Tout le problème est donc d'assurer la sécurité du message initial définissant la clé.

Toute transmission classique d'information peut être interceptée *passivement*, c'est-à-dire sans modification de la teneur du message ; bien sûr il peut y avoir d'énormes difficultés techniques à surmonter pour y parvenir, mais c'est *en principe* possible.

Au contraire, parce qu'une *mesure quantique* perturbe (en général) le système objet de la mesure, l'observation indésirable peut être *en principe* facilement détectée. La mécanique quantique permet ainsi de construire des procédures permettant de savoir si, lors d'une transmission, on est écouté ou non.

On se limitera dans ce problème à donner quelques idées de base, étant entendu qu'il existe une littérature énorme sur le sujet, où divers scénarios sont envisagés et décrits.
Dans une première partie, on considère un exemple formel, posant les idées essentielles montrant comment la mécanique quantique permet de concevoir des *protocoles* révélant *à coup sûr* la présence d'une écoute indésirable. Un exemple utilisant un atome à trois niveaux est ensuite étudié en détail dans une seconde partie.

I-/ PRINCIPES

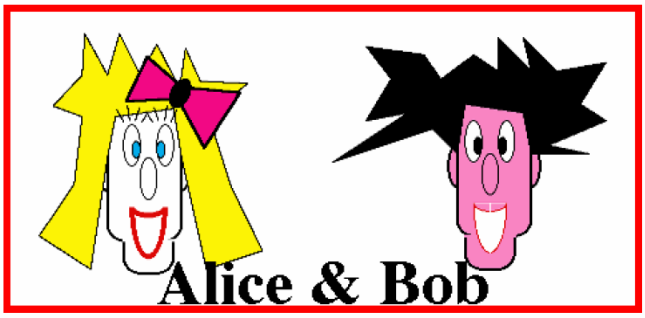
L'idée de base est simple et met en jeu des séquences de mesures successives d'observables qui ne commutent pas (grandeurs physiques dites *incompatibles*).

De façon un peu abstraite, les choses se présentent comme suit. Soit $\hat{A}$ et $\hat{B}$ deux observables incompatibles $\left(\text{i.e.}\left[\hat{A},\hat{B}\right]\neq 0\right)$ dont l'une, $\hat{A}$ pour fixer les idées, est une constante du mouvement $\left(\text{i.e. }\left[\hat{A},\hat{H}\right]=0\right)$, alors que $\hat{B}$ n'en est pas une $\left(\text{i.e. }\left[\hat{B},\hat{H}\right]\neq 0\right)$. A un certain instant $t=0$, on mesure $\hat{A}$ et on trouve a_m, l'une des valeurs propres de $\hat{A}$; on sait d'avance que la probabilité d'obtenir cette valeur est égale à $\left|\left\langle a_m \middle| \psi(t=0)\right\rangle\right|^2$. Juste après cette mesure, l'état du système est $\left|\psi(t=0+0)\right\rangle=\left|a_m\right\rangle$ (postulat de réduction du paquet d'onde). Si aucune autre mesure n'est effectuée jusqu'à l'instant t, le système évolue librement, évolution régie par l'équation de Schrödinger. Une nouvelle mesure de $\hat{A}$ à cet instant donne le résultat a_m, cette fois avec certitude. En effet, l'état à l'instant t est :

$$\left|\psi(t)\right\rangle=\hat{U}(0,t)\left|\psi(t=0+0)\right\rangle=\hat{U}(0,t)\left|a_m\right\rangle$$

(où $\hat{U}(0,t)$ est l'opérateur d'évolution entre les instants 0 et t), mais comme $\hat{A}$ et $\hat{H}$ commutent, l'état $\left|a_m\right\rangle$ produit par la réduction du paquet d'onde consécutive à la première mesure de $\hat{A}$ est également état propre de $\hat{H}$. Il en résulte que $\left|\psi(t)\right\rangle=e^{-\frac{i}{\hbar}E_m t}\left|a_m\right\rangle$ (notations habituelles évidentes) et que la deuxième mesure de $\hat{A}$ produit la même valeur a_m avec certitude $\left(\text{i.e. probabilité de } 1\right)$.

Si les deux mesures sont effectuées par deux observateurs distincts (Alice et Bob) $(*)$ ces derniers doivent donc constater que leurs résultats sont **toujours identiques** quand la même séquence est répétée un grand nombre de fois, à la limite infinie.



$(*)$ *La littérature a pris l'habitude d'appeler Alice et Bob les deux personnes communiquant entre elles et souhaitant se mettre à l'abri des malversations d'un « espion ». Ce dernier est souvent appelé Eve (venant de : to eavesdrop = écouter aux portes !).*

Imaginons maintenant au contraire que, entre la première mesure de $\hat{A}$ et la seconde, à l'instant t_1 $(0<t_1<t)$, une tierce personne mesure $\hat{B}$, qui n'est pas une constante du mouvement. Cet *espion* trouve l'une des valeurs propres b_n de $\hat{B}$ et l'état issu de cette mesure est, en l'absence de dégénérescence, $\left|\psi(t=t_1+0)\right\rangle=\left|b_n\right\rangle$. Il ne s'agit pas d'un état stationnaire, puisque $\hat{H}$ et $\hat{B}$ ne commutent pas, à l'instant ultérieur t, cet état est devenu :

$$\left|\psi(t)\right\rangle=\sum_{m'}C_{m'}e^{-\frac{i}{\hbar}E_{m'}(t-t_1)}\left|a_{m'}\right\rangle \quad , \quad \begin{cases} C_{m'}=\left\langle a_{m'}\middle|b_n\right\rangle \\ t_1<t \end{cases}$$

Dans ces conditions, la mesure de $\hat{A}$ à l'instant t peut alors produire **l'une quelconque** des valeurs propres $a_{m'}$. La probabilité de trouver $a_{m'}$ est $P_{a_{m'}}=\left|C_{m'}\right|^2$. Le résultat brut est que les

résultats obtenus par Alice et Bob effectuant les deux mesures de $\hat{A}$ ne sont plus nécessairement identiques. En fait, lorsque la séquence est répétée un grand nombre de fois, il suffit que **l'un** de leurs résultats soit différent pour qu'ils puissent affirmer avec certitude qu'ils sont victimes d'une écoute et que la sécurité de leur transmission n'est pas assurée.

II-/ L'EXEMPLE DE L'ATOME A TROIS NIVEAUX

II-1./ Soit un atome à trois niveaux $\{|p\rangle\}$ (un fondamental $p=0$ et deux niveaux excités $p=1,2$) dont le Hamiltonien s'écrit dans la base $\{|p\rangle\}$:

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(-|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2|\right) \quad (1)$$

Soit $\hat{A}$ une observable donnée par :

$$\hat{A} = a\left(|0\rangle\langle 0| + i|1\rangle\langle 2| - i|2\rangle\langle 1|\right) \quad (a \in \mathbb{R}) \quad (2)$$

a) Calculer les valeurs propres de $\hat{H}$ et $\hat{A}$ et en déduire que $\hat{A}$ est une constante du mouvement. (*On adoptera la notation* $|\psi_{\alpha\beta}\rangle$ *pour ces vecteurs propres, où le premier indice* α *renvoie au signe des valeurs propres de* $\hat{H}$ *, le second,* β *au signe de la valeur propre dégénérée de* $\hat{A}$ *).*

L'observable $\hat{B}$ est prise sous la forme :

$$\hat{B} = b\left(|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| + |2\rangle\langle 2|\right) \quad (b \in \mathbb{R}) \quad (3)$$

b) Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de $\hat{B}$.

c) $\{\hat{H}, \hat{A}, \hat{B}\}$ forment-elles un ECOC ?

II-2./ Alice et Bob effectuent des mesures de $\hat{A}$ aux instants 0 et t . A l'issue d'une telle opération, l'état du système est parfaitement défini. Si aucune mesure de $\hat{B}$ n'est faite entre-temps, les résultats des deux observateurs coïncident dans tous les cas.

En revanche, soit une mesure de $\hat{B}$ effectuée à l'instant t_1 compris entre 0 et t . Pour fixer les idées, on suppose que le premier observateur a trouvé $+\hbar\omega$ et $+a$ lors d'une mesure de $\hat{H}$ et $\hat{A}$. L'état de départ de l'atome est donc $|\psi(0+)\rangle = |\psi_{++}\rangle$.

a) Ecrire l'état du système à l'instant t_1 .

b) Quels peuvent être les résultats de mesure de $\hat{B}$ à l'instant t_1 et leurs probabilités ?

c) Suivant le résultat de mesure obtenu précédemment, écrire dans chaque cas l'état du système à l'instant t .

d) Donner, dans chaque cas, les résultats de mesure (et leurs probabilités) d'un deuxième observateur lors d'une mesure de $\hat{H}$ et $\hat{A}$. Conclusion.

II-3./ Ainsi, au coup par coup, Alice et Bob peuvent trouver des résultats différents. La probabilité d'obtenir des résultats identiques est une *probabilité conditionnelle* :

$$P_{\text{résultats identiques}} = P\left(++;t \middle| ++;t=0\right)$$

qui peut s'exprimer suivant une relation de chaîne dite de Bachelier-Chapman-Kolmogorov :

$$P\left(++;t \middle| ++;t=0\right) = \sum_{\varepsilon=\pm 1} P\left(++;t \middle| \varepsilon b;t_1\right) P\left(\varepsilon b;t_1 \middle| ++;t=0\right)$$

où la somme représente la somme des probabilités d'événements mutuellement exclusifs. Cette dernière expression est la somme sur toutes les « trajectoires » possibles, une mesure intermédiaire ayant été faite. Lorsque aucune mesure intermédiaire n'est faite, la probabilité est le module au carré d'une somme *d'amplitudes*. Ici, compte tenu de la réduction du paquet d'onde liée à la mesure de $\hat{B}$ à t_1, la probabilité est une somme de *probabilités*, chacune de celles-ci étant le module carré d'une amplitude.

a) Calculer dans le cas présent la probabilité $P\left(++;t\middle|++;t=0\right)$ pour que les deux observateurs, Alice et Bob, trouvent $+\hbar\omega$ et $+a$ à l'instant t lors d'une mesure de $\hat{H}$ et $\hat{A}$, sachant qu'une mesure de ces grandeurs physiques avait donné ces résultats à l'instant $t=0$.

b) Expliquer pourquoi les probabilités exhibées ne dépendent pas du temps :

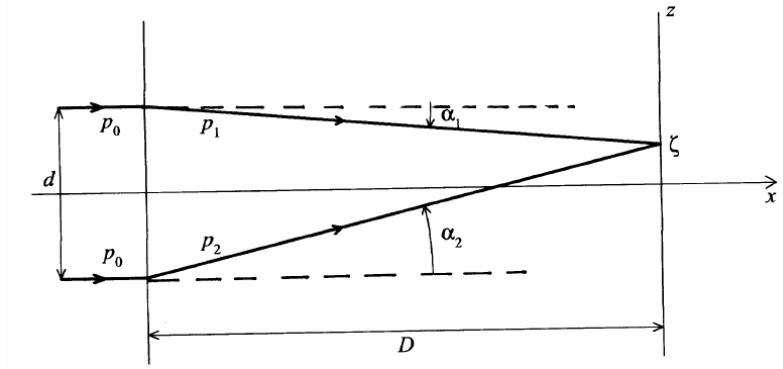
- Quand il s'agit d'une mesure de $\hat{A}$
- En ce qui concerne la mesure de $\hat{B}$

Corrigé :

PARTIE A

EXERCICE 1 : INEGALITES DE HEISENBERG & INTERFERENCES D'YOUNG AVEC DES ELECTRONS

1.- Soit q_1 (respectivement q_2) l'impulsion transmise à la plaque par l'électron passant par la fente 1 (respectivement 2). La conservation de l'énergie et de l'impulsion s'écrit si la



particule est passée en 1 (cf. figure ci-dessous) :

$$\frac{p_0^2}{2m} = \frac{q_1^2}{2M} + \frac{p_1^2}{2m} \simeq \frac{1}{2m}\left(p_{1x}^2 + p_{1z}^2\right)$$

α_1 étant l'angle de diffusion, supposé petit, on aura :

$$q_1 = -p_{1z} \simeq -\left|\vec{p}\right|\alpha_1 \text{ avec } \alpha_1 \sim \frac{z - \frac{d}{2}}{D}$$

$$q_2 \sim -p_0\alpha_2 \text{ avec } \alpha_2 \sim \frac{z + \frac{d}{2}}{D}$$

Conclusion : On peut donc, par mesure de l'impulsion q de la plaque suivant Oz, distinguer les deux cas et déterminer par quelle fente est passée par la particule.

2.- La conclusion précédente n'est vraie qu'à la condition que l'écart quadratique σ_q soit nettement inférieur à la différence entre q_1 et q_2. Or $q_1 - q_2 = \frac{p_0 d}{D}$. Donc :

$$\sigma_q < \eta' p_0 \frac{d}{D}$$

3.- Pour que les conditions sur σ_ξ et σ_q soient réalisées, nous devons avoir :

$$\sigma_q \sigma_\xi < \eta\eta' \delta z \; p_0 \frac{d}{D} = \eta\eta' \frac{h}{2}$$

soit $\sigma_q \sigma_\xi < \frac{h}{18}$ pour $\eta = \eta' = \frac{1}{3}$.

4.- Il s'agit d'un faux paradoxe. En effet, la relation d'incertitude de Heisenberg interdit la connaissance simultanée de la position et de l'impulsion de la plaque au-delà d'une certaine précision : autrement dit, $\sigma_q \sigma_\xi \geq \frac{\hbar}{2}$, ce qui est en contradiction avec le résultat trouvé à la question précédente.
Inversement, il est possible de mesurer par quelle fente est passé l'électron, mais alors la relation d'incertitude de Heisenberg entraîne qu'on ne peut observer de figure d'interférence en raison de l'indétermination sur ξ.

EXERCICE 2 :

1. Le Hamiltonien de la particule s'écrit : $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$ avec $\hat{V} = \frac{\hat{x}}{a} b$.

Au premier ordre de la théorie des perturbations stationnaires, la correction $\Delta E_n^{(1)}$ est

$$\Delta E_n^{(1)} = \langle \phi_n | \hat{V} | \phi_n \rangle = \langle \phi_n | \frac{\hat{x}}{a} b | \phi_n \rangle$$

$$= \frac{b}{a}\frac{2}{a}\int_0^a \sin\left(n\frac{\pi x}{a}\right) x \sin\left(n\frac{\pi x}{a}\right) dx = \frac{2b}{a^2}\int_0^a x \sin^2\left(n\frac{\pi x}{a}\right) dx$$

$$\Delta E_n^{(1)} = \frac{b}{2} \quad (\forall n)$$

Au premier ordre, les énergies de tous les états de la particule croissent d'une quantité $\frac{b}{2}$.

2. Au premier ordre, l'état $|\psi_n\rangle$ s'écrit : $|\psi_n\rangle = |\phi_n\rangle + \sum_{f \neq n} \frac{\langle \phi_n | \hat{V} | \phi_f \rangle}{E_n^{(0)} - E_f^{(0)}} |\phi_f\rangle$

Avec $E_n^{(0)} - E_f^{(0)} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}\left(n^2 - f^2\right) = E_1^{(0)}\left(n^2 - f^2\right)$

$$\langle \phi_n | \hat{V} | \phi_f \rangle = \frac{2b}{a^2}\int_0^a x \sin\left(n\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(f\frac{\pi x}{a}\right) dx = \frac{b}{a^2}\int_0^a x\left[\cos(f-n)\frac{\pi x}{a} - \cos(f+n)\frac{\pi x}{a}\right] dx$$

$$= \frac{b}{\pi^2}\left\{\frac{1}{(f-n)^2}\int_0^{(f-n)\pi} x\cos x dx - \frac{1}{(f+n)^2}\int_0^{(f+n)\pi} x \cos x dx\right\}$$

$$\langle \phi_n | \hat{V} | \phi_f \rangle = \begin{cases} \frac{2b}{\pi^2}\left\{\frac{1}{(f+n)^2} - \frac{1}{(f-n)^2}\right\} & \text{si } (f+n) \text{ et } (f-n) \text{ sont impairs} \\ 0 \text{ si } (f+n) \text{ et } (f-n) \text{ sont pairs} \end{cases}$$

donc :

$$\langle \phi_1 | \hat{V} | \phi_2 \rangle = \frac{2b}{\pi^2}\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{1^2}\right) = -0{,}18b \quad ; \quad \langle \phi_1 | \hat{V} | \phi_3 \rangle = 0$$

$$\langle \phi_1 | \hat{V} | \phi_4 \rangle = \frac{2b}{\pi^2}\left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{3^2}\right) = -0{,}014b \quad ; \quad \langle \phi_1 | \hat{V} | \phi_5 \rangle = 0$$

etc……

L'état $|\psi_1\rangle$ s'écrit : $\boxed{|\psi_1\rangle = |\phi_1\rangle + 0{,}06\frac{b}{E_0^1}|\phi_2\rangle + 0{,}0096\frac{b}{E_0^1}|\phi_4\rangle + \cdots}$

• PROBLEME 1 : TRANSFERT DE POPULATION PAR LA TECHNIQUE « STIRAP » (Stimulated Raman Adiabatic Passage)

1.1 Equations de la variation des constantes

Dans la base $\{|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, |\phi_3\rangle\}$ des états propres de l'Hamiltonien $\hat{H}_0$, la matrice représentative de l'Hamiltonien $\hat{H}(t) = \hat{H}_0 + \hat{V}(t)$ s'écrit :

$$\left(\hat{H}(t)\right) = \begin{pmatrix} E_1 & -2\hbar\Omega\cos\omega t & 0 \\ -2\hbar\Omega\cos\omega t & E_2 & -2\hbar\Omega'\cos\omega' t \\ 0 & -2\hbar\Omega'\cos\omega' t & E_3 \end{pmatrix}$$

L'état du système étant pris sous la forme :

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{n=1,2,3} b_n(t) e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t} |\phi_n\rangle$$

l'équation de Schrödinger s'écrit sous forme matricielle dans cette base :

$$i\hbar\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} b_1 e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t} \\ b_2 e^{-\frac{i}{\hbar}E_2 t} \\ b_3 e^{-\frac{i}{\hbar}E_3 t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 & -2\hbar\Omega\cos\omega t & 0 \\ -2\hbar\Omega\cos\omega t & E_2 & -2\hbar\Omega'\cos\omega' t \\ 0 & -2\hbar\Omega'\cos\omega' t & E_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t} \\ b_2 e^{-\frac{i}{\hbar}E_2 t} \\ b_3 e^{-\frac{i}{\hbar}E_3 t} \end{pmatrix}$$

d'où le système d'équations différentielles couplée permettant de déterminer les coefficients $b_n(t)\,(n = 1, 2, 3)$:

$$\begin{cases} \dot{b}_1(t) = 2i\Omega b_2(t) e^{-i\omega t}\cos\omega t \\ \dot{b}_2(t) = 2i\Omega b_1(t) e^{i\omega t}\cos\omega t + 2i\Omega' b_3(t) e^{i\omega' t}\cos\omega' t \\ \dot{b}_3(t) = 2i\Omega' b_2(t) e^{-i\omega' t}\cos\omega' t \end{cases}$$

1.1Approximation séculaire

En remplaçant $\cos\omega t$ par $\dfrac{e^{i\omega t} + e^{-\omega t}}{2}$ et $\cos\omega' t$ par $\dfrac{e^{i\omega' t} + e^{-\omega' t}}{2}$ et en effectuant l'approximation séculaire qui consiste à négliger les termes de hautes fréquences, le système précédent se simplifie en :

$$\begin{cases} \dot{b}_1(t) = i\Omega b_2(t) \\ \dot{b}_2(t) = i\Omega b_1(t) + i\Omega' b_3(t) \\ \dot{b}_3(t) = i\Omega' b_2(t) \end{cases}$$

que l'on peut encore écrire sous forme matricielle :

$$i\begin{pmatrix}\dot{b}_1(t)\\ \dot{b}_2(t)\\ \dot{b}_3(t)\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}0 & \Omega & 0\\ \Omega & 0 & \Omega'\\ 0 & \Omega' & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1(t)\\ b_2(t)\\ b_3(t)\end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad i\frac{d\vec{b}}{dt}=(A)\vec{b}$$

où la matrice constante (A) a pour expression :

$$(A)=\begin{pmatrix}0 & -\Omega & 0\\ -\Omega & 0 & -\Omega'\\ 0 & -\Omega' & 0\end{pmatrix}$$

1.3 Etats de Floquet

a.) Les valeurs propres de (A) sont $\begin{cases}\lambda^{(0)}=0\\ \lambda^{(\pm)}=\pm\sqrt{\Omega^2+\Omega'^2}\end{cases}$

b.) En posant $b_n^{(\lambda)}(t)=a_n^{(\lambda)}e^{-i\lambda t}$ on a de façon évidente :

$$i\frac{d\vec{b}}{dt}=(A)\vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda\vec{a}^{(\lambda)}=(A)\vec{a}^{(\lambda)} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases}\lambda^{(0)}a_1^{(0)}=-\Omega a_2^{(0)} & (1)\\ \lambda^{(0)}a_2^{(0)}=-\Omega a_1^{(0)}-\Omega' a_3^{(0)} & (2)\\ \lambda^{(0)}a_3^{(0)}=-\Omega' a_2^{(0)} & (3)\end{cases}$$

et comme $\lambda^{(0)}=0$, il résulte de l'équation (1) que $a_2^{(0)}=b_2^{(0)}(t)=0$. De même (3) implique que $\Omega a_1^{(0)}=-\Omega' a_3^{(0)}$ soit : $b_3^{(0)}=-\dfrac{\Omega}{\Omega'}b_1^{(0)}$.

L'état du système s'écrit : $\left|\Psi^{(0)}(t)\right\rangle=b_1^{(0)}e^{-\frac{i}{\hbar}E_1t}\left|\phi_1\right\rangle-\dfrac{\Omega}{\Omega'}b_1^{(0)}e^{-\frac{i}{\hbar}E_3t}\left|\phi_3\right\rangle$

$b_1^{(0)}$ est déterminé par normalisation à l'unité de l'état $\left|\Psi^{(0)}(t)\right\rangle$, soit $b_1^{(0)}=\dfrac{\Omega'}{\sqrt{\Omega^2+\Omega'^2}}$.

On a donc une première solution particulière :

$$\left|\Psi^{(0)}(t)\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{\Omega^2+\Omega'^2}}\left[\Omega' e^{-\frac{i}{\hbar}E_1t}\left|\phi_1\right\rangle-\Omega e^{-\frac{i}{\hbar}E_3t}\left|\phi_3\right\rangle\right] \quad (4)$$

De la même façon, on aura pour les valeurs propres $\lambda^{(\pm)}$:

$$\begin{cases}\lambda^{(\pm)}a_1^{(\pm)}=-\Omega a_2^{(\pm)} & \Rightarrow a_1^{(\pm)}=-\dfrac{\Omega}{\lambda^{(\pm)}}a_2^{(\pm)} \Leftrightarrow b_1^{(\pm)}=-\dfrac{\Omega}{\lambda^{(\pm)}}b_2^{(\pm)}\\ \lambda^{(\pm)}a_2^{(\pm)}=-\Omega a_1^{(\pm)}-\Omega' a_3^{(\pm)} & \\ \lambda^{(\pm)}a_3^{(\pm)}=-\Omega' a_2^{(\pm)} & \Rightarrow a_3^{(\pm)}=-\dfrac{\Omega'}{\lambda^{(\pm)}}a_2^{(\pm)} \Leftrightarrow b_3^{(\pm)}=-\dfrac{\Omega'}{\lambda^{(\pm)}}b_3^{(\pm)}\end{cases}$$

Il en résulte deux autres solutions particulières :

$$\left|\psi^{(\pm)}(t)\right\rangle=-\frac{b_2^{(\pm)}(t)}{\lambda^{(\pm)}}\left[\Omega e^{-\frac{i}{\hbar}E_1t}\left|\phi_1\right\rangle-\lambda^{(\pm)}e^{-\frac{i}{\hbar}E_2t}\left|\phi_2\right\rangle+\Omega' e^{-\frac{i}{\hbar}E_3t}\left|\phi_3\right\rangle\right]$$

$b_2^{(\pm)}(t)$ est déterminé par normalisation de $\left|\psi^{(\pm)}(t)\right\rangle$ (à une phase globale près sans importance) :

$$\left\langle\psi^{(\pm)}(t)\middle|\psi^{(\pm)}(t)\right\rangle = 1 \Rightarrow b_2^{(\pm)}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

et en remplaçant $\lambda^{(\pm)}$ par les valeurs $\lambda^{(\pm)} = \pm\sqrt{\Omega^2 + \Omega'^2}$, on obtient les expressions suivantes pour les deux autres solutions particulières :

$$\left|\psi^{(\pm)}(t)\right\rangle = \pm\frac{1}{\sqrt{2\left(\Omega^2+\Omega'^2\right)}}\left[\Omega\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t}\left|\phi_1\right\rangle \mp \sqrt{\Omega^2+\Omega'^2}\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_2 t}\left|\phi_2\right\rangle + \Omega' e^{-\frac{i}{\hbar}E_3 t}\left|\phi_3\right\rangle\right] \quad (5)$$

c.) On vérifie (sans peine) que ces états de Floquet (déjà normés par construction) satisfont à :

$$\left\langle\psi^{(-)}(t)\middle|\psi^{(+)}(t)\right\rangle = \left\langle\psi^{(0)}(t)\middle|\psi^{(+)}(t)\right\rangle = \left\langle\psi^{(0)}(t)\middle|\psi^{(-)}(t)\right\rangle = 0$$

ils constituent donc une base orthonormée (base de Floquet) de vecteurs propres de $\hat{H}(t)$.

1.4 Expression de l'état $\left|\phi_1\right\rangle$ en termes des états de Floquet

$$(4) \Rightarrow \Omega' e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t}\left|\phi_1\right\rangle - \Omega e^{-\frac{i}{\hbar}E_3 t}\left|\phi_3\right\rangle = \sqrt{\Omega^2+\Omega'^2}\left|\Psi^{(0)}(t)\right\rangle \quad (6)$$

$$(5) \Rightarrow \Omega\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t}\left|\phi_1\right\rangle + \Omega' e^{-\frac{i}{\hbar}E_3 t}\left|\phi_3\right\rangle = \frac{\sqrt{\Omega^2+\Omega'^2}}{\sqrt{2}}\left[\left|\psi^{(+)}(t)\right\rangle - \left|\psi^{(-)}(t)\right\rangle\right] \quad (7)$$

et

$$(6)\times\Omega' + (7)\times\Omega \Rightarrow \left(\Omega^2+\Omega'^2\right)e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t}\left|\phi_1\right\rangle = \sqrt{\Omega^2+\Omega'^2}\left[\Omega'\left|\psi^{(0)}(t)\right\rangle + \frac{\Omega}{\sqrt{2}}\left(\left|\psi^{(+)}(t)\right\rangle - \left|\psi^{(-)}(t)\right\rangle\right)\right]$$

d'où en définitive :

$$\left|\phi_1\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{\Omega^2+\Omega'^2}}\left[\Omega' e^{\frac{i}{\hbar}E_1 t}\left|\psi^{(0)}(t)\right\rangle + \frac{\Omega}{\sqrt{2}}e^{\frac{i}{\hbar}E_1 t}\left(\left|\psi^{(+)}(t)\right\rangle - \left|\psi^{(-)}(t)\right\rangle\right)\right] \quad (8)$$

expression de $\left|\phi_1\right\rangle$ développé suivant la base de Floquet.

1.5 Condition initiale

Initialement, $\Omega = \Omega' = 0$ et le système se trouve dans l'état $\left|\phi_1\right\rangle$.

A l'instant $t = 0$, l'une des interactions est branchée : $\Omega = 0$ et $\Omega' \neq 0$. D'après (8) le système est alors dans l'état :

$$\left|\Psi(t=0)\right\rangle = \left|\phi_1(t=0)\right\rangle = \left|\psi^{(0)}(t=0)\right\rangle \quad (9)$$

1.6 Evolution adiabatique des champs

Pour $t > 0$, l'évolution adiabatique des champs laisse inchangé l'état du système et par conséquent :

$$\left|\Psi(t)\right\rangle = \left|\psi^{(0)}(t)\right\rangle$$

La probabilité pour que l'état du système soit $\left|\phi_3\right\rangle$ au temps τ est donc la suivante :

$$P_{|\phi_1\rangle\to|\phi_3\rangle}(\tau)=\left|\left\langle\phi_3\middle|\psi^{(0)}(\tau)\right\rangle\right|^2=\frac{1}{\Omega^2+\Omega'^2}\left|\left\langle\phi_3\middle|\left(\Omega' e^{-\frac{i}{\hbar}E_1\tau}|\phi_1\rangle-\Omega e^{-\frac{i}{\hbar}E_3\tau}|\phi_3\rangle\right)\right|^2$$

$$=\frac{1}{1+\left(\frac{\Omega'}{\Omega}\right)^2}\left|\left\langle\phi_3\middle|\left\{\left(\frac{\Omega'}{\Omega}\right)e^{-\frac{i}{\hbar}E_1\tau}|\phi_1\rangle-e^{-\frac{i}{\hbar}E_3\tau}|\phi_3\rangle\right\}\right.\right|^2 \quad (10)$$

L'évolution adiabatique des champs consiste à faire croître lentement $(\tau\to\infty)$ Ω tout en faisant lentement décroître Ω'. En résumé : $\lim\limits_{\tau\to\infty}\frac{\Omega'}{\Omega}=0$ et d'après (10)

$$\lim_{\tau\to\infty}\frac{\Omega'}{\Omega}=0\Rightarrow\lim_{\frac{\Omega'}{\Omega}\to 0}\left\{P_{|\phi_1\rangle\to|\phi_3\rangle}\right\}=1$$

le système se trouve transféré à 100% dans l'état $|\phi_3\rangle$.

• PROBLEME 2 : CRYPTOGRAPHIE QUANTIQUE

PRINCIPES ET EXEMPLE DE LA DETECTION D'UNE ECOUTE INDESIRABLE

II-1./ a)

• $\hat{H}=\hbar\omega\left(-|0\rangle\langle 0|+|1\rangle\langle 1|+|2\rangle\langle 2|\right)\ \Rightarrow\ \hat{H}=\hbar\omega\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ de valeurs et vecteurs propres :

$$\begin{cases}+\hbar\omega \text{ (doublement dégénérée)} \quad\leftrightarrow\quad \begin{cases}|+,1\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\rangle-i|2\rangle\right)\\ |+,2\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-i|1\rangle+|2\rangle\right)\end{cases}\\ -\hbar\omega \quad\leftrightarrow\quad |-\rangle=|0\rangle\end{cases}\quad (1)$$

• $\hat{A}=a\left(|0\rangle\langle 0|+i|1\rangle\langle 2|-i|2\rangle\langle 2|\right)\ \Rightarrow\ \hat{A}=a\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix}$ de valeurs et vecteurs propres :

$$\begin{cases}+a \text{ (doublement dégénérée)} \quad\leftrightarrow\quad \begin{cases}|+a,1\rangle=|0\rangle\\ |+a,2\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\rangle-i|2\rangle\right)\end{cases}\\ -a \quad\leftrightarrow\quad |-a\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-i|1\rangle+|2\rangle\right)\end{cases}\quad (2)$$

(1) et (2) $\Rightarrow$ $\left[\hat{H},\hat{A}\right]=0$ (même base de vecteurs propres) $\Rightarrow$ $\hat{A}$ est une constante du mouvement.

Notation de la base commune de l'ECOC $\left\{\hat{H},\hat{A}\right\}$: $\left\{|\psi_{\alpha\beta}\rangle\right\}$, soit :

$$\begin{cases} |\psi_{-+}\rangle = |0\rangle \quad \leftrightarrow \quad \{-\hbar\omega, +a\} \\ |\psi_{++}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\rangle - i|2\rangle\right) \quad \leftrightarrow \quad \{+\hbar\omega, +a\} \\ |\psi_{+-}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-i|1\rangle + |2\rangle\right) \quad \leftrightarrow \quad \{+\hbar\omega, -a\} \end{cases}$$

Inversement, les vecteurs de base s'écrivent :

$$\begin{cases} |0\rangle = |\psi_{-+}\rangle \\ |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\psi_{++}\rangle + i|\psi_{+-}\rangle\right) \\ |2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\psi_{+-}\rangle + i|\psi_{++}\rangle\right) \end{cases}$$

b)

$\hat{B} = b\left(|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| + |2\rangle\langle 2|\right) \quad \Rightarrow \quad \hat{B} = b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de valeurs et vecteurs propres :

$$\begin{cases} +b \ \left(\text{doublement dégénérée}\right) \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} |+b,1\rangle = |2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\psi_{+-}\rangle + i|\psi_{++}\rangle\right) \\ |+b,2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + |1\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\psi_{-+}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\psi_{++}\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|\psi_{+-}\rangle\right) \end{cases} \\ -b \quad \leftrightarrow \quad |-b\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-|0\rangle + |1\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-|\psi_{-+}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\psi_{++}\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|\psi_{+-}\rangle\right) \end{cases}$$

c)

$\Rightarrow \quad \left[\hat{A}, \hat{B}\right] \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \hat{A}$ et $\hat{B}$ sont deux grandeurs physiques incompatibles. $\left\{\hat{H}, \hat{A}, \hat{B}\right\}$ n'est pas un ECOC.

II-2./ a) Hypothèse : Le premier observateur mesure : $\{+\hbar\omega, +a\}$

L'état initial du système est donc : $|\psi(0+)\rangle = |\psi_{++}\rangle$. Soit, développé sur la base des états propres de $\hat{B}$:

$$|\psi_{++}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+b,2\rangle + |-b\rangle\right) - i|+b,1\rangle\right]$$

A l'instant t_1, l'état du système est :

$$|\psi(t_1)\rangle = \hat{U}(0,t_1)|\psi_{++}\rangle = \frac{e^{-i\omega t_1}}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+b,2\rangle + |-b\rangle\right) - i|+b,1\rangle\right]$$

b) Une mesure de $\hat{B}$ au temps t_1 donne par conséquent :

$$\begin{cases} +b \text{ avec la probabilité } \dfrac{3}{4} \\ -b \text{ avec la probabilité } \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

- Si la mesure de $\hat{B}$ a donné le résultat b, **immédiatement après la mesure** l'état du système est :

$$\left|\psi(t_1+0)\right\rangle = \frac{\hat{P}_{\{|b,1\rangle,|b,2\rangle\}}\left|\psi(t_1)\right\rangle}{\sqrt{\left\langle\psi(t_1)\right|\hat{P}_{\{|b,1\rangle,|b,2\rangle\}}\left|\psi(t_1)\right\rangle}} \quad \left(\text{réduction du paquet d'onde}\right)$$

où $\hat{P}_{\{|b,1\rangle,|b,2\rangle\}} = |b,1\rangle\langle b,1| + |b,2\rangle\langle b,2|$ est le projecteur sur le sous-espace propre relatif à la valeur propre b, doublement dégénérée, de $\hat{B}$.

$$\left|\psi(t_1+0)\right\rangle = \frac{\dfrac{e^{-i\omega t_1}}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}|b,2\rangle - i|b,1\rangle\right)}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}|b,2\rangle - i|b,1\rangle\right]$$

Soit, sur la base des états propres de l'ECOC $\left\{\hat{H},\hat{A}\right\}$:

$$\left|\psi(t_1+0)\right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}e^{-i\omega t_1}\left[\frac{1}{2}|\psi_{-+}\rangle + \frac{3}{2\sqrt{2}}|\psi_{++}\rangle - \frac{i}{2\sqrt{2}}|\psi_{+-}\rangle\right]$$

c) Au temps t, l'état du système est :

$$\left|\psi(t)\right\rangle = \hat{U}(t_1,t)\left|\psi(t_1+0)\right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\left[\frac{1}{2}e^{i\omega(t-t_1)}|\psi_{-+}\rangle + \frac{3}{2\sqrt{2}}e^{-i\omega(t-t_1)}|\psi_{++}\rangle - \frac{i}{2\sqrt{2}}e^{-i\omega(t-t_1)}|\psi_{+-}\rangle\right]$$

d) Le deuxième observateur (Bob), lors d'une mesure de $\hat{H}$ et $\hat{A}$, au temps t, va trouver comme résultats de mesure :

$$\begin{cases} (-\hbar\omega,+a) \text{ avec la probabilité } \dfrac{1}{6} \\ (+\hbar\omega,+a) \text{ avec la probabilité } \dfrac{3}{4} \\ (+\hbar\omega,-a) \text{ avec la probabilité } \dfrac{1}{12} \end{cases}$$

Au lieu de trouver, à coup sûr, le même résultat $(+\hbar\omega,+a)$ que le premier observateur (Alice).

- Si la mesure intermédiaire de $\hat{B}$ a donné le résultat $-b$, **immédiatement après la mesure** l'état du système est :

$$\left|\psi(t_1+0)\right\rangle = |-b\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-|0\rangle + |1\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[-|\psi_{-+}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\psi_{++}\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|\psi_{+-}\rangle\right)\right]$$

c) à l'instant t l'état du système est ;

$$\left|\psi(t)\right\rangle = \hat{U}(t_1,t)\left|\psi(t_1+0)\right\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_1)}\left|\psi(t_1+0)\right\rangle$$
$$= -\frac{e^{i\omega(t-t_1)}}{\sqrt{2}}\left|\psi_{-+}\right\rangle + \frac{e^{-i\omega(t-t_1)}}{2}\left|\psi_{++}\right\rangle + \frac{e^{-i\omega(t-t_1)}}{2}\left|\psi_{+-}\right\rangle$$

d) Par conséquent, une mesure de $\hat{H}$ et $\hat{A}$ effectuée par Bob au temps t, dans ce deuxième cas de figure, va donner :

$$\begin{cases} (-\hbar\omega,+a) \text{ avec la probabilité } \frac{1}{2} \\ (+\hbar\omega,+a) \text{ avec la probabilité } \frac{1}{4} \\ (+\hbar\omega,-a) \text{ avec la probabilité } \frac{1}{4} \end{cases}$$

Au lieu de trouver, à coup sûr, le même résultat $(+\hbar\omega,+a)$ que le premier observateur (Alice).

II-3./ a) En résumé :

Alice mesure $\hat{H}$ et $\hat{A}$: elle trouve comme résultat $(+\hbar\omega,+a)$. **Si aucune mesure intermédiaire sur $\hat{B}$** n'est effectuée par l'espion Eve, Bob trouve à coup sûr $(+\hbar\omega,+a)$ lors d'une mesure de $\hat{H}$ et $\hat{A}$.

Si une mesure intermédiaire de $\hat{B}$ a été effectuée par l'espion :

- L'espion a trouvé b comme résultat de mesure :

Lors d'une mesure de $\hat{H}$ et $\hat{A}$, Bob va trouver $\begin{cases} (-\hbar\omega,+a) \text{ avec la probabilité } \frac{1}{6} \\ (+\hbar\omega,+a) \text{ avec la probabilité } \frac{3}{4} \\ (+\hbar\omega,-a) \text{ avec la probabilité } \frac{1}{12} \end{cases}$

- L'espion a trouvé $-b$ comme résultat de mesure :

Lors d'une mesure de $\hat{H}$ et $\hat{A}$, Bob va trouver $\begin{cases} (-\hbar\omega,+a) \text{ avec la probabilité } \frac{1}{2} \\ (+\hbar\omega,+a) \text{ avec la probabilité } \frac{1}{4} \\ (+\hbar\omega,-a) \text{ avec la probabilité } \frac{1}{4} \end{cases}$

Si l'espion a effectué une mesure intermédiaire de $\hat{B}$, Bob ne trouve plus à coup sûr le même résultat que Alice.

Calculons la probabilité pour que Bob trouve le même résultat que Alice si l'espion a pratiqué une mesure intermédiaire sur la grandeur physique incompatible $\hat{B}$ du système.

$$
\begin{aligned}
P\left(++;t\middle|++;0\right) &= \sum_{\varepsilon=\pm1} P\left(++;t\middle|\varepsilon b;t_1\right)P\left(\varepsilon b;t_1\middle|++;0\right) \\
&= P\left(++;t\middle|b;t_1\right)P\left(b;t_1\middle|++;0\right)+P\left(++;t\middle|-b;t_1\right)P\left(-b;t_1\middle|++;0\right) \\
&= \frac{3}{4}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{5}{8}<1!
\end{aligned}
$$

Alice et Bob en déduisent que la sécurité de leur transmission n'est pas assurée. Ils ont été espionnés.

b) Toutes les probabilités exhibées ne dépendent pas du temps. En effet :

- Quand il s'agit de mesures de $\hat{A}$, toutes les réductions de paquet d'onde produisent des états stationnaires
- En ce qui concerne la mesure de $\hat{B}$, l'état sur lequel la mesure est faite est état propre de $\hat{H}$ et $\hat{A}$. C'est encore un état stationnaire et donc la probabilité de trouver les valeurs $\pm b$ sont indépendantes du temps. Enfin à l'issue de la mesure de $\hat{B}$ à t_1 l'état du système est $\left|b, i=1,2\right\rangle$ ou $\left|-b\right\rangle$. Lors d'une mesure de $\hat{H}$ et $\hat{A}$ à $t>t_1$ les probabilités sont de la forme $\left|\left\langle\psi_{\alpha\beta}\middle|\hat{U}\left(t-t_1\right)\middle|b, i=1,2\right\rangle\right|^2$ où $\left|\left\langle\psi_{\alpha\beta}\middle|\hat{U}\left(t-t_1\right)\middle|-b\right\rangle\right|^2$. $\hat{U}$ agissant sur le bra produit une simple phase temporelle qui disparaît du module carré.