

EXAMEN DE PHYSIQUE QUANTIQUE

PARTIE A

Traiter un exercice au choix
 Aucun document n'est autorisé
 Temps alloué : 1H

EXERCICE 1 : TRIPLE Puits DE POTENTIEL

On considère une particule dans un triple puits de potentiel. On désigne par $|i\rangle$ ($i = 1, 2$ ou 3) l'état de la particule lorsqu'elle se trouve dans le puits numéro i et on suppose que $\langle i | j \rangle = \delta_{ij}$.

1- Cas parfaitement symétrique

On introduit dans le système un processus qui permet à la particule de passer d'un puits à l'autre par effet tunnel, avec une amplitude $t > 0$, ce qui conduit à l'Hamiltonien :

$$\hat{H} = t(|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 3| + |3\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 3| + |3\rangle\langle 2|)$$

1) Démontrer que l'opérateur permutation $\hat{P}$ défini par :

$$\hat{P}|1\rangle = |2\rangle, \quad \hat{P}|2\rangle = |3\rangle, \quad \hat{P}|3\rangle = |1\rangle$$

commute avec l'Hamiltonien $\hat{H}$.

2) Que vaut $\hat{P}^3$? En déduire les valeurs propres de $\hat{P}$.

3) Déterminer les vecteurs propres associés.

4) En déduire les valeurs propres de $\hat{H}$ et leur dégénérescence.

2- Cas perturbé

On suppose désormais que le processus de passage par effet tunnel n'est pas totalement symétrique, ce qui conduit à rajouter à l'Hamiltonien la perturbation :

$$\hat{V} = \delta t(|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|)$$

1) Déterminer les énergies propres de $\hat{H} + \hat{V}$ au premier ordre en perturbation.

2) Démontrer que l'opérateur $\hat{P}_{12}$ défini par :

$$\hat{P}_{12}|1\rangle = |2\rangle, \quad \hat{P}_{12}|2\rangle = |1\rangle, \quad \hat{P}_{12}|3\rangle = |3\rangle$$

commute avec $\hat{H} + \hat{V}$.

3) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de $\hat{P}_{12}$.

4) En déduire le spectre exact de $\hat{H} + \hat{V}$. Comparer au résultat obtenu en perturbation.

EXERCICE 2 : Oscillateur dans un champ électrique

On considère un oscillateur harmonique à une dimension, de pulsation ω , formé d'une particule de masse m , élastiquement liée à l'origine et se déplaçant suivant l'axe Ox . Son Hamiltonien est $\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$. On note $\phi_n(x)$, $n = 0, 1, \dots$ ses fonctions propres.

1-1 Quelles sont les valeurs propres correspondantes E_n ?

2-1 La particule a une charge électrique q . On applique un champ électrique constant uniforme $\mathcal{E}$ parallèle à Ox . Si la position de la particule est x , son moment dipolaire électrique est $\hat{d} = q\hat{x}$. Ecrire l'énergie potentielle $\hat{W}$ de l'oscillateur dans le champ.

3-1 Ecrire le Hamiltonien $\hat{H}$ du système en présence du champ.

4-1 Quels sont les niveaux d'énergie W_n du système dans le champ $\mathcal{E}$?

(On introduira le changement de variable $X = x - \frac{q\mathcal{E}}{m\omega^2}$).

5-1 Quelles sont, en fonction des $\{\phi_n(x)\}$, les nouvelles fonctions propres $\{\psi_n(x)\}$ en présence du champ ?

6-1 Quelle est la valeur moyenne du moment dipolaire $\langle \hat{d} \rangle$ dans l'état $\psi_n(x)$? Interpréter le résultat.

7-1 On considère maintenant une particule de masse m comme un oscillateur harmonique isotrope à 3 dimensions centré à l'origine. Son Hamiltonien est :

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{r}^2$$

Où : $\hat{p}^2 = \hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2$ et $\hat{r}^2 = \hat{x}^2 + \hat{y}^2 + \hat{z}^2$.

(La question ne requiert pas la connaissance de l'oscillateur à 3 dimensions. Les niveaux d'énergie sont $E_N = \left(N + \frac{3}{2}\right)\hbar\omega$, $N = 0, 1, \dots$)

La particule a une charge q et on applique un champ $\vec{\mathcal{E}}$ constant uniforme. En opérant comme dans les questions 4 et 6, calculer la valeur moyenne du moment dipolaire $\langle \hat{d} \rangle$ du système dans le champ.

8-1 On considère un gaz d'atomes d'Argon dans leur état fondamental, dans des conditions normales de température et de pression.

Pour de petites perturbations de l'atome par rapport à son état fondamental, on assimile un électron externe d'un atome d'Argon à une particule liée par un potentiel harmonique à 3 dimensions, de pulsation ω , au reste de l'atome (noyau et cortège électronique). Le potentiel est centré au centre de gravité de l'atome. La particule a une masse $m = m_e$ et une charge $q = -e$, e étant la charge élémentaire.

On rappelle que lorsqu'un atome d'un milieu acquiert un moment dipolaire électrique $\vec{d}$ sous l'influence d'un champ électrique extérieur $\vec{\mathcal{E}}$, le vecteur polarisation $\vec{P}$ du milieu est $\vec{P} = N_v \vec{d}$ où N_v est le nombre volumique d'atomes dans le milieu. La susceptibilité électrique χ du milieu est définie par $\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{\mathcal{E}}$ où ϵ_0 est la permittivité du vide.

Expérimentalement, pour l'Argon, on a $\chi = 5,17 \times 10^{-4}$.

(a). Calculer la pulsation ω définie ci-dessus.

On donne :

$$m_e = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}, \quad e = 1,6 \times 10^{19} \text{ C}$$

Volume molaire du gaz parfait dans les conditions normales $V_m = 22,4 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1}$

Nombre d'Avogadro $N_A = 6 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$, permittivité du vide $\epsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} \text{ Fm}^{-1}$.

(b). Calculer l'énergie $\mathcal{E} = \hbar\omega$ et comparer cette énergie avec l'énergie d'excitation de l'Argon de son état fondamental vers son premier état excité: $E_{exc} = 8,8 \text{ eV}$. Que peut-on en conclure sur le modèle d'oscillateur harmonique pour un électron externe de l'atome d'Argon dans son état fondamental ?

EXAMEN DE PHYSIQUE QUANTIQUE

PARTIE B

Traiter un problème au choix

Documents autorisés (sauf livres)

Temps alloué : 2H

• PROBLEME 1:

ANISOTROPIE MAGNETIQUE ET « EFFET TUNNEL DE SPIN »

Références bibliographiques :

C.Sangregorio *et al.*, Physical Review Letters 78, p.4645 (1999)

W.Wernsdorfer *et al.*, Physical Review Letters 82, p.3903 (1999)

1. La molécule Fe_8

La molécule Fe_8 est constituée de 8 atomes de fer tenus entre eux par des ligands. Les interactions ferromagnétiques et antiferromagnétiques dans la molécule entraînent l'orientation de six spins atomiques selon l'axe Oz et deux de façon antiparallèle. Le spin équivalent est $S = 10$: la molécule Fe_8 est ainsi un « macro-spin ». Ces molécules sont ensuite cristallisées en un monocristal de taille nanométrique et de symétrie triclinique, qui est déposé sur la surface d'une nanosonde à effet Hall qui mesure l'aimantation de la particule. L'anisotropie magnétique entraîne une dépendance quadratique de l'Hamiltonien en fonction des opérateurs de spin : si Oz est l'axe facile d'aimantation et B_z le champ selon Oz ,

$$\hat{H} = -\frac{D}{\hbar^2} \hat{S}_z^2 + \frac{K}{\hbar^2} (\hat{S}_x^2 - \hat{S}_y^2) - \frac{g\mu_B}{\hbar} B_z \hat{S}_z$$

où $\mu_B = \frac{-e\hbar}{2m_e}$ est le magnéton de Bohr et g le facteur de Landé ($g = 2$).

L'objectif de ce problème est de déterminer les valeurs des constantes D et K à partir de résultats expérimentaux.

On note $\{|m\rangle\}$ ($m \in [-10, +10]$) la base orthonormée des états propres de $\hat{S}_z$ qui sera utilisée tout au long de ce problème :

$$\hat{S}_z |m\rangle = m\hbar |m\rangle \quad (m \text{ entier relatif et } |m| \leq 10)$$

Le terme $\hat{W} = \frac{K}{\hbar^2} (\hat{S}_x^2 - \hat{S}_y^2)$ sera considéré comme une perturbation de l'Hamiltonien :

$$\hat{H}_0 = -\frac{D}{\hbar^2} \hat{S}_z^2 - \frac{g\mu_B}{\hbar} B_z \hat{S}_z$$

1.1. Niveaux d'énergie

(a) Pour $K = 0$ montrer que les vecteurs $|m\rangle$ sont également vecteurs propres de l'Hamiltonien $\hat{H}_0$. Calculer les valeurs propres $\mathcal{E}_0(m)$ de $\hat{H}_0$.

Sur la figure ci-dessous (Fig.1) sont représentées les énergies $\mathcal{E}_0(m)$ d'une molécule Fe_8 en fonction de m ($m \in [-10, +10]$) pour un champ magnétique B_z nul.

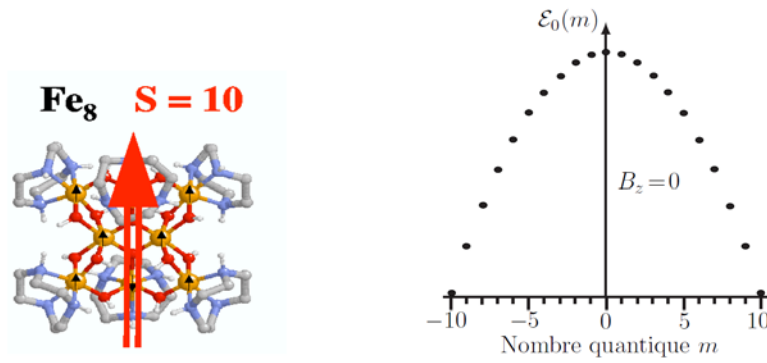


Fig.1

Expliquer ce diagramme. En particulier, montrer que si $B_z = 0$, $\varepsilon_0(m) = \varepsilon_0(-m)$.

Considérons un spin $S = \pm 10$. On appelle « barrière d'anisotropie » la barrière de potentiel qu'il doit franchir pour basculer dans l'état $S = \mp 10$. En considérant la figure 1, donner la valeur de cette barrière.

En écrivant que cette énergie correspond à $k_B T_c$, déterminer la température T_c en dessous de laquelle il ne sera plus possible pour une molécule d'être thermiquement activée pour passer la barrière. Pour l'application numérique, on prendra $D = 0,275 k_B$.

(b) Reprendre le schéma de la figure précédente et représenter le diagramme $\varepsilon_0(m)$ pour un champ $B_z \neq 0$.

Tracer sur un même graphique, les courbes $\varepsilon_0(m)$ en fonction de B_z pour $m = -10, \dots, +10$. Montrer que les énergies des états $m > 0$ et celles des états $m' < 0$ se croisent pour des valeurs de B_z vérifiant :

$$B_z = n \frac{D}{g \mu_B} \text{ où } n \text{ est un entier relatif}$$

(c) On considère à présent deux niveaux $|m\rangle$ et $|m'\rangle$ et on se place près du champ B_z pour lequel $\varepsilon_0(m) = \varepsilon_0(m')$; on traite le terme $\hat{W} = \frac{K}{\hbar^2} (\hat{S}_x^2 - \hat{S}_y^2)$ comme une perturbation de $\hat{H}_0$. L'objectif de cette question est de montrer que les niveaux d'énergie se séparent au lieu de se croiser et que la dégénérescence entre les états $|m\rangle$ et $|m'\rangle$ est levée.

On part de l'équation de Schrödinger stationnaire $\hat{H}\psi = \varepsilon\psi$ appliquée dans l'espace des états de spins. On note (β et δ sont deux nombres réels non-nuls) :

$$\langle m | \hat{W} | m' \rangle = \langle m' | \hat{W} | m \rangle = \beta, \langle m | \hat{H}_0 | m \rangle = \varepsilon_0(m), \langle m' | \hat{H}_0 | m' \rangle = \varepsilon_0(m'), \langle m | \hat{W} | m \rangle = \langle m' | \hat{W} | m' \rangle = \delta$$

i. Montrer que les états $|m\rangle$ ne sont plus états propres de l'Hamiltonien $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{W}$.

ii. On cherche un nouvel état propre sous la forme :

$$|\psi\rangle = x|m\rangle + y|m'\rangle \text{ avec } x \text{ et } y \text{ deux complexes}$$

Etablir le système d'équations vérifié par x et y . Déterminer les deux énergies propres de l'Hamiltonien $\hat{H}$ en fonction de $\varepsilon_0(m)$, $\varepsilon_0(m')$, δ et β .

L'allure des nouvelles énergies est représentée sur la figure ci-dessous (Fig.2) en fonction de B_z : l'écart énergétique est minimal au niveau du croisement $\varepsilon_0(m) = \varepsilon_0(m')$. Exprimer cet écart énergétique minimal (noté Δ), en fonction de β . Déterminer les vecteurs propres dans le cas particulier où $\varepsilon_0(m) = \varepsilon_0(m')$. Interpréter ce résultat.

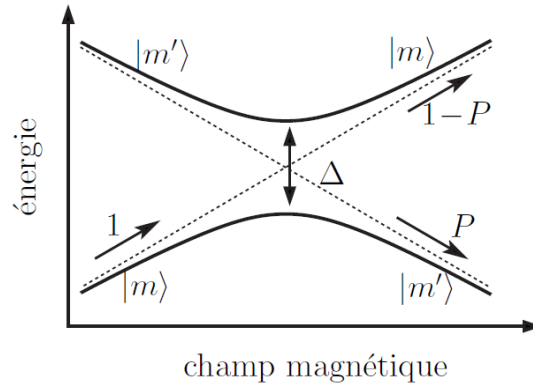


Fig.2

2. Effet tunnel magnétique

Un cristal de Fe_8 de taille nanométrique est déposé sur une sonde de même taille et placé dans le régime quantique à $T = 40\text{mK}$. Expérimentalement, on constate qu'en dessous de la température de 360mK , l'activation thermique cesse et que le retournement des macro-spins est dû uniquement aux processus tunnels dans la barrière d'anisotropie. Lorsque le champ magnétique correspond à une situation de croisement, le macro-spin a une probabilité P de se retourner et de changer d'état. Il a une probabilité $1 - P$ de rester dans le même état (voir la figure 2). La probabilité P est donnée par la formule (admise) de Landau-Zener-Stückelberg (formule LZS) :

$$P = 1 - \exp\left(-\frac{\pi\Delta^2}{2\hbar g |\mu_B| |m - m'| \left|\frac{dB_z}{dt}\right|}\right)$$

Cette situation se manifeste clairement dans les cycles d'hystérésis représentés sur la figure 3.

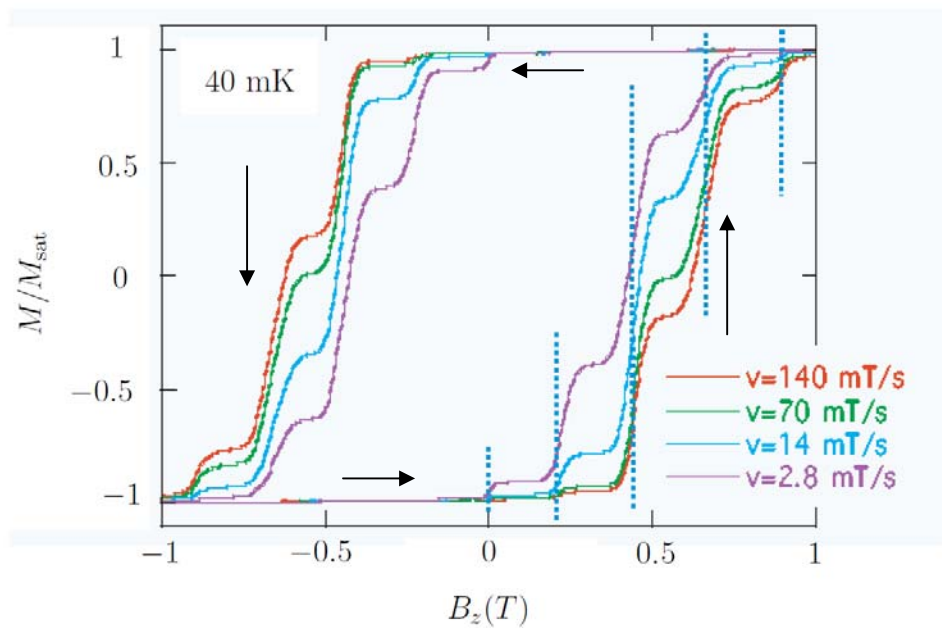


Fig.3 : Cycles d'hystérésis de Fe_8 à $T = 40\text{mK}$ (aimantation normalisée $\frac{M}{M_{\text{sat}}}$ en fonction du champ magnétique). Les différentes courbes correspondent à différentes vitesses de balayage $v = \frac{dB_z}{dt}$ données en milli Tesla par seconde.

On prépare l'échantillon dans un état tel que tous les macro-spins sont dans l'état $m = 10$ à $B_z = -1\text{T}$. On augmente ensuite continûment le champ magnétique et l'on s'intéresse au passage par la valeur $B_z = 0$.

2.1. Montrer que l'aimantation ne peut évoluer tant que $B_z < 0$. Que se passe-t-il pour la valeur $B_z = 0$? En déduire le sens des parcours des cycles.

2.2. Lorsque le champ continue de croître, on observe une série de plateaux d'aimantation. A quoi correspondent ces transitions ? On s'appuiera sur la courbe $\varepsilon_0(m)$ en fonction de B_z pour les différentes valeurs de m , tracée à

la question 1.1.b ; Déduire de ces observations une valeur de $\frac{D}{k_B}$.

2.3. Montrer que les résultats expérimentaux de la figure 3, obtenus pour plusieurs vitesses de balayage en champ, corroborent la formule de LZS ;

En utilisant la courbe obtenue pour la vitesse de balayage la plus faible, calculer une valeur approchée de la probabilité $P_{10,-10}$ de retournement du spin en $B_z = 0$.

2.4. Donner une expression approchée de la formule de LZS dans le cas où la probabilité P est très inférieure à 1. Déduire de la question précédente, la valeur de Δ de la séparation tunnel au niveau du croisement. Donner la

valeur de $\frac{\Delta}{k_B}$ en μK .

Il est alors théoriquement possible de remonter à la valeur du paramètre K et l'on trouverait $K = 0,046k_B$.

Valeurs numériques de constantes fondamentales :

- Constante de Planck réduite : $\hbar = 1,05 \times 10^{-34} \text{ J.s}$
- Constante de Boltzmann : $k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$
- Valeur absolue du magnéton de Bohr : $|\mu_B| = 9,27 \times 10^{-24} \text{ J.T}^{-1}$

• PROBLEME 2 : NANOMAGNETISME ET SONDE A EFFET HALL

Ce problème traite des propriétés magnétiques de la matière, à l'échelle micrométrique ou nanométrique. Les objets d'étude peuvent être des macromolécules paramagnétiques ou ferromagnétiques organisées en cristal de taille nanométrique (molécule Fe_8 par exemple) que l'on dépose sur la surface d'une sonde à effet Hall de taille comparable (voir figure 1)

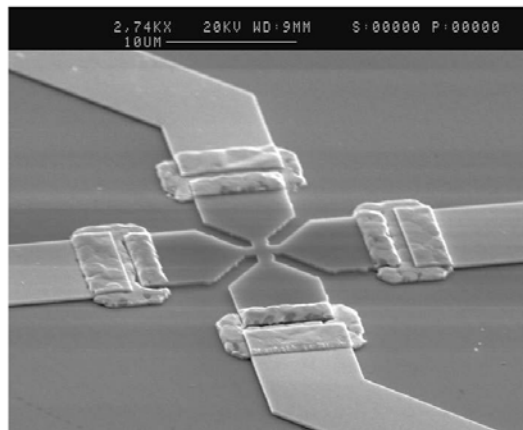


Fig.1 : Sonde à effet Hall étudiée dans ce problème. La partie active de la sonde est le carré central

Le champ magnétique créé par la matière est déterminé en mesurant la tension de Hall de la microsonde. Cette technique présente l'avantage de pouvoir fonctionner à la fois sur une très large gamme de température (du millikelvin à la température ambiante) et sur une très large gamme de champs magnétiques (du microtesla à la dizaine de teslas).

1. Sonde à effet Hall et mesure

On réalise un gaz bidimensionnel d'électrons libres, à l'interface entre deux semi-conducteurs que l'on a fait croître couche atomique après couche atomique (Epitaxie par Jet Moléculaire (EJM) ou Molecular Beam Epitaxy (MBE)) dans la direction Oz (voir figure 2).

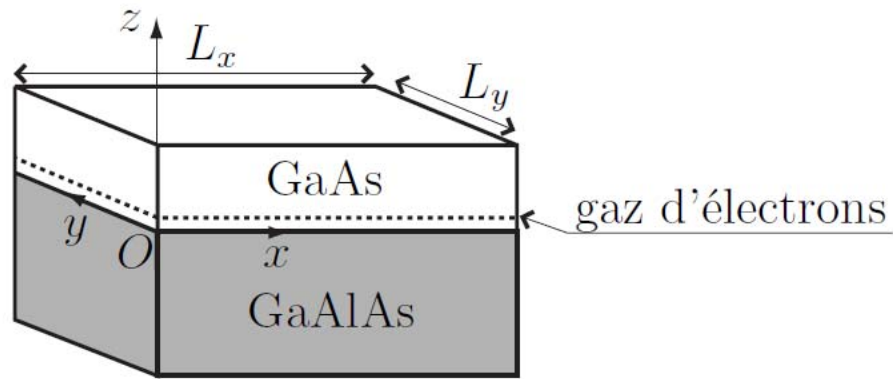


Fig.2 : Structure de la sonde à effet Hall. Le gaz d'électrons occupe un espace bidimensionnel représenté par les pointillés.

Une barrière composée de GaAlAs est dopée en volume jusqu'au voisinage de l'interface avec le semi-conducteur GaAs qui abrite le gaz d'électrons. L'énergie potentielle $V(z)$ de confinement des électrons au voisinage de l'interface est schématisée par un puits triangulaire (voir figure 3).

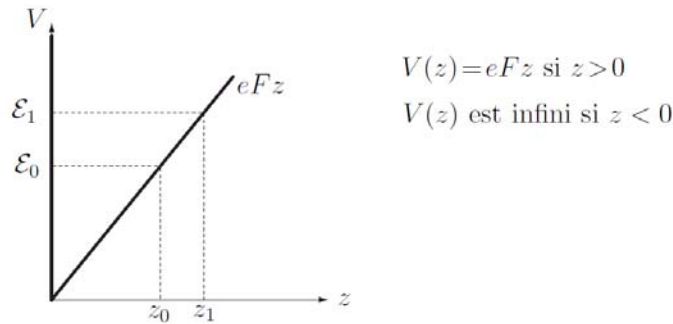


Fig.3 : Energie potentielle $V(z)$ de confinement au voisinage de l'interface

On note F la norme du champ électrique selon l'axe Oz à l'interface. Dans le plan Oxy de l'interface, les électrons sont considérés comme libres, à condition de prendre pour la masse de l'électron, une masse effective $m^* = 0,07m_e$ où m_e est la masse de l'électron dans le vide. L'énergie potentielle électrostatique $V(z)$ est fonction uniquement que de z .

1.1. Bandes d'énergie

Soit $\psi(x, y, z)$ la fonction d'onde électronique décrivant un électron de la bande de conduction situé dans le puits triangulaire. Cette fonction d'onde vérifie l'équation de Schrödinger :

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \nabla^2 \psi(x, y, z) + V(z) \psi(x, y, z) = \mathcal{E} \psi(x, y, z)$$

où $\mathcal{E}$ est l'énergie de l'état quantique et où ∇^2 est le Laplacien.

1- On cherche les solutions de l'équation de Schrödinger sous la forme :

$$\psi(x, y, z) = f(z) \phi(x, y)$$

Montrer que $\phi(x, y)$ et $f(z)$ sont solutions des équations :

$$\begin{cases} -\frac{\hbar^2}{2m^*} f''(z) + V(z) f(z) = \mathcal{E}_z f(z) \\ -\frac{\hbar^2}{2m^*} \nabla^2 \phi(x, y) = \mathcal{E}_{x,y} \phi(x, y) \end{cases}$$

avec $\mathcal{E} = \mathcal{E}_z + \mathcal{E}_{x,y}$.

On définit une bande d'énergie associée à l'énergie $\mathcal{E}_z$, comme l'ensemble des niveaux d'énergie $\mathcal{E}_z$ fixée et d'énergie $\mathcal{E}_{x,y}$ quelconque.

2- Mouvement dans le plan

(a) On cherche $\phi(x, y)$ sous la forme :

$$\phi(x, y) = \frac{1}{\sqrt{L_x L_y}} \exp(ik_x x) \exp(ik_y y)$$

où L_x et L_y sont les dimensions de la sonde selon les directions Ox et Oy (voir figure 2). Donner alors l'expression de $\mathcal{E}_{x,y}$ en fonction de k_x et k_y .

(b) Pour chaque bande d'énergie associée au mouvement selon Oz , on admet que le nombre d'états quantiques par unité de surface est donné par la formule (où l'on a tenu compte de la dégénérescence de spin) :

$$g_{x,y}(\mathcal{E}) = \frac{m^*}{\pi \hbar^2}$$

Vérifier l'homogénéité de cette expression et donner la valeur de cette constante pour GaAs en nombre d'états quantiques par meV (milli-électronvolt) et par m^2 .

3- Mouvement selon Oz

On se restreint ici à l'étude du mouvement selon la direction Oz . On considère dans cette question le puits triangulaire représenté sur la figure 3, dont l'énergie s'écrit :

$$\text{pour } z < 0, V(z) = +\infty \text{ et pour } z > 0, V(z) = eFz$$

Afin de trouver l'expression des énergies propres $\mathcal{E}_i$ pour le mouvement selon Oz , on utilise la condition de quantification concernant l'impulsion, écrite par Sommerfeld :

$$\int_0^{z_i} p_i(z) dz = \left(i + \frac{3}{4}\right) \pi \hbar, \quad i \in \mathbb{N}$$

Où z_i vérifie $V(z_i) = \mathcal{E}_i$ (voir figure 3) et où $p_i(z)$ est la composante selon Oz , à la coordonnée z , de l'impulsion $\vec{p}_i$.

(a) Ecrire de façon classique la conservation de l'énergie d'une particule de masse m soumise à l'énergie potentielle $V(z)$ et en déduire l'expression de l'impulsion $p_i(z)$ en fonction de l'énergie $\mathcal{E}_i$ du niveau i . Etablir alors l'expression de l'énergie $\mathcal{E}_i$.

(b) Calculer $\mathcal{E}_0$ et $\mathcal{E}_1$ en meV dans le cas d'une jonction GaAlAs / GaAs pour laquelle :

$$F = 6,5 \times 10^6 \text{ V.m}^{-1}.$$

4- Cas général

On considère à présent le mouvement général dans les trois directions de l'espace.

(a) En utilisant les résultats des sous questions précédentes, montrer que chaque état électronique peut être caractérisé par trois paramètres (i, k_x, k_y) et que son énergie est : $\mathcal{E}(k) = \mathcal{E}_i + \Lambda k^2$

où $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ et Λ est une constante que l'on exprimera en fonction de m^* et $\hbar$. Tracer l'allure de $\mathcal{E}(k)$ pour différents niveaux $\mathcal{E}_i$.

(b) Exprimer le nombre maximal d'électrons par unité de surface, $N_{s\max}$, en fonction de $\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1$ et des constantes du problème, pour que seule la bande $\mathcal{E}_0$ soit peuplée, dans la limite des basses températures. Effectuer l'application numérique.

- (c) Le nombre d'électron par unité de surface (ou densité surfacique) est égal à $N_s = 8 \times 10^{15} \text{ m}^{-2}$. Calculer l'énergie du dernier état occupé et donner un critère portant sur la température qui permet de savoir que la deuxième bande n'est pas peuplée. Dans toute la suite, on supposera cette condition vérifiée.

1.2. Effet Hall dans la matière

La sonde est taillée dans un cristal contenant le gaz d'électrons bidimensionnel de densité surfacique N_s . La partie active est un carré de côté $L_x = L_y = L$; Elle est placée dans un champ magnétique uniforme perpendiculaire au plan Oxy , $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$.

On note $\vec{E}(\vec{r}) = E_x(\vec{r})\vec{e}_x + E_y(\vec{r})\vec{e}_y$ le champ électrique dans le plan Oxy . On fait circuler un courant dans cette sonde et on suppose que les électrons dans le plan sont soumis à l'action de la force de Lorentz et d'une force de frottement sur le réseau cristallin $\vec{f} = -\frac{m^* \vec{v}}{\tau}$ où τ désigne un temps de collision moyen, m^* la masse effective de l'électron et $\vec{v}$ sa vitesse. Dans tous les calculs, la masse de l'électron est remplacée par sa masse effective : $m^* = 0,07m_e$.

1- Ecrire le principe fondamental de la dynamique appliqué à un électron et montrer que la solution en régime permanent peut se mettre sous la forme tensorielle :

$$\begin{pmatrix} j_{Sx} \\ j_{Sy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}$$

Où la matrice σ est appelé *tenseur de conductivité* et où $\vec{j}_S$ est la densité surfacique de courant qui parcourt le gaz d'électrons bidimensionnel.

Montrer que les composantes du tenseur conductivité $\sigma_{xx} = \sigma_{yy}$ et $\sigma_{xy} = -\sigma_{yx}$ en fonction de la fréquence

cyclotron (positive) $\omega_c = \frac{eB_0}{m^*}$ et de $\sigma_0 = \frac{N_s e^2 \tau}{m^*}$ s'écrivent :

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{\sigma_0}{1 + \omega_c^2 \tau^2}, \quad \sigma_{xy} = -\sigma_{yx} = -\frac{\sigma_0 \omega_c \tau}{1 + \omega_c^2 \tau^2}$$

. Que représente le terme $\sigma_0 = \frac{N_s e^2 \tau}{m^*}$?

2- Lors d'une mesure d'effet Hall, un courant circule en régime permanent, dans la direction Ox en présence d'un champ $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$. On mesure la tension transversale de hall V_H à l'aide d'un voltmètre d'impédance d'entrée infinie (voir figure 4) :

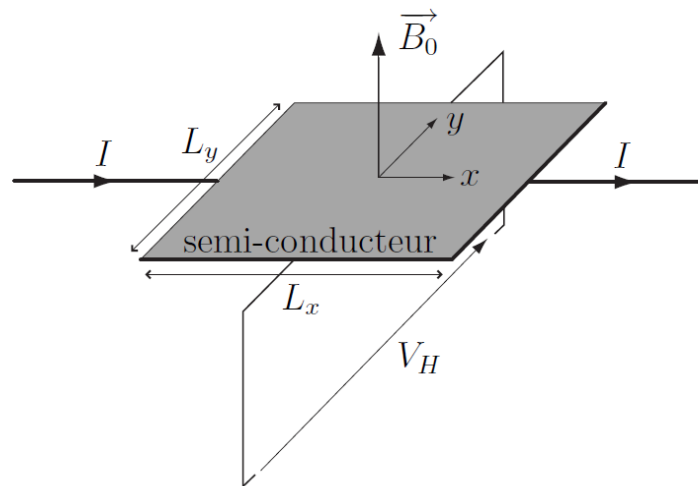


Fig.4 : Schéma de la partie active de la sonde à effet Hall

Etablir la relation entre j_{sx} et E_y en régime permanent en fonction de σ_0 , ω_C et τ (effet Hall).

3- En déduire l'expression de la résistance de Hall définie par : $R_H = \frac{V_H}{I}$ en fonction de e , B_0 et N_s .

4- **Application numérique :** on polarise une sonde à effet Hall avec une densité surfacique de courant limitée à cause des problèmes d'échauffement à $j_s = 200 \text{ A.m}^{-1}$. Exprimer la sensibilité de la sonde de Hall définie

par $S = \frac{\delta V_H}{\delta B}$, en fonction de L , N_s , j_s et e . En prenant $N_s = 8 \times 10^{15} \text{ m}^{-2}$, calculer la sensibilité de Hall dans les deux cas suivants : $L = 100 \text{ nm}$ et $L = 5 \mu\text{m}$.

L'imperfection des appareils limite la précision de la mesure de la tension de Hall à $\pm 1 \text{ nV}$. Quel est le champ minimal que l'on peut mesurer à l'aide de ces deux sondes ?

Valeurs numérique de constantes fondamentales

- Constante de Planck réduite : $\hbar = 1,05 \times 10^{-34} \text{ J.s}$
- Constante de Boltzmann : $k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$
- Masse de l'électron dans le vide : $m_e = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$
- Charge élémentaire : $e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$

Corrigés

EXERCICE 1 : TRIPLE Puits DE POTENTIEL

1- Cas parfaitement symétrique

1) L'opérateur $\hat{P}$ effectue une permutation circulaire sur les états $|1\rangle, |2\rangle$ et $|3\rangle$. La méthode la plus rapide pour démontrer que $\hat{H}$ et $\hat{P}$ commutent est sans doute de calculer les produits de matrices $(\hat{H})(\hat{P})$ et $(\hat{P})(\hat{H})$. D'après l'énoncé, nous avons :

$$(\hat{H}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } (\hat{P}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ d'où } (\hat{H})(\hat{P}) = (\hat{P})(\hat{H}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Une autre manière de le montrer est de voir que $\hat{H}$ est invariant par $\hat{P}$: si l'on permute circulairement tous les termes de $\hat{H}$, on retrouve $\hat{H}$. Mathématiquement cela s'exprime par la relation :

$${}^t(\hat{P})(\hat{H})(\hat{P}) = (\hat{H})$$

Or, comme $(\hat{P})$ est une matrice orthogonale, sa transposée ${}^t(\hat{P})$ est aussi son inverse. Par conséquent, si l'on multiplie, à gauche et à droite, la relation précédente par $(\hat{P})$, on trouve directement le résultat voulu :

$$(\hat{H})(\hat{P}) = (\hat{P})(\hat{H})$$

2) Après avoir permuté circulairement 3 fois les 3 états, on retrouve l'état initial, ainsi $\hat{P}^3$ est l'identité $\hat{1}$

$$\hat{P}^3 = \hat{1}$$

Par le calcul, on vérifie que :

$$\begin{aligned} \hat{P}^2 &= (|2\rangle\langle 1| + |3\rangle\langle 2| + |1\rangle\langle 3|)^2 = |2\rangle\langle 3| + |3\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 2| \\ \hat{P}^3 &= (|2\rangle\langle 1| + |3\rangle\langle 2| + |1\rangle\langle 3|)(|2\rangle\langle 3| + |3\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 2|) = \hat{1} \end{aligned}$$

Soit maintenant λ une valeur propre de $\hat{P}$ pour l'état propre $|\psi\rangle$. Dans ce cas :

$$\hat{P}^3|\psi\rangle = \lambda^3|\psi\rangle$$

Mais d'après ce qui précède, on a aussi :

$$\hat{P}^3|\psi\rangle = |\psi\rangle$$

Autrement dit :

$$\lambda^3|\psi\rangle = |\psi\rangle$$

Par conséquent, $\lambda^3 = 1$ et (comme un espace de Hilbert est par définition construit sur le corps des complexes), on en déduit que λ est une racine troisième de l'unité :

$$\lambda \in \left\{ 1, e^{\frac{2i\pi}{3}}, e^{-\frac{2i\pi}{3}} \right\}$$

On ne sait rien *a priori* de la dégénérescence de ces dernières.

Remarque

Le fait que les valeurs propres de $\hat{P}$ soient complexes est lié à son caractère non hermitien : $\hat{P} \neq \hat{P}^\dagger$ mais $\hat{P}$ n'étant pas une observable, cela n'est pas problématique.

3) Pour trouver les vecteurs propres associés, on résout le système d'équations :

$$\hat{H}|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle$$

avec λ égale à une des racines troisièmes de l'unité. On trouve alors que $1, e^{\frac{2i\pi}{3}}, e^{-\frac{2i\pi}{3}}$ sont chacune valeur propre de $\hat{H}$ pour les vecteurs propres normés respectifs :

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad |\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{\frac{4i\pi}{3}} \\ e^{\frac{2i\pi}{3}} \end{pmatrix} \quad |\psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{\frac{2i\pi}{3}} \\ e^{\frac{4i\pi}{3}} \end{pmatrix}$$

Remarque

On retrouve ici dans un cas simple un résultat plus général. Si l'on considère l'opérateur de permutation $\hat{P}_N$, (qui est aussi l'opérateur de translation $\hat{T}_N$) celui-ci a comme valeurs propres les racines N -ièmes de l'unité et pour vecteurs propres les états $|\psi_i^N\rangle$ définis par

$$|\psi_i^N\rangle = \sum_{n=0}^{N-1} e^{\frac{2i\pi n i}{N}} |n\rangle$$

Ces états sont des ondes planes et ne sont autres que les états de Bloch qui apparaissent habituellement dans l'étude du modèle des liaisons fortes.

4) Comme les valeurs propres de $\hat{P}$ ne sont pas dégénérées et comme, de plus, $\hat{P}$ et $\hat{H}$ commutent, alors ses vecteurs propres sont aussi vecteurs propres de $\hat{H}$. Pour obtenir les valeurs propres associées, il suffit de calculer l'action de $\hat{H}$ sur chacun d'eux. On obtient :

$$\hat{H}|\psi_1\rangle = 2t|\psi_1\rangle, \quad \hat{H}|\psi_2\rangle = -t|\psi_2\rangle, \quad \hat{H}|\psi_3\rangle = -t|\psi_3\rangle$$

Ainsi, $\hat{H}$ a deux valeurs propres $2t$ et $-t$ respectivement une fois et deux fois dégénérées.

2- Cas perturbé

1) D'après la question précédente, comme la valeur propre $2t$ de $\hat{H}$ est non dégénérée, la correction au premier ordre en perturbation est donnée par :

$$\begin{aligned} E_1 &= 2t + \langle \psi_1 | \hat{V} | \psi_1 \rangle = 2t + \frac{1}{3} (\langle 1 | + \langle 2 | + \langle 3 |) \delta t (|1\rangle + |2\rangle) \\ &= 2t + \frac{2}{3} \delta t + O(\delta t^2) \end{aligned}$$

Par contre, la valeur propre $-t$ est dégénérée. On doit donc calculer la restriction $\hat{\tilde{V}}$ de $\hat{V}$ au sous-espace $\{|\psi_2\rangle, |\psi_3\rangle\}$:

$$\left(\hat{\tilde{V}} \right) = \begin{pmatrix} \langle \psi_2 | \hat{V} | \psi_2 \rangle & \langle \psi_2 | \hat{V} | \psi_3 \rangle \\ \langle \psi_3 | \hat{V} | \psi_2 \rangle & \langle \psi_3 | \hat{V} | \psi_3 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \delta t & \frac{2}{3} \delta t e^{\frac{2i\pi}{3}} \\ \frac{2}{3} \delta t e^{-\frac{2i\pi}{3}} & -\frac{1}{3} \delta t \end{pmatrix}$$

Ses valeurs propres sont $-\delta t$ et $\frac{1}{3} \delta t$, ce qui conduit au final aux énergies propres de $\hat{H}$:

$$E_2 = -t - \delta t + O(\delta t^2) \quad \text{et} \quad E_3 = -t + \frac{1}{3} \delta t + O(\delta t^2)$$

Ainsi, la perturbation lève la dégénérescence.

2) Pour montrer que $\hat{P}_{12}$ commute avec $\hat{H}$, comme pour l'opérateur $\hat{P}$, on peut faire explicitement le calcul matriciel ou raisonner en termes d'invariance.

L'opérateur $\hat{P}_{12}$ permute les états $|1\rangle$ et $|2\rangle$ (ainsi que $\langle 1|$ et $\langle 2|$) et ne touche pas l'état $|3\rangle$. Or si on échange les états $|1\rangle$ et $|2\rangle$, $\hat{V}$ reste invariant, de même que $\hat{H}$. Donc $\hat{H} + \hat{V}$ est invariant par $\hat{P}_{12}$. On en déduit qu'ils commutent.

3) $\hat{P}_{12}$ laisse invariant l'état $|3\rangle$: $|3\rangle$ est donc vecteur propre de $\hat{P}_{12}$ pour la valeur propre 1. Restent à trouver deux vecteurs propres orthogonaux à $|3\rangle$, c'est-à-dire dans le sous-espace $\{|1\rangle, |2\rangle\}$.

Comme $\hat{P}_{12}$ permute deux éléments, on a de plus :

$$\hat{P}_{12}^2 = \hat{1}$$

Par conséquent, les seules valeurs propres possibles pour $\hat{P}_{12}$ sont 1 et -1.

Le vecteur propre associé à 1 doit être une combinaison linéaire de $|1\rangle$ et $|2\rangle$ et doit être identique à lui-même lorsqu'on permute $|1\rangle$ et $|2\rangle$. Il suffit qu'il soit symétrique : $|1\rangle + |2\rangle$ est solution évidente, soit après normalisation : $\frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |2\rangle)$.

Pour la valeur propre -1, il suffit que le vecteur soit antisymétrique par rapport à l'échange de $|1\rangle$ et $|2\rangle$.

$\frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - |2\rangle)$ est solution.

Au final, $\hat{P}_{12}$ a deux valeurs propres : 1 et -1 respectivement deux fois et une fois dégénérées et de sous-espaces propres respectifs $\left\{|3\rangle, \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |2\rangle)\right\}$ et $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - |2\rangle)\right\}$.

4) Comme $\hat{P}_{12}$ et $\hat{H} + \hat{V}$ commutent et comme l'état $\frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - |2\rangle)$ est non dégénéré, il est aussi état propre de $\hat{H} + \hat{V}$. On en déduit l'énergie propre associée :

$$(\hat{H} + \hat{V}) \frac{|1\rangle - |2\rangle}{\sqrt{2}} = (-t - \delta t) \frac{|1\rangle - |2\rangle}{\sqrt{2}}$$

Il reste maintenant à diagonaliser $\hat{H} + \hat{V}$ dans le sous-espace $\left\{|3\rangle, \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |2\rangle)\right\}$. La restriction de $\hat{H} + \hat{V}$ dans ce sous-espace s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}t \\ \sqrt{2}t & t + \delta t \end{pmatrix}$$

Ce qui conduit, après diagonalisation, aux valeurs propres :

$$E_{\pm} = \frac{1}{2} \left(t + \delta t \pm \sqrt{9t^2 + 2t\delta t + (\delta t)^2} \right)$$

Un développement limité au second ordre en $\frac{\delta t}{t}$ de ces deux valeurs propres donne :

$$E_+ = 2t + \frac{2\delta t}{3} \text{ et } E_- = -t + \frac{\delta t}{3}$$

On retrouve bien les trois énergies propres obtenues à la question 2-1b à l'aide de la théorie des perturbations.

EXERCICE 2 : Oscillateur dans un champ électrique

1-1 $E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega$

2-1 $\hat{W} = -\hat{d}\mathcal{E} = -q\hat{x}\mathcal{E}$

3-1

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \hat{H}_0 + \hat{W} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 - q\hat{x}\mathcal{E} \\ &= \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\left(\hat{x} - \frac{q\mathcal{E}}{m\omega^2}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{q^2\mathcal{E}^2}{m\omega^2}\end{aligned}$$

4-1 En posant $\hat{X} = \hat{x} - \frac{q\mathcal{E}}{m\omega^2}$, on a $\frac{\partial}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial x}$ et $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{X}^2 - \frac{1}{2}\frac{q^2\mathcal{E}^2}{m\omega^2}$

Par conséquent : $W_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega - \frac{1}{2}\frac{q^2\mathcal{E}^2}{m\omega^2}$

5-1 $\psi_n(x) = \phi_n(X) = \phi_n\left(x - \frac{q\mathcal{E}}{m\omega^2}\right)$

6-1 $\langle \hat{d} \rangle = \frac{q^2\mathcal{E}}{m\omega^2}$. Le champ polarise l'oscillateur, qui oscille maintenant autour du point $x = \frac{q\mathcal{E}}{m\omega^2}$. Les

niveaux d'énergie sont tous déplacés de la même quantité $-\frac{1}{2}\frac{q^2\mathcal{E}^2}{m\omega^2}$ en raison de cette polarisation.

7-1 En présence du champ, le Hamiltonien s'écrit

$$\hat{H} = \hat{H}_0 - q\hat{r} \cdot \vec{\mathcal{E}} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{r}^2 - q\hat{r} \cdot \vec{\mathcal{E}}$$

que l'on peut comme précédemment, récrire sous la forme :

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\left(\hat{r} - \frac{q\vec{\mathcal{E}}}{m\omega^2}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{q^2\mathcal{E}^2}{m\omega^2}$$

La valeur moyenne du moment dipolaire induit du système dans le champ est donc :

$$\langle \vec{d} \rangle = \frac{q^2\vec{\mathcal{E}}}{m\omega^2}$$

8-1 La polarisation du gaz est quant à elle égale à :

$$\vec{P} = N_v \frac{q^2}{m\omega^2} \vec{\mathcal{E}} \Rightarrow \chi = \frac{N_v}{\epsilon_0} \frac{q^2}{m\omega^2}$$

(a) $\omega^2 = \frac{N_v}{\epsilon_0} \frac{q^2}{\chi m}$ dont l'application numérique donne : $\omega = 1,28 \times 10^{16} \text{ s}^{-1}$

(b) Cette valeur correspond à $\hbar\omega = 8,42 \text{ eV}$, clivage entre le niveau fondamental et le premier niveau excité de l'oscillateur harmonique. Elle se compare en bonne approximation avec le clivage atomique $E_{\text{exc}} = 8,8 \text{ eV}$. Le modèle de l'électron élastiquement lié est une bonne approximation à faible différence d'énergie par rapport à l'état fondamental. Il reproduit en bonne approximation le premier état excité.

•PROBLEME 1:

ANISOTROPIE MAGNETIQUE ET « EFFET TUNNEL DE SPIN »

1. La molécule Fe_8

1.1. Niveaux d'énergie

(a) $\hat{H}|m\rangle = (-Dm^2 - g\mu_B B_z m)|m\rangle$ donc $\varepsilon_0(m) = -Dm^2 - g\mu_B B_z m$

Quand $B_z = 0$, $\varepsilon_0(m) = -Dm^2$, c'est bien la courbe proposée.

La fonction est paire en m .

La barrière d'anisotropie à franchir est : $\Delta\varepsilon_0 = (10)^2 D = 100D$.

La température correspondante est $T_c = 27,5\text{K}$.

Si $T < T_c$, l'agitation thermique n'est pas suffisante pour permettre au spin de se retourner.

(b) Quand $B_z \neq 0$, $\varepsilon_0(m) = -Dm^2 + g|\mu_B|B_z m$ (on rappelle que $\mu_B < 0$). ε_0 est maximale pour $m = \frac{g|\mu_B|B_z}{2D}$; L'allure de la courbe correspondante est :

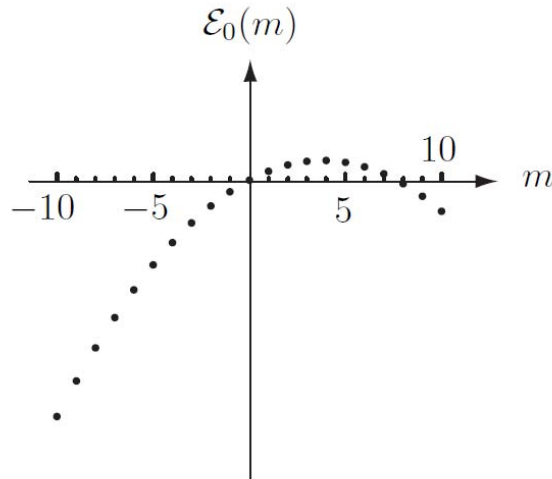


Fig.4

Les courbes $\varepsilon_0(m)$ en fonction de B_z sont :

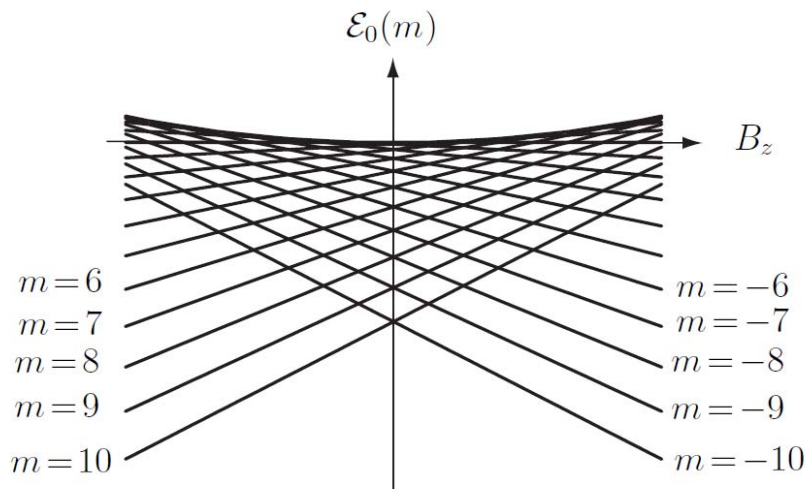


Fig.5

$\varepsilon_0(m) = \varepsilon_0(m')$ avec m et m' positifs pour $m' = -m = \frac{g\mu_B B_z}{D}$. Comme m et m' sont entiers, les courbes se croisent quand $B_z = n \frac{D}{g\mu_B}$ où n est un entier relatif.

(c)

i. $\hat{H}|m\rangle = \varepsilon_0(m)|m\rangle + \hat{W}|m\rangle \Rightarrow |m\rangle$ n'est pas un état propre de $\hat{H}$

ii. On considère $|\psi\rangle = x|m\rangle + y|m'\rangle$. Alors :

$$\hat{H}|\psi\rangle = \varepsilon|\psi\rangle \Leftrightarrow x\hat{H}_0|m\rangle + x\hat{W}|m\rangle + y\hat{H}_0|m'\rangle + y\hat{W}|m'\rangle = \varepsilon x|m\rangle + \varepsilon y|m'\rangle$$

$$\text{Soit : } \begin{cases} x\langle m|\hat{H}_0|m\rangle + x\langle m|\hat{W}|m\rangle + y\langle m|\hat{H}_0|m'\rangle + y\langle m|\hat{W}|m'\rangle = \varepsilon x \\ x\langle m'|\hat{H}_0|m\rangle + x\langle m'|\hat{W}|m\rangle + y\langle m'|\hat{H}_0|m'\rangle + y\langle m'|\hat{W}|m'\rangle = \varepsilon y \end{cases}$$

$$\text{C'est-à-dire : } \begin{cases} x\varepsilon_0(m) + x\delta + y\beta = \varepsilon x \\ x\beta + y\varepsilon_0(m') + y\delta = \varepsilon y \end{cases}$$

$$\text{où encore : } \begin{cases} (\varepsilon_0(m) + \delta - \varepsilon)x + y\beta = 0 \\ x\beta + (\varepsilon_0(m') + \delta - \varepsilon)y = 0 \end{cases}$$

Ce système homogène en (x, y) n'a de solution différente de $(0, 0)$ que si son déterminant est nul :

$$\begin{vmatrix} (\varepsilon_0(m) + \delta - \varepsilon) & \beta \\ \beta & (\varepsilon_0(m') + \delta - \varepsilon) \end{vmatrix} = (\varepsilon_0(m) + \delta - \varepsilon)(\varepsilon_0(m') + \delta - \varepsilon) - \beta^2 = 0$$

Soit pour :

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_0(m) + \varepsilon_0(m') + 2\delta \pm \sqrt{(\varepsilon_0(m) - \varepsilon_0(m'))^2 + 4\beta^2} \right)$$

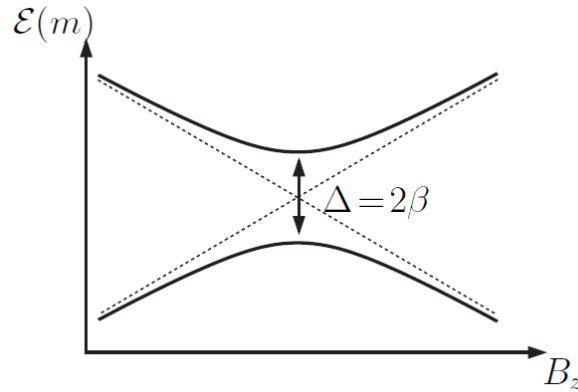


Fig.6

Au croisement, $\varepsilon_0(m) = \varepsilon_0(m')$ donc $\varepsilon = \varepsilon_0(m) + \delta \pm \beta$ d'où $\Delta = 2\beta$

Les équations en x et y se simplifient en :

$$\begin{cases} x + y = 0 \text{ pour } \varepsilon = \varepsilon_0(m) + \delta - 2\beta \\ x - y = 0 \text{ pour } \varepsilon = \varepsilon_0(m) + \delta + 2\beta \end{cases}$$

Par conséquent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour la valeur propre } \varepsilon = \varepsilon_0(m) + \delta + 2\beta \text{ le vecteur propre est } |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|m\rangle + |m'\rangle) \\ \text{Pour la valeur propre } \varepsilon = \varepsilon_0(m) + \delta - 2\beta \text{ le vecteur propre est } |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|m\rangle - |m'\rangle) \end{array} \right.$$

2. Effet tunnel magnétique

2.1. Tant que B_z reste négatif, la courbe $m = 10$ (voir Fig.5) ne coupe aucune autre courbe. Il ne se passe rien. En $B_z = 0$, la courbe $m = 10$ croise la courbe $m = -10$, le spin peut basculer. Les cycles sont donc décrits dans le sens antihoraire.

2.2. Quand B_z augmente, la courbe $m = 10$ croise successivement les courbes $m = -10, m = -9, m = -8$ etc. On mesure sur la courbe des transitions tous les 0,22T. Or, au niveau des croisements, donc des transitions possibles, $B = n \frac{D}{g\mu_B}$. On en déduit : $\frac{D}{g\mu_B} = 0,22$, ce qui donne :

$$\frac{D}{k_B} = 0,32 \text{ K} \cdot \text{T}^{-1}$$

2.3. La probabilité de transition diminue quand la vitesse de balayage augmente, ce que confirme bien la formule LZS.

Le premier saut sur la courbe de vitesse de balayage la plus faible correspond à une variation de l'aimantation normalisée $\frac{M}{M_{\text{sat}}}$ de l'ordre de 0,25% donc $P_{10,-10} \approx 2,5 \times 10^{-3}$.

2.4. Quand $P \ll 1$, $P \sim \frac{\pi \Delta^2}{2\hbar |\mu_B| 20 \left| \frac{dB_z}{dt} \right|}$, d'où $\Delta = 4,2 \times 10^{-29} \text{ J} = 2,7 \times 10^{-12} \text{ eV}$.

Avec $\Delta = k_B T$, on en déduit $T = 0,3 \mu\text{K}$.

• PROBLEME 2 : NANOMAGNETISME ET SONDE A EFFET HALL

1. Sonde à effet Hall et mesure

1.1. Bandes d'énergie

1- $\nabla^2 \psi = f''(z) \phi(x, y) + f(z) \nabla^2 \phi(x, y)$. L'équation de Schrödinger s'écrit donc :

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} f''(z) \phi(x, y) - \frac{\hbar^2}{2m^*} f(z) \nabla^2 \phi(x, y) + V(z) f(z) \phi(x, y) = \varepsilon f(z) \phi(x, y)$$

Que l'on peut mettre sous la forme :

$$\underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{f''(z)}{f(z)} + V(z)}_{\text{fonction de } z \text{ seul}} - \underbrace{\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{\nabla^2 \phi(x, y)}{\phi(x, y)}}_{\text{fonction de } x, y \text{ seuls}} = \varepsilon$$

La fonction de z et celle de x, y sont donc constantes (variables indépendantes). Il vient :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\hbar^2}{2m^*} f''(z) + V(z) f(z) = \varepsilon_z f(z) \\ -\frac{\hbar^2}{2m^*} \nabla^2 \phi(x, y) = \varepsilon_{x,y} \phi(x, y) \end{array} \right. \quad \text{avec } \varepsilon = \varepsilon_z + \varepsilon_{x,y}$$

2- Mouvement dans le plan

(a) Avec l'expression donnée, $\nabla^2 \phi(x, y) = -(k_x^2 + k_y^2) \phi(x, y)$, donc : $\varepsilon_{x,y} = \frac{\hbar^2}{2m^*} (k_x^2 + k_y^2)$

(b) $\frac{m^*}{\pi \hbar^2}$ s'exprime en: $\frac{\text{kg}}{(\text{J.s})^2} = \frac{1}{\text{J}} \times \frac{\text{kg}}{\text{kg m}^2 \text{s}^{-2} \times \text{s}^2} = \text{J}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$: c'est donc bien un nombre par unité d'énergie et de surface.

A.N. : $g_{x,y}(\varepsilon) = 2,9 \times 10^{14}$ états par meV et par m^2 .

3- Mouvement selon Oz

(a) $\varepsilon_i = \frac{p_i^2}{2m^*} + V(z) \Leftrightarrow p_i(z) = \sqrt{2m^*(\varepsilon_i - V(z))}$

La condition de quantification donne :

$$\int_0^{z_i} \sqrt{2m^*} \sqrt{(\varepsilon_i - eFz)} dz = \left(i + \frac{3}{4}\right) \pi \hbar \Leftrightarrow \sqrt{2m^*} \left(-\frac{1}{eF}\right) \frac{2}{3} \left[(\varepsilon_i - eFz)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{z_i} = \left(i + \frac{3}{4}\right) \pi \hbar$$

soit: $\sqrt{2m^*} \frac{2}{3eF} \varepsilon_i^{\frac{3}{2}} = \left(i + \frac{3}{4}\right) \pi \hbar$

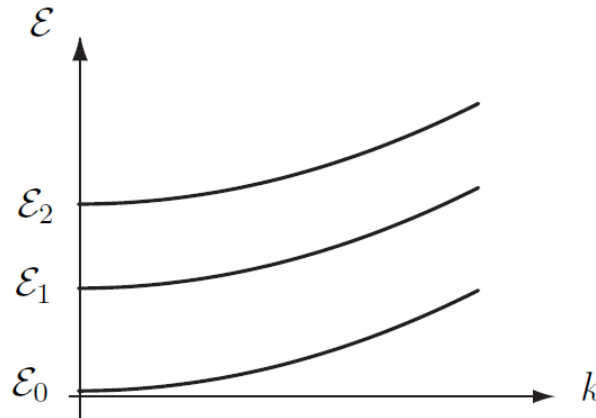
puisque $\varepsilon_i = eFz_i$, on obtient finalement:

$$\varepsilon_i = \left(\frac{3eF}{2\sqrt{2m^*}} \left(i + \frac{3}{4}\right) \pi \hbar \right)^{\frac{2}{3}}$$

(b) A.N. : $\varepsilon_0 = 66 \text{ meV}$ et $\varepsilon_1 = 116 \text{ meV}$

4- Cas général

(a) $\varepsilon = \varepsilon_i + \frac{\hbar^2}{2m^*} k^2$. C'est bien de la forme $\varepsilon = \varepsilon_i + \Lambda k^2$ avec $\Lambda = \frac{\hbar^2}{2m^*}$.



(b) On veut que $g_{x,y}(\varepsilon) \times (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \geq N_s$, ce qui donne :

$$N_{s \max} = \frac{m^*}{\pi \hbar^2} (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) = 1,5 \times 10^{15} \text{ m}^{-2}$$

(c) On a $N_s < N_{s \max}$ donc le dernier état occupé est l'état d'énergie $\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{\pi \hbar^2 N_s}{m^*}$.

Il faut que la température vérifie : $\varepsilon_1 - \varepsilon_0 > k_B T$ soit $T < 580 \text{ K}$ (environ).

1.2. Effet Hall dans la matière

1- Le principe fondamental de la dynamique appliqué à un électron s'écrit :

$$m^* \frac{d\vec{v}}{dt} = \underbrace{-e(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}_0)}_{\text{force de Lorentz}} - \frac{m^*}{\tau} \vec{v}$$

En régime permanent $\left(\frac{d\vec{v}}{dt} = 0\right)$, cette équation devient : $-e(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}_0) - \frac{m^*}{\tau} \vec{v} = \vec{0}$.

En multipliant cette équation par $-N_s e$, on obtient l'équation reliant $\vec{j}_s$ à $\vec{E}$:

$$\vec{j}_s + e\vec{j}_s \wedge \vec{B}_0 = \frac{N_s e^2 \tau}{m^*} \vec{E} = \sigma_0 \vec{E}$$

σ_0 est la conductivité du gaz bidimensionnel en l'absence de champ magnétique.

En projection sur les axes Ox et Oy , on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} j_{sx} + \omega_c \tau j_{sy} = \sigma_0 E_x \\ -\omega_c \tau j_{sx} + j_{sy} = \sigma_0 E_y \end{cases}$$

Dont la solution est :

$$\begin{cases} j_{sx} = \frac{\sigma_0}{1 + \omega_c^2 \tau^2} (E_x - \omega_c \tau E_y) \\ j_{sy} = \frac{\sigma_0}{1 + \omega_c^2 \tau^2} (\omega_c \tau E_x + E_y) \end{cases}$$

Les composantes du tenseur conductivité sont donc :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{\sigma_0}{1 + \omega_c^2 \tau^2} \\ \sigma_{yx} = -\sigma_{xy} = \frac{\sigma_0 \omega_c \tau}{1 + \omega_c^2 \tau^2} \end{cases}$$

2- En régime permanent, le courant est selon Ox donc $j_{sy} = 0$ soit $E_y = -\omega_c \tau E_x$. On en déduit :

$$j_{sx} = \frac{-\sigma_0}{\omega_c \tau} E_y$$

3- Alors : $V_H = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} -E_y dy = E_y L$ et $I = j_{sx} L$. Tous calculs faits, on obtient : $R_H = \frac{B_0}{N_s e}$.

4- $s = \frac{\delta V_H}{\delta B} = \frac{I}{N_s e} = \frac{j_s L}{N_s e}$.

A.N. : pour $\begin{cases} L = 100 \text{ nm}, & s = 16 \text{ mV} \cdot \text{T}^{-1}, & B_{\min} = 64 \text{ nT} \\ L = 5 \mu\text{m}, & s = 0,78 \text{ V} \cdot \text{T}^{-1}, & B_{\min} = 1,3 \text{ nT} \end{cases}$