

EXAMEN DE PHYSIQUE QUANTIQUE

PARTIE A

Traiter un exercice au choix
 Aucun document n'est autorisé
 Temps alloué : 1H

EXERCICE 1 : PARTICULE FERROMAGNETIQUE

On considère un système (une petite particule ferromagnétique par exemple) décrit par l'Hamiltonien effectif

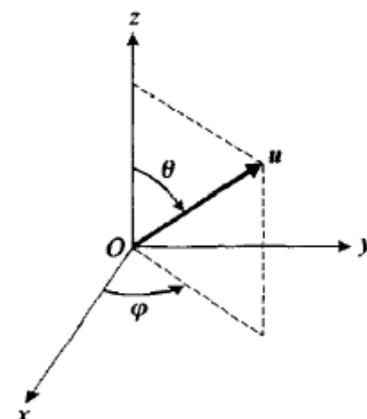
$$\hat{H}_0 = a\hat{J}_z + \frac{b}{\hbar} \hat{J}_z^2$$

où a et b sont deux constantes positives ou nulles ayant les dimensions d'une pulsation. Le système a trois états possibles correspondant au moment cinétique $j = 1$ et formant une base $\{|m\rangle, |0\rangle, |-1\rangle\}$ constituée des trois vecteurs propres de \hat{J}_z , tels que $\hat{J}_z|m\rangle = m\hbar|m\rangle$ avec $m = 0, \pm 1$.

1. Expliciter chaque terme de l'Hamiltonien. Quels sont les niveaux d'énergie du système et pour quelle valeur du rapport $\frac{a}{b}$ y a-t-il dégénérescence du niveau fondamental ?

2. On considère le moment magnétique $\vec{\mu}$ associé au moment cinétique, et γ le rapport gyromagnétique correspondant. On applique un faible champ statique \vec{B}_0 ($\omega_0 = -\gamma \|\vec{B}_0\| \ll a$) dans une direction $\vec{u}(\theta, \phi)$.

Exprimer, en fonction des composantes de \vec{J} et des angles (θ, ϕ) , l'énergie d'interaction \hat{W} du moment magnétique $\vec{\mu}$ avec \vec{B}_0 . Ecrire la matrice représentant \hat{W} dans la base des trois états propres de \hat{J}_z .



3. On suppose que $b = a$ et que la direction \vec{u} est parallèle à Ox . Calculer les énergies à l'ordre 1 et les états propres à l'ordre 0 en ω_0 .

4. On suppose que $b = 2a$ et que la direction \vec{u} est quelconque. Calculer dans la base $\{|m\rangle, |0\rangle, |-1\rangle\}$, le développement de l'état fondamental $|\Psi_0\rangle$ de $\hat{H}_0 + \hat{W}$ au premier ordre en ω_0 .

5. Calculer la valeur moyenne $\langle \hat{M} \rangle$ du moment magnétique dans l'état $|\Psi_0\rangle$ et les éléments du tenseur de susceptibilité $[\chi]$, défini par $\langle \hat{M} \rangle = [\chi] \vec{B}_0$.

Rappel : on pourra introduire les opérateurs $\hat{J}_+ = \hat{J}_x + i\hat{J}_y$ et $\hat{J}_- = \hat{J}_x - i\hat{J}_y$

EXERCICE 2 :

EVOLUTION TEMPORELLE D'UN SYSTEME A DEUX NIVEAUX

On considère un système à deux niveaux de Hamiltonien \hat{H} représenté dans la base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$, $\left(|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ par la matrice :

$$(\hat{H}) = \hbar \begin{pmatrix} A & B \\ B & -A \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres et vecteurs propres de \hat{H} sont :

$$\begin{cases} E_+ = \hbar\sqrt{A^2 + B^2} & |\chi_+\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|+\rangle + \sin\frac{\theta}{2}|-\rangle \\ E_- = -\hbar\sqrt{A^2 + B^2} & |\chi_-\rangle = -\sin\frac{\theta}{2}|+\rangle + \cos\frac{\theta}{2}|-\rangle \end{cases}$$

Avec : $\cos\theta = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ $\sin\theta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ $\tan\theta = \frac{B}{A}$

- 1- Le vecteur d'état $|\phi(t)\rangle$ au temps t peut se décomposer sur la base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$

$$|\phi(t)\rangle = c_+(t)|+\rangle + c_-(t)|-\rangle$$

Ecrire le système d'équations différentielles couplées auquel obéissent les composantes $c_+(t)$ et $c_-(t)$.

En déduire que $c_+(t)$ (de même que $c_-(t)$) vérifie l'équation différentielle

$$\ddot{c}_+(t) + \left(\frac{\Omega}{2}\right)^2 c_+(t) = 0$$

Avec $\Omega = 2\sqrt{A^2 + B^2}$: $\hbar\Omega$ est la différence d'énergie entre les deux niveaux.

- 2- On décompose $|\phi(t=0)\rangle$ sur la base $\{|\chi_+\rangle, |\chi_-\rangle\}$

$$|\phi(t=0)\rangle = |\phi(0)\rangle = \lambda|\chi_+\rangle + \mu|\chi_-\rangle \quad |\lambda|^2 + |\mu|^2 = 1$$

Montrer que $c_+(t) = \langle +|\phi(t)\rangle$ s'écrit

$$c_+(t) = \lambda e^{-i\frac{\Omega t}{2}} \cos\frac{\theta}{2} - \mu e^{i\frac{\Omega t}{2}} \sin\frac{\theta}{2}$$

- 3- On suppose que $c_+(0) = 0$. En déduire λ et μ à une phase près ainsi que $c_+(t)$.
Montrer que la probabilité de trouver le système au temps t dans l'état $|+\rangle$ est

$$p_+(t) = \sin^2 \theta \sin^2 \left(\frac{\Omega t}{2} \right) = \frac{B^2}{A^2 + B^2} \sin^2 \left(\frac{\Omega t}{2} \right)$$

- 4- Montrer que si $c_+(t=0) = 1$, alors

$$c_+(t) = \cos \left(\frac{\Omega t}{2} \right) - i \cos \theta \sin \left(\frac{\Omega t}{2} \right)$$

En déduire $p_+(t)$ et $p_-(t)$ et vérifier la compatibilité du résultat avec celui de la question précédente.



EXAMEN DE PHYSIQUE QUANTIQUE

PARTIE B

Traiter un problème au choix
Documents autorisés (sauf livres)
Temps alloué : 2H

• PROBLEME 1: LE DOUBLE Puits SYMETRIQUE :

Attention : les questions 3.5 et suivantes sont facultatives. Elles donneront lieu à un bonus.

DE L'EFFET TUNNEL A « L'INTERACTION D'ECHANGE »

Référence bibliographique : S. Trotsky et al. Science **319**, 295 (2008)

*Le magnétisme est un phénomène physique qui joue un rôle essentiel dans la technologie d'aujourd'hui : mémoires d'ordinateurs, enregistrement sur bandes etc. On modélise souvent le phénomène à la base du magnétisme macroscopique par une interaction effective entre moments magnétiques individuels de type $\alpha \vec{\mu}_i \cdot \vec{\mu}_j$. Le but du problème est d'élucider l'origine physique de cette interaction effective dans le cas dit du « super-échange ». Plus précisément, on va montrer comment une interaction locale et **indépendante du spin** peut donner naissance, grâce au principe de Pauli, à une interaction effective à longue portée et **dépendante du spin**.*

On considère ici le mouvement d'une ou deux particules dans le double puits symétrique représenté sur la figure 1. On note respectivement $|g\rangle$ et $|d\rangle$ les états fondamentaux dans les puits *gauche* et *droit* lorsque l'effet tunnel à travers la barrière centrale est négligeable, et on pose par convention que leur énergie est nulle : $E_g = E_d = 0$. Dans tout ce problème, on supposera que l'effet tunnel est suffisamment faible pour que les seuls états orbitaux pertinents soient des combinaisons linéaires de $|g\rangle$ et $|d\rangle$. On introduira notamment les états *symétrique* et *antisymétrique* :

$$|s\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|g\rangle + |d\rangle) \quad |a\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|g\rangle - |d\rangle) \quad (1)$$

Le couplage \hat{V}_{tun} correspondant à l'effet tunnel s'écrit dans la base orthonormée $\{|g\rangle, |d\rangle\}$ sous la forme :

$$\hat{V}_{tun}|g\rangle = -J|d\rangle \quad \hat{V}_{tun}|d\rangle = -J|g\rangle \quad (2)$$

où J est un nombre réel positif, que l'on peut faire varier expérimentalement en ajustant la hauteur V_0 de la barrière.

On ne cherchera pas à calculer les fonctions d'onde associées aux états $|g\rangle$ et $|d\rangle$.

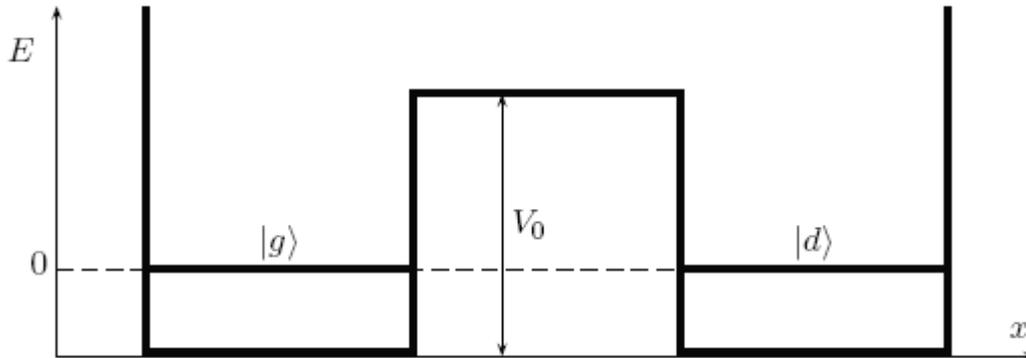


Figure 1 : Le double puits symétrique

1. Le cas d'une particule unique

1.1. Quelles sont les énergies propres de l'Hamiltonien $\hat{H} = \hat{V}_{tun}$ en présence d'effet tunnel ?

1.2. Préciser l'expression des états propres correspondants dans la base $\{|g\rangle, |d\rangle\}$. Pouvait-on prévoir leur parité compte tenu de la symétrie du problème ?

1.3. Expérience de « temps de vol ».

La particule est préparée initialement dans l'état fondamental de l'Hamiltonien. On coupe soudainement le potentiel du double puits, on laisse la fonction d'onde de cette particule s'étaler le long de l'axe x , puis on effectue une mesure de sa position. On répète un grand nombre de fois cette expérience et on trace la distribution de probabilité des résultats (figure 2). Commenter cette distribution en faisant éventuellement référence à un autre phénomène physique bien connu.

1.4. Indiquer sans calcul la distribution spatiale qu'on obtiendrait dans une expérience de temps de vol similaire, mais en préparant chaque particule dans l'état $|g\rangle$ au moment de la coupure soudaine du potentiel. Même question pour l'état $|d\rangle$.

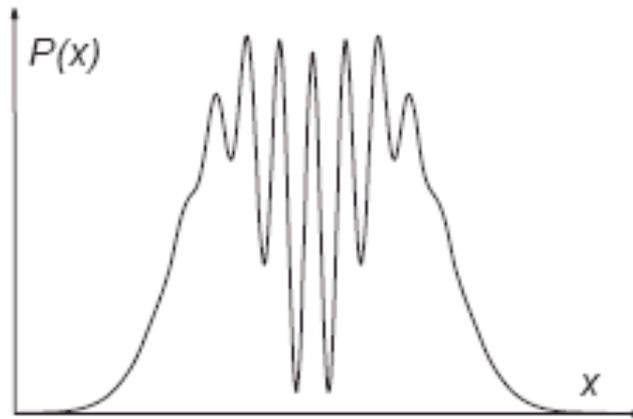


Figure 2 : distribution de probabilité après temps de vol pour des particules initialement dans l'état s .

2. Le cas de deux particules de spin nul

On place deux particules identiques de spin nul dans le double puits. On cherche comment la prise en compte du principe de Pauli, combinée avec l'interaction entre particules, vient modifier les résultats obtenus précédemment.

2.1. On numérote les particules 1 et 2. Si les particules étaient discernables, l'espace des états serait de dimension 4, une base possible étant $\{|G\rangle, |D\rangle, |M_+\rangle, |M_-\rangle\}$:

$$|G\rangle = |1: g; 2: g\rangle \quad |D\rangle = |1: d; 2: d\rangle \quad (3)$$

$$|M_\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1: g; 2: d\rangle \pm |1: d; 2: g\rangle) \quad (4)$$

Compte tenu du principe de Pauli, justifier brièvement pourquoi l'espace des états est de dimension 3 et admet comme base $\{B\} = \{|G\rangle, |D\rangle, |M_+\rangle\}$.

2.2. Les particules peuvent passer d'un puits à l'autre par effet tunnel. Le couplage correspondant s'écrit $\hat{V}_{tun} = \hat{V}_{tun}^{(1)} + \hat{V}_{tun}^{(2)}$ avec :

$$\hat{V}_{tun}^{(1)}|1: g; 2: i\rangle = -J|1: d; 2: i\rangle \quad \hat{V}_{tun}^{(1)}|1: d; 2: i\rangle = -J|1: g; 2: i\rangle \quad (5)$$

$$\hat{V}_{tun}^{(2)}|1: g; 2: i\rangle = -J|1: d; 2: i\rangle \quad \hat{V}_{tun}^{(2)}|1: d; 2: i\rangle = -J|1: g; 2: i\rangle \quad (5)$$

$i = g, d$. Déterminer l'action de \hat{V}_{tun} sur chacun des trois vecteurs de la base $\{B\}$.

2.3. On suppose que ces particules interagissent entre elles quand elles occupent le même puits. En revanche, la distance entre le puits gauche et le puits droit est suffisamment grande pour que l'interaction entre une particule à gauche et une particule à droite soit négligeable.

Le couplage \hat{V}_{int} lié à l'interaction s'écrit donc :

$$\hat{V}_{int}|1: g; 2: g\rangle = v|1: g; 2: g\rangle \quad \hat{V}_{int}|1: d; 2: d\rangle = v|1: d; 2: d\rangle \quad (6)$$

$$\hat{V}_{int}|1: g; 2: d\rangle = \hat{V}_{int}|1: d; 2: g\rangle = 0 \quad (7)$$

où v est un nombre positif (interaction répulsive). On s'intéresse aux énergies propres et aux états propres de l'Hamiltonien $\hat{H} = \hat{V}_{tun} + \hat{V}_{int}$.

- (a) Montrer que l'état $|N_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|G\rangle - |D\rangle)$ est état propre de \hat{H} avec une valeur propre qu'on précisera.
- (b) On pose $|N_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|G\rangle + |D\rangle)$. Ecrire la matrice de \hat{H} dans la base $\{|N_-\rangle, |N_+\rangle, |M_+\rangle\}$.
- (c) Déterminer les énergies propres de \hat{H} et tracer leur variation avec v , pour une valeur de J fixée.

2.4. On se place dans le cas de particules indépendantes ($v = 0$).

- (a) Montrer que le résultat pour les valeurs propres de \hat{H} est bien en accord avec les résultats obtenus dans la première partie.
- (b) Déterminer l'état fondamental et relier le résultat à l'état fondamental à une particule trouvé dans la première partie. Y a-t-il des corrélations entre les particules quand elles sont préparées dans cet état ?

2.5. On se place dans le cas d'un effet tunnel faible : $J \ll v$

- (a) Simplifier l'expression de ces énergies propres (on donnera le résultat à l'ordre 1 en $\frac{J^2}{v}$).
- (b) Montrer qu'on peut retrouver le résultat pour l'état fondamental en utilisant la théorie des perturbations à l'ordre 2.
- (c) Préciser la forme de l'état fondamental de \hat{H} à l'ordre 0 en $\frac{J}{v}$. Y a-t-il des corrélations entre les particules quand elles sont préparées dans cet état ?

3. Le cas de deux particules de spin $\frac{1}{2}$

On s'intéresse maintenant au cas où les deux particules indiscernables placées dans le double puits ont pour spin $\frac{1}{2}$. Si les particules étaient discernables, l'espace des états aurait pour dimension 16 et une base possible de cet espace serait $\{|1: i\sigma_1; 2: j\sigma_2\rangle\}$ avec $i, j = g$ ou d et où $\sigma_1 = \pm, \sigma_2 = \pm$ désignent les orientations du spin de la particule 1 et de la particule 2 le long d'un axe de quantification donné.

Le couplage par effet tunnel et l'interaction entre particules sont supposés indépendants du spin. Les expressions (5) et (7) restent donc valables, les variables de spin étant « spectatrices ». Par exemple :

$$\hat{V}_{\text{int}}^{(1)} |1: g+; 2: g+\rangle = -J |1: d+; 2: g+\rangle$$

3.1. Justifier que l'Hamiltonien $\hat{H} = \hat{V}_{\text{un}} + \hat{V}_{\text{int}}$ commute avec l'opérateur *spin total* \hat{S} ($\hat{S} = \hat{S}_1 + \hat{S}_2$). En déduire qu'on peut chercher une base de vecteurs propres communs à $\hat{H}, \hat{S}^2, \hat{S}_z$.

3.2. Rappeler la forme des états propres de \hat{S}^2, \hat{S}_z et les valeurs propres associées.

3.3. On s'intéresse au sous-espace propre $S = 0$.

- (a) Comment doit se comporter la partie orbitale du vecteur d'état par échange des deux particules ?

- (b) En déduire qu'on peut utiliser sans modification les résultats de la section 2. Dans le cas $J \ll \nu$, donner sans calcul une expression approchée des énergies propres et des états propres.

3.4. On s'intéresse au sous-espace $S = 1$.

- (a) Comment doit se comporter la partie orbitale du vecteur d'état par échange des deux particules ?
(b) Quelle est la dimension de ce sous-espace propre ?
(c) Donner l'action de \hat{H} sur ce sous-espace propre.

Attention : les questions suivantes sont facultatives. Elles donneront lieu à un bonus.

3.5. On se place dans tout ce qui suit dans la limite $J \ll \nu$. Montrer que le spectre de \hat{H} comprend 4 valeurs propres qui se séparent en deux groupe distincts, l'un proche de 0 et l'autre proche de ν .

3.6. On se restreint aux deux états propres de plus basse énergie de \hat{H} , ce qui est possible par exemple si la température du système est petite devant $\frac{\nu}{k_B}$, où k_B est la constante de Boltzmann. Montrer que la dynamique du système correspond alors à la situation physique suivante :

- Il n'y a jamais deux particules dans le même puits
- Tout se passe comme si les deux particules interagissaient à distance par l'Hamiltonien :

$$\hat{H}_{\text{effectif}} = \alpha \hat{S}_1 \cdot \hat{S}_2 + \beta$$

Préciser la valeur des constantes α et β .

3.7. Cet effet a été mis en évidence dans une expérience récente effectuée à Mayence. Une série de doubles puits quasi-identiques ont été préparés grâce à une superposition d'ondes lumineuses stationnaires, des atomes étant ensuite piégés dans les puits de potentiel créés par ces ondes. En variant l'intensité des ondes lumineuses, on varie la hauteur de la barrière dans chaque double puits. Chaque double puits contient deux atomes que l'on prépare dans l'état initial suivant :

- Le puits de gauche contient un atome de spin +
- Le puits de droite contient un atome de spin -

- (a) Ecrire le vecteur d'état initial $|\psi(0)\rangle$ et donner sa décomposition sur la base propre de l'Hamiltonien.
(b) Donner l'expression du vecteur d'état à l'instant t .
(c) On mesure en fonction du temps la probabilité $P(t)$ de trouver le système dans la configuration initiale : « une particule à gauche avec un spin + et une particule à droite avec un spin - ». Le résultat est tracé sur la figure (3) pour deux jeux de paramètres J, ν , la figure (3b) étant obtenue pour des puits plus profonds que la figure (3a) (intensité lumineuse plus grande). Expliquer les oscillations observées.

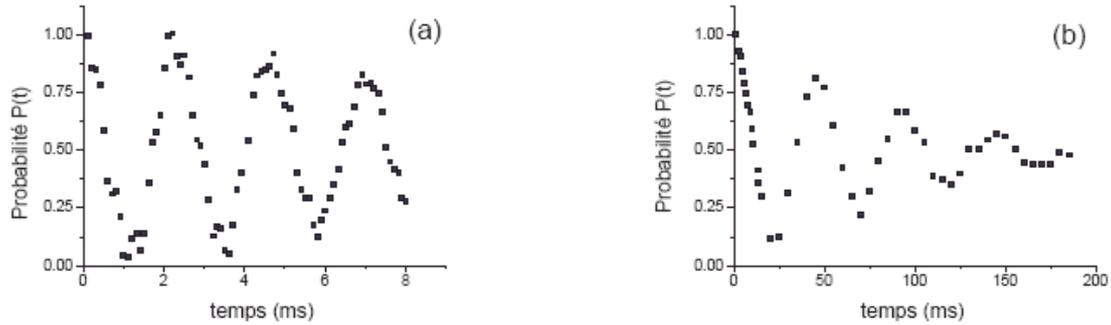


Figure 3 : Variation dans le temps de la probabilité $P(t)$ pour trouver une particule dans le puits de gauche avec le spin + et une particule dans le puits de droite avec le spin -.

- (d) Les figures (3a) et (3b) correspondent respectivement à $\frac{J}{\nu} = 0,26$ et $\frac{J}{\nu} = 0,05$. En déduire les valeurs des fréquences $\frac{J}{h}$ et $\frac{\nu}{h}$ (où h est la constante de Planck). On exprimera les résultats en Hertz. Quelle est la conséquence principale de variation de la hauteur de la barrière V_0 : une variation de ν ou de J ?
- (e) Proposer une explication pour l'amortissement observé sur les figures (3a) et (3b).

• **PROBLEME 2 :**

INTERFERENCES ET CORRELATIONS QUANTIQUES

On se propose d'étudier l'interféromètre de Mach-Zehnder (Figure 1) à l'aide du formalisme de Dirac. Pour cela, nous avons besoin de :

1. Une notation pour « la particule se propage selon x » et pour « la particule se propage selon y ».
2. Une description des miroirs semi-transparents, ou beam-splitters (BS) et des miroirs complètement réfléchissants.
3. Une description de la « différence de chemins ».
4. Une règle pour calculer les probabilités de détection.

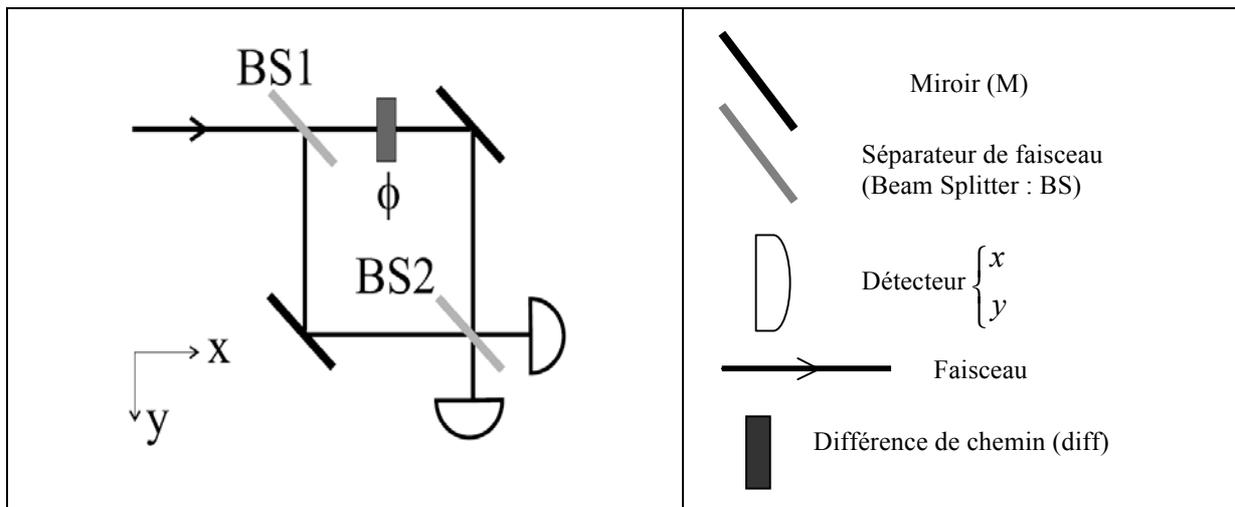


Fig. 1 : Interféromètre Mach-Zehnder pour une particule

Notations :

- On note $|x\rangle$ « la particule se propage selon x » et $|y\rangle$ « la particule se propage selon y ».
- L'opération d'un BS est donc en général :

$$|x\rangle \rightarrow \sqrt{t}|x\rangle + i\sqrt{r}|y\rangle$$

$$|y\rangle \rightarrow \sqrt{t}|y\rangle + i\sqrt{r}|x\rangle$$

Les nombres t et r sont les probabilités de transmission et de réflexion du BS. Ils doivent satisfaire $t + r = 1$.

- Un miroir complètement réfléchissant se décrit selon ce formalisme par :

$$|x\rangle \rightarrow i|y\rangle$$

$$|y\rangle \rightarrow i|x\rangle$$

- Une différence de chemin se traduit par un « facteur de phase » $e^{i\phi}$ sur le vecteur représentant le chemin le plus long (convention). La phase ϕ est proportionnelle à la longueur L de parcours ajouté ⁽¹⁾.

(1) En optique, pour une onde plane (monochromatique) on a $\phi = kL = \frac{2\pi L}{\lambda}$ où k est le nombre d'onde et λ la

longueur d'onde. Pour une particule, dans la limite valable ici de cohérence infinie, k est lié à l'impulsion p par $p = \hbar k$.

1. Interférences à une particule

1.1. On envoie la particule suivant le chemin x . Montrer que l'état de la particule évolue dans l'interféromètre de Mach-Zehnder (MZ) équilibré ($t = r = \frac{1}{2}$) selon :

$$|x\rangle \rightarrow -e^{i\frac{\phi}{2}} \cos\frac{\phi}{2}|x\rangle - e^{i\frac{\phi}{2}} \sin\frac{\phi}{2}|y\rangle \equiv \cos\frac{\phi}{2}|x\rangle + \sin\frac{\phi}{2}|y\rangle$$

(On rappelle qu'en mécanique quantique, l'état d'une particule est défini à un facteur de phase près à condition qu'il soit **global**, ce qui est le cas ici).

1.2. Quelle est la probabilité « Prob(particule en x) » de trouver la particule dans la sortie x , resp. y .

2. Interférences à deux particules : corrélations quantiques

On se réfère au montage de la figure 2 dont les différents éléments de construction ont été définis précédemment.

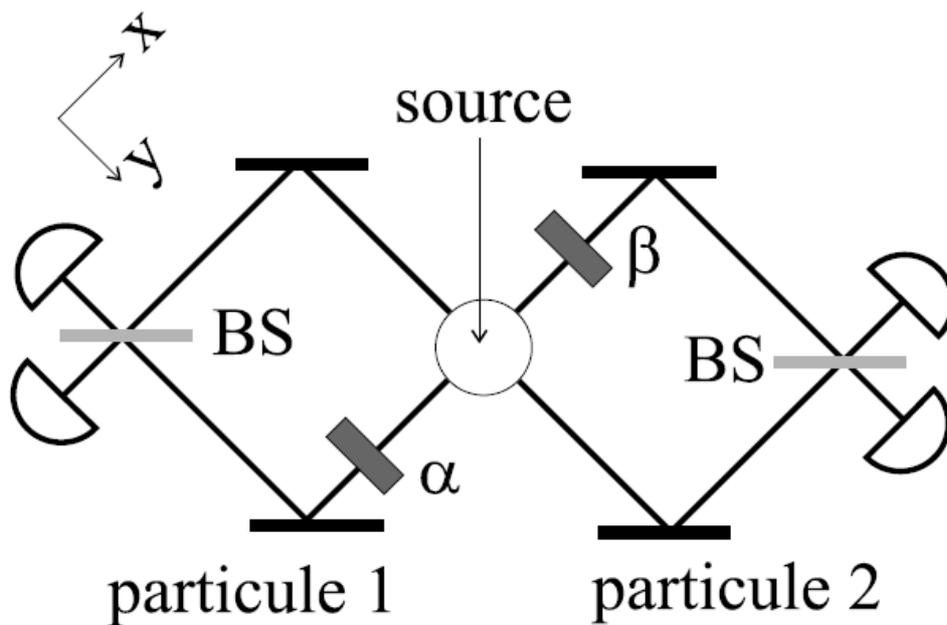


Figure 2

La source produit deux particules qui partent en des directions indéterminées mais **certainement** opposées. L'indétermination quant à la direction d'émission (x ou y pour les deux particules) est de nature « quantique ». Cela signifie qu'il est absolument impossible de savoir dans quelle direction la paire a été émise sans devoir mettre des détecteurs juste après la source, c'est-à-dire sans modifier le montage. Par « absolument impossible » on doit comprendre que : ni dans les atomes qui forment la source, ni ailleurs dans l'univers, n'a été stocké une quelconque information sur la direction d'émission. Tout ce que l'on sait est qu'il y a une **corrélations parfaite** : si une particule a été émise selon x , alors l'autre aussi (et de même pour y).

Nous allons *admettre* que la source est construite de sorte à assurer cette indétermination quantique. Une fois la paire émise, chaque particule rencontre les mêmes éléments décrits précédemment pour le MZ.

Notre point de départ est donc que les possibilités « *les deux particules sont émises selon x* » et « *les deux particules sont émises selon y* » sont indiscernables au sens quantique et équiprobables. La source produit donc alors un état:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|x\rangle_1 \otimes |x\rangle_2 + |y\rangle_1 \otimes |y\rangle_2) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (|x\rangle_1 |x\rangle_2 + |y\rangle_1 |y\rangle_2)$$

Un tel état est dit « **intriqué** », en anglais « **entangled** ».

Les calculs demandés dans la suite du problème ne nécessitent aucune connaissance particulière de la notion de produit tensoriel ; on appliquera les règles intuitives de la multiplication.

2.1. Calculer l'évolution du terme $|x\rangle_1 |x\rangle_2$.

2.2. Calculer l'évolution du terme $|y\rangle_1 |y\rangle_2$.

2.3. En déduire l'évolution de $|\psi\rangle$. On posera : $\theta = \frac{\alpha + \beta}{2}$

2.4. Calculer les probabilités des résultats de mesure :

$$\text{Prob}(x, x) = \text{Prob}(y, y) \text{ et } \text{Prob}(x, y) = \text{Prob}(y, x)$$

Commenter ce dernier résultat. Etudier en particulier les cas où $\alpha = \beta = 0$ et $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$.

3. Inégalité de Bell

L'inégalité de Bell dite CHSH (Clauser, Horne, Shimony, Holt) s'écrit :

$$S \equiv |E(\alpha, \beta) + E(\alpha', \beta) + E(\alpha, \beta') + E(\alpha', \beta')| \leq 2$$

Où $E(\alpha, \beta)$ est le coefficient de corrélation défini par :

$$\begin{aligned} E &= \text{Prob}(\text{résultats égaux}) - \text{Prob}(\text{résultats différents}) \\ &= [\text{Prob}(x, x) + \text{Prob}(y, y)] - [\text{Prob}(x, y) + \text{Prob}(y, x)] \end{aligned}$$

3.1. Calculer $E(\alpha, \beta)$ pour l'expérience considérée précédemment.

3.2. Il est facile de trouver des valeurs pour $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ telles que $S > 2$. Calculer par exemple S pour $\alpha = 0, \alpha' = \frac{\pi}{2}, \beta = -\frac{\pi}{4}$ et $\beta' = \frac{\pi}{4}$. En conclure que l'inégalité de Bell est violée en mécanique quantique.

Corrigés

EXERCICE 1 : PARTICULE FERROMAGNETIQUE

1. Le premier terme correspond à l'interaction du moment magnétique proportionnel à l'opérateur moment cinétique total avec un champ magnétique dirigé suivant l'axe Oz et proportionnel à a . Ce champ favorise l'orientation de \vec{J} dans la direction $-Oz$.

Le deuxième terme est un terme d'anisotropie, favorisant une aimantation dans le plan (x, y) , c'est-à-dire $J = 0$.

Dans la base $\{|j, m_j\rangle\}$ l'Hamiltonien est diagonal et ses valeurs propres sont

$$E(m_j = 1) = \hbar(a + b), \quad E(m_j = -1) = \hbar(b - a), \quad E(m_j = 0) = 0$$

On constate que le niveau fondamental est dégénéré si $a = b$.

Pour $a > b$, le niveau fondamental est $\hbar(b - a)$ correspondant à un état aimanté suivant Oz . Dans le cas contraire, ($b > a$), l'aimantation du système dans son état fondamental est dans le plan (x, y) .

2. L'interaction est donnée par un terme Zeeman $\hat{W} = -\hat{M} \cdot \vec{B} = \omega_0 \hat{J}_u$ où \hat{J}_u est la composante de \hat{J} dans la direction $\vec{u}(\theta, \phi)$ et $\omega_0 = -\gamma B$, la pulsation de Larmor correspondant à la précession de \vec{J} autour de \vec{B} . En effet, d'après le théorème du moment cinétique, on a :

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{M} \wedge \vec{B} = \vec{\omega}_0 \wedge \vec{J}$$

L'opérateur \hat{J}_u s'exprime en fonction de $\hat{J}_{x,y,z}$ comme :

$$\hat{J}_u = \sin \theta \cos \phi \hat{J}_x + \sin \theta \sin \phi \hat{J}_y + \cos \theta \hat{J}_z$$

et en introduisant les opérateurs \hat{J}_\pm , \hat{J}_u s'exprime comme :

$$\hat{J}_u = \frac{1}{2} \sin \theta e^{-i\phi} \hat{J}_+ + \frac{1}{2} \sin \theta e^{i\phi} \hat{J}_- + \cos \theta \hat{J}_z$$

Ce qui permet d'exprimer la matrice d'interaction (\hat{W}) dans la base $\{|+1\rangle, |0\rangle, |-1\rangle\}$ avec :

$$\hat{J}_\pm |j, m_j\rangle = \hbar \sqrt{j(j+1) - m_j(m_j \pm 1)} |j, m_j \pm 1\rangle$$

$$(\hat{W}) = \hbar \omega_0 \begin{pmatrix} \cos \theta & \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta e^{-i\phi} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta e^{i\phi} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta e^{-i\phi} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta e^{i\phi} & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

3. Dans le cas où $a = b$, l'état fondamental est deux fois dégénéré, on doit donc diagonaliser la matrice de la perturbation dans le sous-espace vectoriel associé à l'état fondamental afin d'obtenir la correction d'ordre un à l'énergie et les deux vecteurs propres associés à l'ordre zéro. La restriction de la matrice de perturbation au sous-espace engendré par $|0\rangle$ et $|-1\rangle$ (et dans cette base) est :

$$(\hat{W}) = \frac{\hbar\omega_0}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dont les valeurs propres sont : $\lambda_{\pm} = \pm \frac{\hbar\omega_0}{\sqrt{2}}$

Et les vecteurs propres associés : $|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|0\rangle \pm |-1\rangle]$

On a donc une levée de dégénérescence pour le fondamental, tel que $E_0 \rightarrow E_0 \pm \frac{\hbar\omega_0}{\sqrt{2}}$ avec les vecteurs propres à l'ordre zéro $|\pm\rangle$.

En ce qui concerne l'état excité $|1\rangle$, non dégénéré, l'énergie associée à l'ordre un en perturbation est :

$$E_1 = E_1^0 + \langle 1|\hat{W}|1\rangle + O(\omega_0^2) = E_1^0 + O(\omega_0^2)$$

Evidemment $|1\rangle$ n'est pas modifié à l'ordre zéro en perturbation.

4. Si $b = 2a$, nous avons dans ce cas trois niveaux non dégénérés.

Le calcul en perturbation nous donne pour le vecteur propre au premier ordre associé à l'état fondamental :

$$|\psi_1^0\rangle = |0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\theta \frac{\omega_0}{a} \left[\frac{1}{3} e^{-i\phi} |1\rangle + e^{i\phi} |-1\rangle \right] + O(\omega_0^2)$$

A l'ordre un en perturbation, l'énergie n'est pas modifiée puisque la perturbation \hat{W} n'a pas d'éléments diagonaux.

5. La valeur moyenne de l'aimantation dans l'état fondamental $|\psi_1^0\rangle$ est obtenue en utilisant le fait que

$\hat{M} = \gamma \hat{J}$ et en remplaçant $\hat{J}_{x,y}$ par leur expression en fonction de \hat{J}_{\pm} . On obtient :

$$\begin{cases} \langle \hat{M}_x \rangle = \frac{2}{3} \frac{\gamma^2 \hbar}{a} B_{0x} \\ \langle \hat{M}_y \rangle = \frac{2}{3} \frac{\gamma^2 \hbar}{a} B_{0y} \\ \langle \hat{M}_z \rangle = \frac{1}{\gamma \hbar} \left(\frac{2}{3} \frac{\gamma^2 \hbar}{a} \right)^2 (B_0^2 - B_{0z}^2) = 0 + O(\omega_0^2) \end{cases}$$

Soit finalement :

$$\begin{pmatrix} \langle \hat{M}_x \rangle \\ \langle \hat{M}_y \rangle \\ \langle \hat{M}_z \rangle \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \frac{\gamma^2 \hbar}{a} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{0x} \\ B_{0y} \\ B_{0z} \end{pmatrix} + O(\omega_0^2)$$

$$= [\chi]$$

Le tenseur de susceptibilité linéaire est donc : $[\chi] = \frac{2}{3} \frac{\gamma^2 \hbar}{a} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

EXERCICE 2 : Mesures successives sur la molécule d'ammoniac

1- On obtient $\langle E \rangle = \langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle = \left(-\frac{\hbar\omega}{2} \right) (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = \left(-\frac{\hbar\omega}{2} \right) \cos 2\theta$

Puisque $\hat{H}^2 = \left(\frac{\hbar\omega}{2} \right)^2 \hat{I}$, on obtient $\Delta E = \sqrt{\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2} = \left(\frac{\hbar\omega}{2} \right) |\sin 2\theta|$

De même $\langle X \rangle = \langle \psi | \hat{X} | \psi \rangle = x_0 \sin 2\theta$, et puisque $\hat{X}^2 = x_0^2 \hat{I}$, $\Delta X = x_0 |\cos 2\theta|$

2- Puisque $|\psi_S\rangle$ et $|\psi_A\rangle$ sont états propres de l'énergie, on a pour un instant ultérieur $t > 0$:

$$|\psi(t)\rangle = \cos \theta e^{i\frac{\omega t}{2}} |\psi_S\rangle + \sin \theta e^{-i\frac{\omega t}{2}} |\psi_A\rangle$$

3- Pour $\theta = \frac{\pi}{4}$, $|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{i\frac{\omega t}{2}} |\psi_S\rangle + e^{-i\frac{\omega t}{2}} |\psi_A\rangle \right)$ et donc :

$$|\psi(t=0)\rangle = \left| \psi_{\theta=\frac{\pi}{4}} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\psi_S\rangle + |\psi_A\rangle)$$

et donc, dans cet état $\langle E \rangle = 0$, $\Delta E = \left(\frac{\hbar\omega}{2} \right)$, $\langle X \rangle = +x_0$ et $\Delta X = 0$ (l'état $|\psi(0)\rangle$ est état propre de \hat{X}).

4- Les états propres de \hat{X} sont $|\psi_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\psi_S\rangle \pm |\psi_A\rangle)$ correspondant respectivement aux valeurs propres $\pm x_0$. La probabilité de trouver $+x_0$ lors d'une mesure à l'instant T est :

$$P_+(T) = \left| \langle \psi_+ | \psi(T) \rangle \right|^2 = \cos^2 \left(\frac{\omega T}{2} \right)$$

5- Si le résultat trouvé est $+x_0$, l'état immédiatement après la mesure est

$$|\psi(T+\varepsilon)\rangle = |\psi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\psi_S\rangle + |\psi_A\rangle) \equiv |\psi(0)\rangle$$

6- Puisque après chaque mesure, le système se retrouve dans l'état initial $|\psi_+\rangle$ et que les intervalles de temps sont les mêmes entre deux mesures, la probabilité est

$$P_N(T) = \left(\cos^2 \frac{\omega T}{2} \right)^N$$

7- Dans la limite (mathématique) $N \rightarrow \infty$, on obtient :

$$P_N \sim \left(1 - \frac{\omega^2 T^2}{8N^2} \right)^{2N} \sim 1 - \frac{\omega^2 T^2}{4N} \rightarrow 1$$

8- Si l'on en croit le résultat précédent, le fait de mesurer, c'est-à-dire d'observer le système, l'empêche d'évoluer ! La solution de ce « paradoxe » réside dans le fait que toute mesure est d'extension spatiale et temporelle finie. On ne peut pas, en pratique, subdiviser le temps T à l'infini sauf à interagir en permanence avec le système – ce qui est un autre problème. On peut également remarquer qu'une mesure durant un temps

très petit τ nécessite un échange d'énergie $\delta E \geq \frac{\hbar}{\tau}$, ce qui perturbe trop l'état mesuré lorsque $\tau \rightarrow 0$.

• PROBLEME 1: LE DOUBLE Puits SYMETRIQUE : DE L'EFFET TUNNEL A « L'INTERACTION D'ECHANGE »

1. Le cas d'une particule unique

1.1. La matrice de \hat{H} s'écrit dans la base $\{|g\rangle, |d\rangle\}$:

$$(\hat{H}) = \begin{pmatrix} 0 & -J \\ -J & 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

Les valeurs propres sont $E = \pm J$.

1.2. Les états propres correspondants sont l'état $|s\rangle$ pour la valeur propre $-J$ (état fondamental) et $|a\rangle$ pour la valeur propre $+J$.

L'Hamiltonien étant symétrique, on savait *a priori* qu'on pouvait trouver une base propre composée de vecteurs symétriques et antisymétriques.

1.3. Chaque particule est préparée dans l'état $|s\rangle$, c'est-à-dire une superposition cohérente de $|g\rangle$ et $|d\rangle$ avec des poids égaux. Quand on coupe le potentiel, les deux parties de la fonction d'onde initialement localisées à gauche et à droite s'étalent et elles se recouvrent au niveau du centre. Il se produit alors une interférence, semblable à celle qu'on obtient dans l'expérience des trous d'Young : juste après traversée de la plaque percée de deux trous, chaque particule est dans l'état « *superposition cohérente d'être passée dans un trou et dans l'autre* ».

1.4. Si on prépare chaque particule dans le puits de gauche, la figure d'interférence va disparaître et on observera simplement l'étalement de la fonction d'onde du puits correspondant. C'est similaire à ce qu'il se produit dans l'expérience des trous d'Young quand on bouche un des trous. Il en va évidemment de même si les particules sont préparées dans le puits de droite.

2. Le cas de deux particules de spin nul

2.1. Les particules étant de spin nul, il s'agit de bosons et le vecteur d'état doit être invariant si on permute les deux particules. On voit que parmi les quatre vecteurs proposés, $|G\rangle, |D\rangle$ et $|M_+\rangle$ ont cette propriété. En revanche $|M_-\rangle$ est changé de signe quand on permute les deux particules et il ne peut donc pas intervenir dans l'écriture d'un vecteur d'état de deux bosons identiques. En résumé, l'espace des états est de dimension 3 et la base cherchée est : $\{B\} = \{|G\rangle, |D\rangle, |M_+\rangle\}$

2.2. On trouve :

$$\hat{V}_{tun} |G\rangle = \hat{V}_{tun}^{(1)} |G\rangle + \hat{V}_{tun}^{(2)} |G\rangle = -J|1:d;2:g\rangle - J|1:g;2:d\rangle = -\sqrt{2}J|M_+\rangle \quad (9)$$

$$\hat{V}_{tun} |D\rangle = -\sqrt{2}J|M_+\rangle \quad (10)$$

$$\hat{V}_{tun} |M_+\rangle = -\sqrt{2}J(|G\rangle + |D\rangle) \quad (11)$$

2.3. (a) En utilisant (9-10) on voit que :

$$\hat{V}_{\text{int}}(|G\rangle - |D\rangle) = 0$$

Par ailleurs, cet état $\frac{1}{\sqrt{2}}(|G\rangle - |D\rangle)$ est état propre de \hat{V}_{int} avec la valeur propre v . Il est donc état propre de \hat{H} également avec la valeur propre v .

(b) L'état $|N_+\rangle$ est état propre de \hat{V}_{int} avec la valeur propre v . Par ailleurs, en additionnant (9) et (10), on trouve $\hat{V}_{\text{int}}|N_+\rangle = -2J|M_+\rangle$. On a donc :

$$\hat{H}|N_+\rangle = v|N_+\rangle - 2J|M_+\rangle$$

L'état $|M_+\rangle$ est état propre de \hat{V}_{int} avec la valeur propre 0. Cela correspond bien physiquement, puisqu'il ne fait intervenir que des termes où les particules sont dans des puits différents. En utilisant (11), on arrive à :

$$\hat{H}|M_+\rangle = -2J|N_+\rangle$$

La matrice de \hat{H} dans la base $\{|N_+\rangle, |M_+\rangle\}$ est donc :

$$(\hat{H}) = \begin{pmatrix} v & 0 & 0 \\ 0 & v & -2J \\ 0 & -2J & 0 \end{pmatrix}$$

(c) On connaît déjà une valeur propre de \hat{H} , $E = v$, associée à $|N_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|G\rangle - |D\rangle)$. Les deux autres valeurs propres s'obtiennent en diagonalisant la matrice 2×2 de la restriction de \hat{H} au sous-espace $\{|N_+\rangle, |M_+\rangle\}$:

$$\begin{pmatrix} v & -2J \\ -2J & 0 \end{pmatrix} \quad (12)$$

Les valeurs propres de \hat{H} sont donc :

$$v, \frac{1}{2}(v \pm \sqrt{v^2 + 16J^2}) \quad (13)$$

Les énergies sont tracées sur la figure 4.

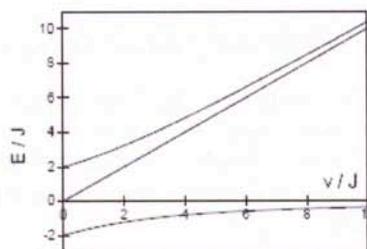


Figure 4 : Énergies propres en fonction de $\frac{v}{J}$ pour deux bosons de spin nul.

2.4. Particules indépendantes ($v = 0$)

- (a) On trouve les trois valeurs propres $0, \pm 2J$. Cela correspond bien à ce qu'on attend si on dispose de deux particules indépendantes, pouvant chacune prendre l'énergie $\pm J$.
 (b) L'état fondamental est :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}}(|N_+\rangle + |M_+\rangle) &= \frac{1}{2}(|1:g;2:g\rangle + |1:d;2:d\rangle + |1:g;2:d\rangle + |1:d;2:g\rangle) \\ &= \frac{|1:g\rangle + |1:d\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \frac{|2:g\rangle + |2:d\rangle}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (14)$$

Ce qui correspond au produit des deux états fondamentaux pour les particules 1 et 2, comme attendu pour des particules indépendantes. C'est un état factorisé, donc sans corrélation entre les particules.

2.5. Particules en interaction forte ($J \ll v$)

- (a) Un développement limité donne les valeurs propres approchées :

$$v, v + \frac{4J^2}{v}, -\frac{4J^2}{v}$$

L'état fondamental correspond à l'énergie $-\frac{4J^2}{v}$.

- (b) Si l'effet tunnel est complètement négligeable, l'état fondamental du Hamiltonien est $|M_+\rangle$ et son énergie est nulle. Il y a deux états excités, $|G\rangle$ et $|D\rangle$, d'énergie v . On peut utiliser la théorie des perturbations non dégénérées pour évaluer le déplacement de cet état fondamental si l'effet tunnel est petit, mais non nul. Le résultat des perturbations au deuxième ordre s'écrit ici :

$$\Delta E_{fond}^{\pm} = -\frac{|\langle G|\hat{V}_{tun}|M_+\rangle|^2}{v} - \frac{|\langle D|\hat{V}_{tun}|M_+\rangle|^2}{v} = -\frac{4J^2}{v}$$

- (c) A l'ordre zéro en $\frac{J}{v}$, l'état fondamental est $|M_+\rangle$. Il y a corrélation, ou plutôt anticorrélation totale entre les particules quand elles sont préparées dans cet état. Si on mesure leur position, on est certain d'en trouver une à gauche et l'autre à droite, et jamais les deux dans le même puits.

3. Le cas de deux particules de spin $\frac{1}{2}$

3.1. Comme indiqué dans l'énoncé, ni l'opérateur \hat{V}_{tun} décrivant l'effet tunnel, ni l'opérateur \hat{V}_{int} décrivant les interactions ne dépendent du spin. L'Hamiltonien $\hat{H} = \hat{V}_{tun} + \hat{V}_{int}$ commute donc avec chacune des trois composantes de l'opérateur spin total et avec le carré du spin total \hat{S}^2 . L'ensemble $\{\hat{H}, \hat{S}^2, \hat{S}_z\}$ peut être diagonalisé simultanément.

3.2. Les valeurs propres de \hat{S}^2 sont 0 et $2\hbar^2$, correspondant respectivement à l'état singulet $S = 0$ (donc $S_z = 0$) et à l'état triplet $S = 1$ ($S_z = 0, \pm 1$).

3.3. (a) Les particules ont un spin $\frac{1}{2}$, ce sont donc des fermions. Le vecteur d'état des deux particules doit être antisymétrique par échange des deux particules. Or, l'état singulet est antisymétrique par échange des deux particules. Il faut donc que la partie orbitale soit symétrique.

- (b) On est donc ramené à une partie orbitale ayant les mêmes propriétés d'échange que celle de deux bosons de spin nul. C'est ce qu'on a étudié dans la deuxième partie. Dans le cas $J \ll v$, on a donc les trois états propres et leur valeur propre associée :

$$|M_+\rangle \otimes |S = 0\rangle : -\frac{4J^2}{v} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(|G\rangle - |D\rangle) \otimes |S = 0\rangle : v \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(|G\rangle + |D\rangle) \otimes |S = 0\rangle : v + \frac{4J^2}{v}$$

- 3.4. (a) L'état de spin triplet est inchangé par échange des deux particules. Comme l'état total (orbital et spin) doit être changé de signe par cet échange, il faut que la partie orbitale soit changée de signe.
 (b) Il n'y a (à un facteur de phase près) qu'un seul état orbital qui convient, c'est :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|1: g; 2: d\rangle - |1: d; 2: g\rangle)$$

Comme il ya trois états possibles de spin ($S_z = 0, \pm 1$), le sous-espace correspondant est de dimension 3.

- (c) L'Hamiltonien ne porte que sur la partie orbitale et on vérifie aisément que :

$$\hat{V}_{\text{int}}(|1: g; 2: d\rangle - |1: d; 2: g\rangle) = 0 \quad \hat{V}_{\text{int}}(|1: g; 2: d\rangle - |1: d; 2: g\rangle) = 0$$

Ce qui entraîne :

$$\hat{H}(|1: g; 2: d\rangle - |1: d; 2: g\rangle) = 0$$

C'est donc bien un état propre de \hat{H} , et il a pour énergie 0.

- 3.5. En regroupant les résultats des deux questions précédentes, on trouve le spectre en énergie de l'Hamiltonien, représenté sur la figure 5.

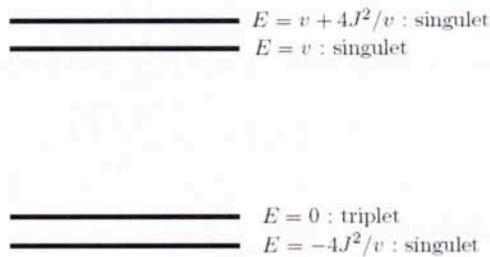


Figure 5 : Spectre de l'Hamiltonien pour deux particules de spin $\frac{1}{2}$ dans le cas d'un effet tunnel faible ($J \ll v$).

- 3.6. Dans la limite $J \ll v$, les deux états de plus basse énergie sont :

- L'état fondamental $\frac{1}{\sqrt{2}}(|1: g; 2: d\rangle + |1: d; 2: g\rangle) \otimes |S = 0, M_S = 0\rangle$, d'énergie $-\frac{4J^2}{v}$
- Le premier niveau excité $\frac{1}{\sqrt{2}}(|1: g; 2: d\rangle - |1: d; 2: g\rangle) \otimes |S = 1, M_S = 0, \pm 1\rangle$, dégénéré 3 fois, d'énergie 0.

Comme annoncé, tout se passe comme si les états où un puits est doublement occupé étaient inaccessibles au système. Par ailleurs, la levée de dégénérescence entre les deux niveaux donnés ci-dessus est identique à l'action de l'Hamiltonien effectif $\hat{H}_{\text{effectif}} = \alpha \hat{S}_1 \cdot \hat{S}_2 + \beta$ pourvu qu'on prenne :

$$\alpha = \frac{4J^2}{v} \quad \text{et} \quad \beta = -\frac{J^2}{v}$$

- 3.7. (a) Le vecteur d'état initial s'écrit compte tenu du principe de Pauli :

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1: g+; 2: d-\rangle - |1: d-; 2: g+\rangle)$$

Le produit scalaire de ce vecteur avec chacun des deux états propre pertinents :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|1: g; 2: d\rangle + |1: d; 2: g\rangle) \otimes |S = 0, M_S = 0\rangle$$

et $\frac{1}{\sqrt{2}}(|1: g; 2: d\rangle - |1: d; 2: g\rangle) \otimes |S = 1, M_S = 0, \pm 1\rangle$

vaut $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et on a donc :

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{|1:g;2:d\rangle + |1:d;2:g\rangle}{\sqrt{2}} \otimes |S=0, M_S=0\rangle + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{|1:g;2:d\rangle - |1:d;2:g\rangle}{\sqrt{2}} \otimes |S=1, M_S=0, \pm 1\rangle \right)$$

(b) Le vecteur d'état à l'instant t vaut :

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{i\frac{4J^2t}{\hbar\nu}} \frac{|1:g;2:d\rangle + |1:d;2:g\rangle}{\sqrt{2}} \otimes |S=0, M_S=0\rangle + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{|1:g;2:d\rangle - |1:d;2:g\rangle}{\sqrt{2}} \otimes |S=1, M_S=0, \pm 1\rangle \right)$$

(c) Le système oscille entre les deux configurations physiques « une particule à gauche de spin + et une particule à droite de spin - » et « une particule à gauche de spin - et une particule à droite de spin + ». La première configuration physique correspond à l'état initial et la seconde à l'état :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|1:g-;2:d+\rangle - |1:d+;2:g-\rangle)$$

La probabilité recherchée est simplement $|\langle\psi(0)|\psi(t)\rangle|^2$ et vaut donc :

$$P(t) = \cos^2\left(\frac{2J^2t}{\hbar\nu}\right)$$

On attend donc une oscillation de période $T = \frac{\hbar\nu}{4J^2}$.

(d) La première oscillation a pour période $T_1 = 2,3\text{ms}$ et la seconde $T_2 = 49\text{ms}$. On en déduit :

$$\frac{J_1}{\hbar} = 420\text{Hz}, \frac{\nu_1}{\hbar} = 1600\text{Hz} \text{ pour la première expérience} \\ \frac{J_2}{\hbar} = 100\text{Hz}, \frac{\nu_2}{\hbar} = 2000\text{Hz} \text{ pour la seconde expérience}$$

La conséquence de l'augmentation de la hauteur de la barrière V_0 est donc la diminution de l'effet tunnel d'un facteur ≈ 4 . Il y a aussi une légère augmentation de l'énergie d'interaction ν , due au fait que les fonctions d'onde sont plus concentrées au fond des puits et deux particules sur le même site interagissent donc un peu plus fortement.

(e) Il suffit que les différents puits n'aient pas exactement les mêmes couples de paramètres (ν, J) pour que les oscillations se brouillent après un certain temps.

• PROBLEME 2: INTERFERENCES ET CORRELATIONS QUANTIQUES

1. Interférences à une particule

1.1. Le BS étant équilibré $\left(t = r = \frac{1}{2}\right)$, son action se traduit par :

$$\begin{aligned} |x\rangle &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|x\rangle + i|y\rangle) \\ |y\rangle &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|y\rangle + i|x\rangle) \end{aligned} \quad (1)$$

L'interféromètre MZ avec la particule envoyée par le chemin x se calcule donc de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 |x\rangle &\xrightarrow{BS1} \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle + i|y\rangle) \xrightarrow{diff} \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{i\phi}|x\rangle + i|y\rangle) \xrightarrow{M} \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{i\phi}i|y\rangle - |x\rangle) \\
 &\xrightarrow{BS2} \frac{1}{\sqrt{2}} \left[e^{i\phi}i \frac{1}{\sqrt{2}}(|y\rangle + i|x\rangle) - \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle + i|y\rangle) \right] = -e^{i\frac{\phi}{2}} \left(\cos\frac{\phi}{2}|x\rangle + \sin\frac{\phi}{2}|y\rangle \right)
 \end{aligned}$$

En résumé :

$$|x\rangle \xrightarrow{MZ} \cos\frac{\phi}{2}|x\rangle + \sin\frac{\phi}{2}|y\rangle \quad (2)$$

(En omettant le facteur de phase global $-e^{i\frac{\phi}{2}}$).

1.2. La probabilité de trouver la particule dans la sortie x , resp. y , est le carré du module du nombre complexe qui multiplie $|x\rangle$, resp. $|y\rangle$. Par conséquent :

$$\text{Prob}(\text{particule en } x) = \cos^2\frac{\phi}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos\phi) \quad (3)$$

$$\text{Prob}(\text{particule en } y) = \sin^2\frac{\phi}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos\phi) \quad (4)$$

2. Interférences à deux particules : corrélations quantiques

Le calcul est une répétition en double copie du calcul précédent.

2.1. Calculons d'abord l'évolution du terme $|x\rangle_1|x\rangle_2$.

$$\begin{aligned}
 |x\rangle_1|x\rangle_2 &\xrightarrow{\alpha, \beta} [e^{i\alpha}|x\rangle_1][e^{i\beta}|x\rangle_2] \xrightarrow{\text{miroirs}} [ie^{i\alpha}|y\rangle_1][ie^{i\beta}|y\rangle_2] \\
 &\xrightarrow{BS} \left[ie^{i\alpha} \frac{1}{\sqrt{2}}(|y\rangle_1 + i|x\rangle_1) \right] \left[ie^{i\beta} \frac{1}{\sqrt{2}}(|y\rangle_2 + i|x\rangle_2) \right] \quad (5) \\
 &= \left(-\frac{1}{2} e^{i(\alpha+\beta)} \right) (|y\rangle_1|y\rangle_2 - |x\rangle_1|x\rangle_2 + i|x\rangle_1|y\rangle_2 + i|y\rangle_1|x\rangle_2)
 \end{aligned}$$

2.2. On calcule de même l'évolution du terme $|y\rangle_1|y\rangle_2$. Par symétrie du montage, le résultat final revient à permuter les x et les y et à remplacer $\alpha + \beta$ par 0.

Néanmoins, faisons explicitement le calcul :

$$\begin{aligned}
 |y\rangle_1|y\rangle_2 &\xrightarrow{\text{miroirs}} [i|x\rangle_1][i|x\rangle_2] \xrightarrow{BS} \left[\frac{i}{\sqrt{2}}(|x\rangle_1 + i|y\rangle_1) \right] \left[\frac{i}{\sqrt{2}}(|x\rangle_2 + i|y\rangle_2) \right] \\
 &= \left(-\frac{1}{2} \right) (|x\rangle_1|x\rangle_2 - |y\rangle_1|y\rangle_2 + i|x\rangle_1|y\rangle_2 + i|y\rangle_1|x\rangle_2)
 \end{aligned}$$

Ce qui était attendu.

2.3. La source produit une paire de particule dans l'état :

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle_1 \otimes |x\rangle_2 + |y\rangle_1 \otimes |y\rangle_2) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle_1|x\rangle_2 + |y\rangle_1|y\rangle_2)$$

Les deux résultats précédents permettent de déterminer l'évolution de cet état :

$$|\psi\rangle \xrightarrow{\text{montage}} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{e^{i(\alpha+\beta)} - 1}{2} (|x\rangle_1|x\rangle_2 - |y\rangle_1|y\rangle_2) - \frac{i}{\sqrt{2}} \frac{e^{i(\alpha+\beta)} + 1}{2} (|x\rangle_1|y\rangle_2 + |y\rangle_1|x\rangle_2)$$

Soit en posant $\theta = \frac{\alpha + \beta}{2}$:

$$|\psi\rangle \xrightarrow{\text{montage}} \frac{i}{\sqrt{2}} e^{\frac{i}{2}(\alpha+\beta)} \left[\sin\theta (|x\rangle_1 |x\rangle_2 - |y\rangle_1 |y\rangle_2) + \cos\theta (|x\rangle_1 |y\rangle_2 - |y\rangle_1 |x\rangle_2) \right] \quad (6)$$

2.4. Il en résulte que :

$$\text{Prob}(x, x) = \text{Prob}(y, y) = \frac{1}{2} \sin^2 \theta = \frac{1}{4} [1 - \cos(\alpha + \beta)] \quad (7)$$

$$\text{Prob}(x, y) = \text{Prob}(y, x) = \frac{1}{2} \cos^2 \theta = \frac{1}{4} [1 + \cos(\alpha + \beta)] \quad (8)$$

- Pour $\alpha = \beta = 0$, les deux particules prennent toujours des sorties différentes (si l'une prend x , l'autre prend y).

- Pour $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, elles prennent toujours la même sortie.

Remarque : On peut fixer $\beta = 0$ et ne faire varier que α . Dans ce cas on vérifie que la modification d'un seul chemin modifie les corrélations entre les deux particules !

- Il est facile de vérifier que si l'on regarde chacune des deux particules indépendamment de l'autre, le comportement est indépendant de α et β .

En effet : $\text{Prob}(1 = x) = \text{Prob}(x, x) + \text{Prob}(x, y) = \frac{1}{2}$.

De même $\text{Prob}(1 = y) = \text{Prob}(2 = x) = \text{Prob}(2 = y) = \frac{1}{2}$.

Ce qui montre que les corrélations quantiques ne peuvent être utilisées pour transmettre un message.

3. Inégalité de Bell

3.1. Le coefficient de corrélation est :

$$E(\alpha, \beta) = [\text{Prob}(x, x) + \text{Prob}(y, y)] - [\text{Prob}(x, y) + \text{Prob}(y, x)] = -\cos(\alpha + \beta)$$

3.2. On en déduit :

$$S = |-\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha' + \beta) - \cos(\alpha + \beta') + \cos(\alpha' + \beta')|$$

Il est facile de trouver des valeurs pour α, α', β et β' telles que $S > 2$.

Par exemple, pour $\alpha = 0, \alpha' = \frac{\pi}{2}, \beta = -\frac{\pi}{4}$ et $\beta' = \frac{\pi}{4}$ on trouve $S = 2\sqrt{2} > 2$. L'inégalité de Bell est violée en mécanique quantique.

Remarque :

L'inégalité de Bell originale : $|E(\alpha, \beta) - E(\alpha, \gamma) - E(\beta, \gamma)| \leq 1$ fut dérivée par John Bell en 1964 sous l'hypothèse additionnelle que $E(\alpha, \alpha) = -1$ (anticorrélation parfaite si les deux particules rencontre le même montage). Nous pouvons aisément nous ramener à ce cas dans notre montage en plaçant β sur le chemin y au lieu de le placer sur le chemin x de la particule 2. Dans ce cas, nous aurions trouvé $E(\alpha, \beta) = -\cos(\alpha - \beta)$, qui satisfait bien l'hypothèse de Bell.