

EXAMEN DE PHYSIQUE QUANTIQUE

PARTIE A

Traiter un exercice au choix
Aucun document n'est autorisé
Temps alloué : 1H

EXERCICE 1 : brouillage de la cohérence dans une expérience d'Young

Considérons l'expérience de pensée représentée sur la figure ci-dessous. On réalise l'expérience des fentes d'Young avec des atomes initialement dans un état interne excité $|e\rangle$. Une cavité électromagnétique résonnante avec les atomes est placée derrière chacun des trous d'Young. Chaque cavité est initialement vide, c'est-à-dire qu'elle ne contient aucun photon. Notons cet état $|0_a\rangle$ ou $|0_b\rangle$, c'est-à-dire 0 photon dans la cavité a ou b . L'atome en passant dans une cavité peut y laisser un photon et tomber dans son état fondamental $|f\rangle$:

$$\text{Trou A : } |e, 0_a, 0_b\rangle \rightarrow |f, 1_a, 0_b\rangle$$

$$\text{Trou B : } |e, 0_a, 0_b\rangle \rightarrow |f, 0_a, 1_b\rangle$$

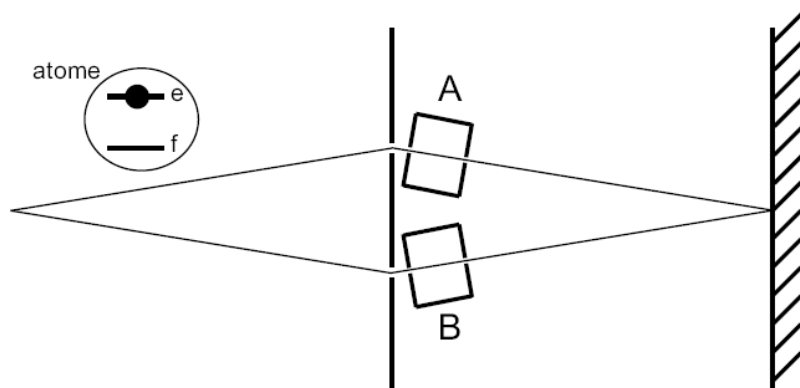
L'état $|1_a\rangle$ représente la cavité A avec 1 photon à l'intérieur (et de même pour B, $|1_b\rangle$).

On note pour simplifier $|e, n_a, n_b\rangle$ ou $|f, n_a, n_b\rangle$ les états produits tensoriels $|e\rangle \otimes |n_a\rangle \otimes |n_b\rangle$ et $|f\rangle \otimes |n_a\rangle \otimes |n_b\rangle$ où n_a et n_b valent ± 1 .

Tout ce qu'il est nécessaire de savoir pour le moment est l'orthogonalité des états normés $|e, 0_a, 0_b\rangle$ et $|f, 1_a, 0_b\rangle$ et idem pour $|e, 0_a, 0_b\rangle$ et $|f, 0_a, 1_b\rangle$.

1. En l'absence de couplage entre l'atome et les cavités électromagnétiques, l'état d'un atome après le passage par les deux trous d'Young s'écrit :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_a(\vec{r}) + \psi_b(\vec{r}))|e\rangle$$



Expérience des trous d'Young dans laquelle on essaie de détecter le chemin suivi par l'atome, en regardant le photon qu'il laisse dans une des deux cavités électromagnétiques résonnantes situées derrière les trous.

Ecrire la densité de probabilité pour détecter l'atome en un point $\vec{r}$ de l'écran.

2. Supposons maintenant les deux cavités mises en place et résonnantes avec les atomes. Après passage de l'atome par les deux trous d'Young et les cavités, écrire l'état du système atome+champ.

On négligera ici la modification de l'état externe de l'atome ($\psi_{a,b}(\vec{r})$) lors de l'émission du photon. En toute rigueur, il faudrait prendre en compte le recul de l'atome, c'est-à-dire le changement de l'impulsion atomique par une quantité $\hbar\vec{k}$, ce qui se traduirait par une multiplication de $\psi_{a,b}(\vec{r})$ par $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$.

3. Ecrire la densité de probabilité de trouver l'atome en un point $\vec{r}$ de l'écran.

4. Comment expliquez-vous la disparition du terme d'interférence ?

EXERCICE 2 : La précession de Larmor

On considère une particule de spin s plongée dans un champ magnétique homogène et uniforme $\vec{B} = B\vec{u}_z$. On note $\hat{S}$ l'opérateur spin de la particule et $\hat{\mu} = \gamma\hat{S}$ l'opérateur moment magnétique associé. On ne tient pas compte des degrés de liberté associés au mouvement du centre de masse de la particule. On pose $\omega = -\gamma B$.

1. Ecrire l'Hamiltonien $\hat{H}$ du problème.

En utilisant le théorème d'Ehrenfest(*),

(*) équation d'évolution dans le temps de la valeur moyenne d'une observable $\hat{A}$:

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{A}\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle\psi|[\hat{A}, \hat{H}]|\psi\rangle$$

déterminer les équations d'évolution des trois composantes $\langle\hat{S}_i\rangle$, $i = x, y, z$.

2. Dédurre de la question précédente que le mouvement de $\langle\hat{S}\rangle$ est un mouvement de précession. Quel est le temps T_0 nécessaire pour que le spin fasse un tour ?

3. On décompose l'état $|\psi(t)\rangle$ du spin sur la base propre $\{|s, m\rangle\}$, commune à $\hat{S}^2$ et $\hat{S}_z$:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_m \alpha_m(t) |s, m\rangle$$

(a) Pour une valeur de s fixée, quelles sont les valeurs possibles de m ?

(b) Donner l'évolution des coefficients $\alpha_m(t)$.

(c) Comparer la valeur du vecteur d'état au bout d'une période T_0 , $|\psi(T_0)\rangle$, et la valeur initiale $|\psi(0)\rangle$. Discuter le résultat obtenu en fonction des valeurs de s .

(d) Envisager une mise en évidence expérimentale de ce résultat.

EXAMEN DE PHYSIQUE QUANTIQUE

PARTIE B

Traiter un problème au choix
 Documents autorisés (sauf livres)
 Temps alloué : 2H

• PROBLEME 1: LE CHARMONIUM

Dans les expériences menées sur les accélérateurs de particules, on peut former des états liés de particules élémentaires {quark - antiquark} qu'on appelle « mésons ». On s'intéresse ici au quark c , le « charme », dont l'énergie de masse mc_0^2 (où c_0 est la vitesse de la lumière) est de l'ordre de 1,5 GeV. L'antiparticule du quark c , notée $\bar{c}$, a une masse identique.

Ce problème est consacré à l'étude de l'édifice $c\bar{c}$, appelé « **charmonium** ».

La valeur élevée de la masse m du charme permet une description non relativiste. Le potentiel d'interaction entre c et $\bar{c}$ ne dépend que de la distance r entre les deux particules et est modélisé ici par :

$$V(r) = V_0(r) + V_1(r) \text{ avec } \begin{cases} V_0(r) = \frac{1}{2}\kappa r^2 \\ V_1(r) = -\frac{\beta}{r} \end{cases} \quad (\kappa, \beta > 0) \quad (1)$$

Le potentiel V_1 décrit l'interaction forte, attractive, entre quarks à courte distance, qui suit la même loi que l'interaction coulombienne.

On se place dans tout le problème dans le référentiel du centre de masse du système $c\bar{c}$, dans lequel l'Hamiltonien s'écrit

$$\hat{H} = \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2\mu} + V(\hat{r}) \quad (2)$$

où $\mu = \frac{m}{2}$ est la masse réduite, et où $\hat{r}$ et $\hat{\vec{p}}$ sont les opérateurs position et impulsion relatives.

Le quark c et l'antiquark $\bar{c}$ sont des particules de spin $\frac{1}{2}$. Les effets liés au spin sont pris en compte dans la troisième partie du problème. Ils sont négligés dans les deux premières parties.

On peut traiter la deuxième partie si l'on admet les résultats de l'énoncé concernant la première partie. La partie 3 est pratiquement indépendante des deux premières.

1. Modélisation par un potentiel purement harmonique

On néglige $V_1(r)$ dans cette partie et on pose $\hat{H}_0 = \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2\mu} + V_0(\hat{r})$. On rappelle que les niveaux d'énergie d'un oscillateur harmonique à une dimension, d'Hamiltonien $\hat{H}^{(1D)}$

$$\hat{H}^{(1D)} = \frac{\hat{p}^2}{2\mu} + \frac{1}{2}\mu\omega^2\hat{x}^2$$

sont $\hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$ où n est un entier positif ou nul. On rappelle également que ces niveaux sont non dégénérés et on donne les fonctions propres ψ_n (non normalisées) correspondant aux trois premiers niveaux d'énergie :

$$\psi_0(x) = e^{-\frac{x^2}{2a^2}} ; \quad \psi_1(x) = xe^{-\frac{x^2}{2a^2}} ; \quad \psi_2(x) = (2x^2 - a^2)e^{-\frac{x^2}{2a^2}} \quad \text{avec } a = \sqrt{\frac{\hbar}{\mu\omega}} \quad (3)$$

1.1. Mettre l'Hamiltonien $\hat{H}_0$ sous la forme $\hat{H}_0 = \hat{H}_x^{(1D)} + \hat{H}_y^{(1D)} + \hat{H}_z^{(1D)}$ où $\hat{H}_i^{(1D)}$ est l'Hamiltonien d'un oscillateur harmonique à une dimension le long de la direction i ($i = x, y, z$).

1.2. Montrer que les niveaux d'énergie de $\hat{H}_0$ sont de la forme $E_n = \left(n + \frac{3}{2}\right)\hbar\omega$, où n est un entier positif ou nul et $\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{\mu}}$.

1.3. Montrer que la dégénérescence g_n des premiers niveaux sont $g_0 = 1, g_1 = 3, g_2 = 6$.

1.4. On introduit l'opérateur moment cinétique orbital $\hat{L} = \hat{r} \wedge \hat{p}$. Rappeler pourquoi $[\hat{H}_0, \hat{L}_i] = 0$ avec $i = x, y, z$; en déduire qu'il existe une base propre commune à $\hat{H}_0, \hat{L}^2$ et $\hat{L}_z$.

Dans les questions qui suivent, on va identifier une base d'états propres de $\hat{L}^2$ et $\hat{L}_z$ pour les trois premiers sous-espaces propres $n = 0, 1, 2$ de $\hat{H}_0$.

1.5. Niveau fondamental ($n = 0$).

(a) Donner l'expression de la fonction $\Phi_0(\vec{r})$ correspondant au niveau fondamental de $\hat{H}_0$. On ne cherchera pas à la normaliser.

(b) Exprimer $\Phi_0(\vec{r})$ en fonction des coordonnées sphériques (r, θ, φ) . En déduire que cet état est de moment cinétique $l = 0$.

(c) La taille caractéristique du charmonium dans son niveau fondamental est $a = 4 \times 10^{-16} \text{ m}$. Calculer en GeV l'énergie mécanique (cinétique + potentielle) E_0 . Comparer E_0 à l'énergie de masse $2mc_0^2$ et commenter la validité de l'approximation non relativiste.

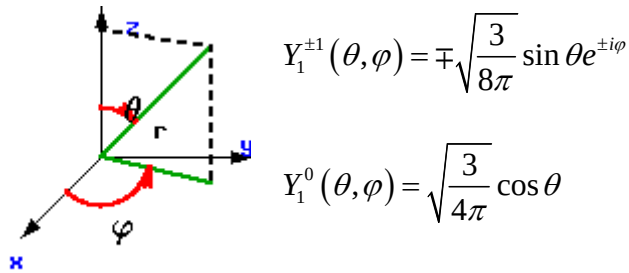
1.6. Premier niveau excité ($n = 1$).

On note $\mathcal{E}_1$ le sous-espace propre de dimension $g_1 = 3$, associé à la valeur propre E_1 .

(a) Donner une base de fonctions propres de $\mathcal{E}_1$, commune aux trois opérateurs $\hat{H}_i^{(1D)}$ ($i = x, y, z$).

(b) Montrer que les états de ce sous-espace s'expriment en fonction des harmoniques sphériques $Y_1^{\pm 1}$ et Y_1^0 . En déduire que les états sont de moment cinétique $l = 1$.

On rappelle les expressions des harmoniques sphériques $Y_1^{\pm 1}$ et Y_1^0 :



- (c) Donner (sans la normaliser) la base de $\mathcal{E}_1$ commune à $\hat{H}_0$ (avec la valeur propre E_1), $\hat{L}^2$ (avec la valeur propre $l(l+1)\hbar^2$, $l=1$) et $\hat{L}_z$ (avec trois valeurs propres $m\hbar$, $m = \pm 1, 0$).

1.7. Deuxième niveau excité ($n=2$).

On note $\mathcal{E}_2$ le sous-espace propre de dimension $g_2 = 6$, associé à la valeur propre E_2 .

- (a) Montrer simplement que $\Phi_2(\vec{r}) = (2r^2 - 3a^2)e^{-\frac{r^2}{2a^2}}$ est un état d'énergie E_2 .

- (b) Expliquer pourquoi $\Phi_2(\vec{r})$ est de moment cinétique $l=0$.

On admettra dans la suite que le sous-espace $\mathcal{E}_2'$ de dimension 5, orthogonal à l'état $\Phi_2(\vec{r})$ dans $\mathcal{E}_2$, correspond à des états de moment cinétique $l=2$. On admettra également qu'on peut choisir une base de $\mathcal{E}_2'$ commune à $\hat{H}_0$ (avec la valeur propre E_2), $\hat{L}^2$ (avec la valeur propre $l(l+1)\hbar^2$, $l=2$) et $\hat{L}_z$ (avec les 5 valeurs propres $m\hbar$, $m = \pm 2, \pm 1, 0$).

- 1.8. Les positions des 4 niveaux d'énergie les plus bas du charmonium sont représentées sur la figure 1. On a indiqué le moment cinétique l de chaque niveau. La modélisation de l'interaction entre c et $\bar{c}$ en terme d'un potentiel purement harmonique est-elle satisfaisante ?

Energie (MeV)

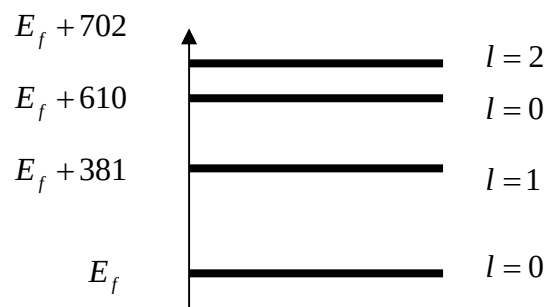


Figure 1

Structure simplifiée
des premiers niveaux
du charmonium

2. Prise en compte du potentiel $V_1(r) = -\frac{\beta}{r}$

Pour améliorer la description du charmonium, on tient compte de $V_1(r)$. La détermination exacte des niveaux d'énergie de $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2\mu} + \hat{V}_0 + \hat{V}_1$ nécessite une résolution numérique. On se limite ici à un calcul au premier ordre en V_1 en utilisant la théorie des perturbations. On note

$\{|n, l, m\rangle\}$ la base propre commune à $\hat{H}_0, \hat{L}^2$ et $\hat{L}_z$ déterminée dans la partie précédente pour les niveaux d'énergie les plus bas ($n = 0, 1, 2$).

2.1. Expliquer pourquoi $\hat{V}_1$ commute avec $\hat{L}_z$ et $\hat{L}^2$.

2.2. En déduire qu'un élément de matrice $\langle n, l, m | \hat{V}_1 | n', l', m' \rangle$ est nul si $l \neq l'$ ou $m \neq m'$.

2.3. En utilisant $[\hat{V}_1, \hat{L}_\pm] = 0, (\hat{L}_\pm = \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y)$, montrer que $\langle n, l, m | \hat{V}_1 | n, l, m \rangle$ est indépendant de m .

La théorie des perturbations pour $\hat{V}_1$ appliquée aux niveaux d'énergie $n=1$ et $n=2$ de $\hat{H}_0$ impose en principe de diagonaliser des matrices de taille 3×3 et 6×6 respectivement. Les résultats précédents permettent d'éviter cette procédure fastidieuse.

2.4. On donne dans la base $\{|n, l, m\rangle\}$ les résultats suivants :

$$\begin{aligned} \langle 0, 0, 0 | \hat{V}_1 | 0, 0, 0 \rangle &= -30\beta' & \langle 1, 1, m | \hat{V}_1 | 1, 1, m \rangle &= -20\beta' \\ \langle 2, 0, 0 | \hat{V}_1 | 2, 0, 0 \rangle &= -25\beta' & \langle 2, 2, m | \hat{V}_1 | 2, 2, m \rangle &= -16\beta' \end{aligned}$$

Où on a posé $\beta' = \frac{\beta}{15\sqrt{\pi}a}$. En utilisant les trois écarts d'énergie indiqués sur la figure 1.

(a) Déterminer en MeV les valeurs de $\hbar\omega$ et β' .

(b) Retrouver la taille caractéristique du charmonium indiquée plus haut ($\sim 4 \times 10^{-16} \text{ m}$)

(c) Commenter la cohérence du modèle.

2.5. On caractérise habituellement « l'intensité » de l'interaction électromagnétique par le nombre sans dimension $\alpha = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c_0}$ appelé *constante de structure fine*.

Déterminer le nombre sans dimension α_{fort} qui caractérise de manière similaire l'interaction forte décrite par le potentiel $\hat{V}_1$.

3. La structure hyperfine du niveau fondamental (**BONUS**)

Le niveau fondamental $l=0$ de la figure 1 est en fait clivé en deux sous-niveaux, correspondant respectivement à un état singulet et à un état triplet de spin. L'écart entre les deux niveaux est 117 MeV.

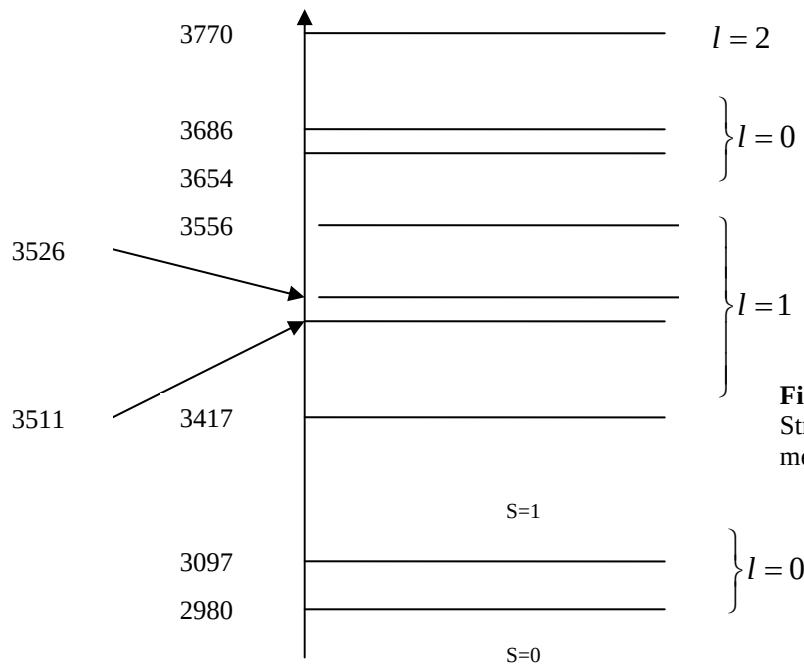


Figure 2
Structure des niveaux
mesurée expérimentalement

On va chercher à retrouver cet ordre de grandeur en utilisant les résultats connus pour la structure hyperfine de l'atome d'hydrogène. On rappelle que les rapports gyromagnétiques de l'électron et du proton sont $\gamma_e = -g_e \frac{q}{2m_e}$ et $\gamma_p = g_p \frac{q}{2m_p}$ avec $g_e = 2$ et $g_p = 5,58$.

3.1. La valeur littérale du clivage hyperfin de l'hydrogène s'écrit sous la forme $A = \frac{A'}{a_1^3}$

où a_1 est la taille caractéristique de l'état fondamental de l'atome d'hydrogène (rayon de Bohr). A' exprimé en fonction de $\hbar$, de la vitesse de la lumière c_0 , de la constante de structure fine α (rappelée à la question 2.6.), des masses m_e , m_p et des

facteurs g_e , g_p a pour expression $A' = \frac{2}{3} \frac{\alpha \hbar^3}{c_0} \frac{g_e g_p}{m_e m_p}$.

3.2. Transposer ce résultat au cas de l'interaction forte entre les quarks c et $\bar{c}$; en déduire l'ordre de grandeur de α_{fort} , qu'on comparera au résultat de la question 2.6.

On prendra $g_c = g_{\bar{c}} = 2$. La taille a du charmonium sera prise égale à $4 \times 10^{-16} \text{ m}$.

Commentaire :

Le premier état du charmonium a été découvert quasi-simultanément en 1974 (à Brookhaven et Stanford dans les équipes de S. Ting et B. Richter, prix Nobel 1976). Cet état (baptisé J/ψ) correspond à l'état $l=0$, $s=1$, d'énergie 3097 MeV. Différents états ont été identifiés depuis (Phys. Rev. Lett. **89**, 102001 (2002)).

• PROBLEME 2:

MESURE DU RAPPORT GYROMAGNETIQUE DU NEUTRON

On prépare un faisceau de neutrons, de vitesse v , dirigé suivant l'axe x . Ce faisceau est plongé dans un champ magnétique $\vec{B}_0$ constant et uniforme dirigé selon z . On note $|+_z\rangle$ et $|-_z\rangle$ les états propres de la projection $\hat{S}_z$ du spin $\frac{1}{2}$ du neutron suivant l'axe z . On note $\hat{M} = \gamma \hat{S}$ son moment magnétique, avec $\gamma = g \frac{e}{2m_n}$ où $e = 1,6 \times 10^{-19}$ Coulomb est la charge élémentaire, $m_n = 1,6 \times 10^{-27}$ kg est la masse du neutron et g est appelé le **rapport gyromagnétique** du neutron que l'on étudie dans ce problème.

Les neutrons sont initialement dans l'état $|-_z\rangle$. Ils traversent ensuite une zone où règne un champ magnétique oscillant $\vec{B}_1$ dont les composantes sont :

$$\vec{B}_1 = \begin{cases} B_{1x} = B_1 e^{-\frac{|x|}{a}} \cos \omega t \\ B_{1y} = B_1 e^{-\frac{|x|}{a}} \sin \omega t \\ B_{1z} = 0 \end{cases}$$

On suppose B_1 constant (en toute rigueur B_1 devrait être variable pour assurer $\nabla \cdot \vec{B} = 0$) et $B_1 \ll B_0$.

Dans tout le problème on traite le mouvement spatial des neutrons classiquement. La seule partie quantique concerne l'évolution de leur état de spin.

1-/ Soit un neutron dont le mouvement spatial est ($x = vt$, $y = z = 0$). Donner l'expression du Hamiltonien de spin $\hat{H}_{spin}(t)$ qui caractérise l'évolution quantique de son état de spin en présence des champs $\vec{B}_0$ et $\vec{B}_1$ (en fonction de $\gamma, \hat{S}, \vec{B}_0$ et $\vec{B}_1$).

2-/ On posera $\omega_0 = -\gamma B_0$ et $\omega_1 = -\gamma B_1$. Donner l'expression de la matrice 2×2 représentant $\hat{H}_{spin}(t)$ dans la base $\{|+_z\rangle, |-_z\rangle\}$ (en fonction de $\omega, \omega_0, \omega_1, \hbar, v, t, a$).

3-/ On note C_{-+} l'amplitude de probabilité de la transition du neutron vers l'état $|+_z\rangle$ à l'instant $t = +\infty$ (loin de la zone d'interaction), sachant qu'à $t = -\infty$, il était dans l'état $|-_z\rangle$. En traitant $\vec{B}_1$ comme une perturbation et en appliquant la théorie des perturbations dépendant du temps au premier ordre, montrer que :

$$C_{-+} \simeq -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega_0 t} \langle +_z | \hat{H}_{spin}(t) | -_z \rangle dt$$

4-/ Calculer C_{-+} sachant que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\Omega t} e^{-\alpha|t|} dt = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \Omega^2}$.

On mesure le flux de neutrons qui sont passés dans l'état $|+_z\rangle$ (par exemple par un dispositif de Stern et Gerlach muni de compteurs à neutrons), donc la probabilité P_{-+} qu'ils aient effectué cette transition. Montrer qu'en fonction de ω , P_{-+} a un comportement résonnant ; tracer P_{-+} en fonction de l'écart à la résonance $(\omega_0 - \omega)$. Quel est l'ordre de grandeur de la largeur de la courbe de résonance $\Delta\omega_0$ en fonction de v et a ?

5-I On rajoute sur le trajet du faisceau une deuxième zone de champ oscillant $\vec{B}'(t)$, identique à la première, mais décalée d'une distance b ($b \gg a$) le long de x :

$$\vec{B}' = \begin{cases} B'_x = B_1 e^{-\frac{|x-b|}{a}} \cos \omega t \\ B'_y = B_1 e^{-\frac{|x-b|}{a}} \sin \omega t \\ B'_z = 0 \end{cases}$$

Quelle est la nouvelle expression de $\langle +_z | \hat{H}_{spin}(t) | -_z \rangle$?

Calculer la nouvelle valeur de l'amplitude de probabilité de transition C_{-+} après le passage au travers des deux zones et montrer que l'on obtient l'ancienne expression de C_{-+} multipliée

par le facteur $\left(1 + e^{\frac{i(\omega_0 - \omega)b}{v}}\right)$. Calculer la nouvelle probabilité P_{-+} et tracer son allure.

6-I Expliquer pourquoi il est préférable d'utiliser deux zones de champ décalées de b plutôt qu'une seule, si l'on veut mesurer avec précision ω_0 . Quel est alors l'ordre de grandeur de la précision obtenue $\Delta\omega_0$? Exprimer l'ordre de grandeur de la précision obtenue sur le facteur gyromagnétique Δg .

7-I Application numérique : le faisceau de neutrons a une vitesse $v = 100 \text{ m.s}^{-1}$. La valeur du rapport gyromagnétique du neutron est actuellement mesurée avec la précision :

$$g = -3,8240836 \pm 1,76 \times 10^{-6}$$

Dans un champ $B_0 = 1 \text{ Tesla}$, quel doit être l'ordre de grandeur de la longueur b pour atteindre cette précision ?

Corrigés

EXERCICE 1 : brouillage de la cohérence dans une expérience d'Young

1. En l'absence de couplage, la densité de probabilité pour détecter l'atome en un point $\vec{r}$ de l'écran vaut :

$$P(r) = \frac{1}{2} \left(|\psi_a|^2 + |\psi_b|^2 + \underbrace{\psi_a^* \psi_b + \psi_a \psi_b^*}_{=1} \right) \underbrace{\langle e | e \rangle}_{=1} = \frac{1}{2} \left(|\psi_a|^2 + |\psi_b|^2 + \psi_a^* \psi_b + \psi_a \psi_b^* \right)$$

C'est la fonction d'interférence habituelle, avec une modulation de période x_i provenant du terme $\psi_a^* \psi_b + \psi_a \psi_b^*$.

2. L'état du système atome+champ s'écrit maintenant :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \{ \psi_a(\vec{r}) |1_a, 0_b\rangle + \psi_b(\vec{r}) |0_a, 1_b\rangle \} |f\rangle$$

3. La probabilité de trouver l'atome en un point $\vec{r}$ de l'écran est désormais :

$$P(\vec{r}) = \frac{1}{2} \left\{ |\psi_a|^2 \langle 1_a, 0_b | 1_a, 0_b \rangle + |\psi_b|^2 \langle 0_a, 1_b | 0_a, 1_b \rangle + \dots \right\} \langle f | f \rangle$$

$$+ \dots + \psi_a^* \psi_b \langle 1_a, 0_b | 0_a, 1_b \rangle + \psi_a \psi_b^* \langle 0_a, 1_b | 1_a, 0_b \rangle$$

A cause de l'orthogonalité des états $|0_a\rangle$ et $|1_a\rangle$ ($|0_b\rangle$ et $|1_b\rangle$), le terme d'interférence disparaît et la probabilité de détection :

$$P(\vec{r}) = \frac{1}{2} \left(|\psi_a|^2 + |\psi_b|^2 \right) \underbrace{\langle f | f \rangle}_{=1} = \frac{1}{2} \left(|\psi_a|^2 + |\psi_b|^2 \right)$$

ne présente aucune modulation à l'échelle de x_i .

4. La leçon à retenir ici est simple : on a écrit le chemin suivi par l'atome sur un détecteur, en l'occurrence les cavités et le signal d'interférence disparaît. Cette disparition du signal d'interférence n'est pas un brouillage de la fonction d'onde atomique, comme le ferait par exemple une phase aléatoire qui viendrait se mettre devant ψ_b . Le signal disparaît parce que l'état de l'atome s'est **intriqué** avec l'état de l'environnement, en l'occurrence les cavités. Comme le signal final ne porte que sur l'atome (la fonction $P(\vec{r})$), l'orthogonalité des états de l'environnement détruit toute interférence.

EXERCICE 2 : La précession de Larmor

1. L'Hamiltonien est $\hat{H} = -\hat{\vec{\mu}} \cdot \vec{B} = -\hat{\mu}_z B = -\gamma B \hat{S}_z$ ou encore $\hat{H} = \omega \hat{S}_z$. Le théorème d'Ehrenfest donne

$$\frac{d\langle \hat{S}_i \rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \langle \psi | [\hat{S}_i, \hat{H}] | \psi \rangle$$

En utilisant $[\hat{S}_x, \hat{S}_z] = -i\hbar \hat{S}_y$, $[\hat{S}_y, \hat{S}_z] = i\hbar \hat{S}_x$ et le fait que $\hat{S}_z$ commute évidemment avec lui-même, on arrive à

$$\frac{d\langle \hat{S}_x \rangle}{dt} = -\omega \langle \hat{S}_y \rangle \quad \frac{d\langle \hat{S}_y \rangle}{dt} = \omega \langle \hat{S}_x \rangle \quad \frac{d\langle \hat{S}_z \rangle}{dt} = 0$$

2. Ces équations différentielles s'intègrent (par exemple) en remarquant que

$$\frac{d^2\langle \hat{S}_x \rangle}{dt^2} + \omega^2 \langle \hat{S}_x \rangle = 0$$

Ce qui donne $\langle \hat{S}_x \rangle(t) = A \cos(\omega t + \phi)$, où A et ϕ sont des constantes d'intégration, dépendant des conditions initiales. En reportant dans l'équation liant $\langle \hat{S}_x \rangle$ et $\langle \hat{S}_y \rangle$, on en déduit que $\langle \hat{S}_y \rangle(t) = A \sin(\omega t + \phi)$. On a donc un mouvement de rotation uniforme à la pulsation ω pour la projection du vecteur $\langle \hat{S} \rangle$ sur le plan xy . La composante selon z , $\langle \hat{S}_z \rangle$ est quant à elle constante. Il s'agit donc bien d'un mouvement de précession autour de l'axe z . Le temps nécessaire pour faire un tour est la période $T_0 = \frac{2\pi}{\omega}$.

3.

(a) Le nombre quantique m caractérisant la projection du spin sur l'axe z , peut prendre les $(2s+1)$ valeurs possibles $\{-s, -s+1, \dots, s-1, s\}$.

(b) L'équation de Schrödinger $i\hbar \frac{d|\psi\rangle}{dt} = \hat{H}|\psi\rangle$ prend une forme très simple puisque les états $|s, m\rangle$ sont états propres de l'Hamiltonien avec une valeur propre $m\hbar\omega$. On obtient :

$$i\hbar \dot{\alpha}_m(t) = m\hbar\omega \alpha_m(t)$$

Qui s'intègre en $\alpha_m(t) = \alpha_m(0) e^{-im\omega t}$.

(c) Au bout du temps $T_0 = \frac{2\pi}{\omega}$, chaque coefficient α_m vaut

$$\alpha_m(T_0) = \alpha_m(0) e^{-im\omega T_0} = \alpha_m(0) e^{-im2\pi}$$

• Si le spin s est **entier**, m est également entier et $e^{-im2\pi} = 1$. On trouve alors $|\psi(T_0)\rangle = |\psi(0)\rangle$.

• Si le spin s est **demi-entier**, m est également demi-entier et $e^{-im2\pi} = -1$. Le signe du vecteur d'état est alors changé après une période de précession : $|\psi(T_0)\rangle = -|\psi(0)\rangle$.

(d) Le possible changement de signe du vecteur d'état selon que le spin est demi entier ou entier peut être mis en évidence dans une expérience d'interférence à deux voies ; dans une voie, la particule traverse une zone de champ magnétique lui faisant subir la précession de Larmor, alors que le champ est nul sur l'autre voie. La phase accumulée dans chacune des voies est révélée par la figure d'interférence obtenue en recombinaison des deux chemins.

•PROBLEME 1: LE CHARMONIUM

1. Modélisation par un potentiel purement harmonique

1.1. On pose $\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{\mu}}$ et on obtient :

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}_x^2}{2\mu} + \frac{1}{2}\mu\omega^2\hat{x}^2 + \frac{\hat{p}_y^2}{2\mu} + \frac{1}{2}\mu\omega^2\hat{y}^2 + \frac{\hat{p}_z^2}{2\mu} + \frac{1}{2}\mu\omega^2\hat{z}^2$$

1.2. On obtient une base d'états propres de $\hat{H}_0$ en considérant les produits de fonctions de Hermite :

$$\Psi_{n_x, n_y, n_z}(\vec{r}) = \psi_{n_x}(x)\psi_{n_y}(y)\psi_{n_z}(z) \quad (4)$$

$$\text{d'énergie } E_{n_x, n_y, n_z} = E_n = \left(n + \frac{3}{2}\right)\hbar\omega \text{ avec } n = n_x + n_y + n_z.$$

1.3. Le niveau fondamental est obtenu pour $n_x = n_y = n_z = 0$. Il est non dégénéré : $g_0 = 1$. Trois états de la base trouvée ci-dessus correspondent au deuxième niveau excité : $(n_x, n_y, n_z) = (1, 0, 0)$ ou $(0, 1, 0)$ ou $(0, 0, 1)$. On a donc $g_1 = 3$.

Six états de la base trouvée ci-dessus correspondent au deuxième niveau excité : $(2, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 2), (1, 1, 0), (1, 0, 1)$ et $(0, 1, 1)$.

$$\text{D'une façon générale } g_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

1.4. On sait que l'énergie cinétique commute avec $\hat{L}$. Par ailleurs, le potentiel $\hat{V}_0$ est invariant par rotation et commute également avec $\hat{L}$. Les trois opérateurs $\hat{H}_0, \hat{L}^2, \hat{L}_z$ commutent deux à deux et on sait qu'il existe une base propre commune à ces trois opérateurs. On a déjà identifié les niveaux d'énergie de $\hat{H}_0, E_n = \left(n + \frac{3}{2}\right)\hbar\omega$. On peut donc trouver, dans chaque sous-espace propre $\mathcal{E}_n$ de $\hat{H}_0$, une base de fonctions propres de $\hat{L}^2$ et $\hat{L}_z$.

1.5.

(a) La fonction Φ_0 est obtenue en prenant $n_x = n_y = n_z = 0$ dans (4), ce qui donne

$$\Phi_0(\vec{r}) \propto e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{2a^2}}$$

(b) On a $\Phi_0(\vec{r}) \propto e^{-\frac{r^2}{2a^2}}$, ce qui prouve que Φ_0 est de symétrie sphérique. C'est donc un état de moment cinétique nul.

(c) L'extension caractéristique du niveau fondamental est $a = \sqrt{\frac{\hbar}{\mu\omega}}$. La masse réduite μ

vaut $\mu = 1,3 \times 10^{-27} \text{ kg}$, soit $\omega = 5,1 \times 10^{23} \text{ s}^{-1}$. L'énergie du niveau fondamental est donc

$$E = \frac{3}{2}\hbar\omega = 0,5 \text{ GeV}. \text{ Le rapport } \frac{E_0}{2mc_0^2} \text{ vaut environ } 0,17. \text{ Ce rapport est petit devant}$$

1, ce qui permet de faire un traitement non relativiste.

1.6.

(a) On obtient une base de fonctions propres de $\mathcal{E}_1$ en prenant $(n_x, n_y, n_z) = (1, 0, 0)$ ou $(0, 1, 0)$ ou $(0, 0, 1)$ dans l'équation (4), ce qui donne :

$$\Psi_{1,0,0}(\vec{r}) = xe^{-\frac{r^2}{2a^2}} \quad \Psi_{0,1,0}(\vec{r}) = ye^{-\frac{r^2}{2a^2}} \quad \Psi_{0,0,1}(\vec{r}) = ze^{-\frac{r^2}{2a^2}} \quad (5)$$

(b) Ces fonctions peuvent se réécrire :

$$\Psi_{1,0,0}(\vec{r}) \propto re^{-\frac{r^2}{2a^2}} [Y_1^{-1}(\theta, \varphi) - Y_1^1(\theta, \varphi)] \quad , \quad \Psi_{0,1,0}(\vec{r}) \propto ire^{-\frac{r^2}{2a^2}} [Y_1^1(\theta, \varphi) + Y_1^{-1}(\theta, \varphi)]$$

et $\Psi_{0,0,1}(\vec{r}) \propto re^{-\frac{r^2}{2a^2}} Y_1^0(\theta, \varphi)$. Elles sont donc de moment cinétique $l=1$. Tout état de $\mathcal{E}_1$ est combinaison linéaire des trois fonctions (5) et est également de moment cinétique 1.

(c) Inversement les trois fonctions $\Psi_{1,0,0} \pm i\Psi_{0,1,0}$ et $\Psi_{0,0,1}$ sont proportionnelles aux harmoniques sphériques $Y_1^{\pm 1}$ et Y_1^0 . Elles sont donc états propres de $\hat{L}_z$ avec valeurs propres $\pm\hbar$ et 0. Elles sont également états propres de $\hat{H}_0$ et de $\hat{L}^2$, comme on l'a vu à la question précédente.

1.7.

(a) Parmi les six états donnés ci-dessus comme base de $\mathcal{E}_2$, considérons les fonctions d'onde correspondant à $(n_x, n_y, n_z) = (2, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 2)$:

$$\Psi_{2,0,0}(\vec{r}) \propto (2x^2 - a^2)e^{-\frac{r^2}{2a^2}} \quad \Psi_{0,2,0}(\vec{r}) \propto (2y^2 - a^2)e^{-\frac{r^2}{2a^2}} \quad \Psi_{0,0,2}(\vec{r}) \propto (2z^2 - a^2)e^{-\frac{r^2}{2a^2}}$$

La somme de ces trois fonctions donne la fonction $\Phi_2(\vec{r})$, qui est donc un état d'énergie E_2 .

(b) $\Phi_2(\vec{r})$ est à symétrie sphérique et est donc de moment cinétique nul.

1.8. La modélisation de l'interaction $c\bar{c}$ par un potentiel purement harmonique n'est pas satisfaisante. Le troisième et le quatrième niveau, correspondant respectivement à $l=0$ et $l=2$, ne sont pas dégénérés alors qu'ils le seraient dans le cas du potentiel harmonique. Par ailleurs, l'écart entre les deux premiers niveaux (381 MeV) n'est pas égal à l'écart entre les deux niveaux suivants (229 MeV), alors que les niveaux d'énergie d'un oscillateur harmonique sont équidistants.

2. Prise en compte du potentiel $V_1(r) = -\frac{\beta}{r}$

2.1. Le potentiel $V_1(r) = -\frac{\beta}{r}$ est à symétrie sphérique ; il commute avec les trois composantes du moment cinétique. Par conséquent, il commute avec $\hat{L}^2$.

2.2. On multiplie la relation $\hat{V}_1 \hat{L}^2 = \hat{L}^2 \hat{V}_1$ par $\langle n, l, m |$ à gauche et $| n, l', m' \rangle$ à droite. On trouve :

$$\hbar^2 l'(l'+1) \langle n, l, m | \hat{V}_1 | n, l', m' \rangle = \hbar^2 l(l+1) \langle n, l, m | \hat{V}_1 | n, l', m' \rangle$$

Si $l \neq l'$, ceci impose $\langle n, l, m | \hat{V}_1 | n, l', m' \rangle = 0$. De même, on multiplie la relation $\hat{V}_1 \hat{L}_z = \hat{L}_z \hat{V}_1$ par $\langle n, l, m |$ à gauche et $| n, l', m' \rangle$ à droite et on obtient :

$$\hbar m' \langle n, l, m | \hat{V}_1 | n, l', m' \rangle = \hbar m \langle n, l, m | \hat{V}_1 | n, l', m' \rangle$$

qui impose $\langle n, l, m | \hat{V}_1 | n, l', m' \rangle = 0$ si $m \neq m'$.

2.3. $\hat{V}_1$ commute également avec $\hat{L}_\pm$. Multiplions $\hat{V}_1 \hat{L}_+ = \hat{L}_+ \hat{V}_1$ par $\langle n, l, m+1 |$ à gauche et $| n, l, m \rangle$ à droite. On trouve :

$$\hbar \sqrt{l(l+1) - m(m+1)} \langle n, l, m+1 | \hat{V}_1 | n, l, m+1 \rangle = \hbar \sqrt{l(l+1) - m(m+1)} \langle n, l, m | \hat{V}_1 | n, l, m \rangle$$

d'où on déduit que tous les $\langle n, l, m | \hat{V}_1 | n, l, m \rangle$ pour $m = -l, \dots, l$ sont égaux entre eux pour un l donné.

2.4. D'après ce qu'on vient de voir, la restriction de $\hat{V}_1$ est proportionnelle à l'identité dans $\mathcal{E}_1$. Dans $\mathcal{E}_2$, elle est diagonale dans la base $\{| n, l, m \rangle\}$. Plus précisément, elle est proportionnelle à l'identité dans le sous-espace $\mathcal{E}'_2$ de dimension 5 (qui correspond à $l = 2$), le coefficient affecté à $| n = 2, l = m = 0 \rangle$ étant *a priori* différent.

2.5. (a) La théorie des perturbations au premier ordre donne pour les premiers niveaux de $\hat{H}$:

- Niveau fondamental : $\frac{3}{2} \hbar \omega - 30 \beta'$ (avec $l = 0$)
- Premier niveau excité : $\frac{5}{2} \hbar \omega - 20 \beta'$ (avec $l = 1$)
- Deuxième niveau excité : $\frac{7}{2} \hbar \omega - 25 \beta'$ (avec $l = 0$)
- Troisième niveau excité : $\frac{7}{2} \hbar \omega - 16 \beta'$ (avec $l = 2$)

La détermination de $\hbar \omega$ et de β' se fait alors en résolvant le système de trois équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} 381 = \hbar \omega + 10 \beta' \\ 610 = 2 \hbar \omega + 5 \beta' \\ 702 = 2 \hbar \omega + 14 \beta' \end{cases}$$

La résolution des deux premières équations donne $\beta' = 10,1 \text{ MeV}$ et $\hbar \omega = 280 \text{ MeV}$.

(c) On trouve $a = \sqrt{\frac{\hbar}{\mu \omega}} = 4,3 \times 10^{-16} \text{ m}$.

(d) On vérifie la cohérence du modèle en reportant les valeurs trouvées pour $\hbar \omega$ et β' dans la troisième équation. On trouve $701,4 \text{ MeV}$, proche de la valeur attendue (702 MeV).

2.6. Le coefficient β remplace le facteur $\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}$ de l'interaction électromagnétique. La

constante caractérisant les interactions fortes est donc dans le cadre de notre modèle :

$$\alpha_{\text{fort}} = \frac{\beta}{\hbar c_0} = 15 \sqrt{\pi} \frac{a \beta'}{\hbar c_0} = 0,58 !!$$

Les interactions fortes méritent bien leur nom ! Leur constante de couplage est proche de 1, ce qui signifie qu'elles sont beaucoup plus intenses que les interactions électromagnétiques, dont la constante de couplage α vaut $\frac{1}{137}$.

3. La structure hyperfine du niveau fondamental (**BONUS**)

- 3.1.** L'énergie A donnant la valeur du clivage hyperfin du niveau fondamental de l'atome d'hydrogène s'écrit en fonction des paramètres donnés dans l'énoncé :

$$A = \frac{A'}{a_1^3} \text{ avec } A' = \frac{2}{3} \frac{\alpha \hbar^3}{c_0} \frac{g_e g_p}{m_e m_p}$$

- 3.2.** Le rapport entre le clivage de l'atome d'hydrogène ($6 \times 10^{-6} \text{ eV}$) et celui du charmonium (117 MeV) peut se mettre sous la forme :

$$\frac{6 \times 10^{-6}}{117 \times 10^6} = \frac{a^3}{a_1^3} \frac{\alpha}{\alpha_{\text{fort}}} \frac{g_e g_p}{g_e g_e} \frac{m_c m_{\bar{c}}}{m_e m_p}$$

On en déduit $\alpha_{\text{fort}} = 0,9$. L'accord avec la valeur trouvée à la fin de la partie 2 est à peu près satisfaisant compte tenu des approximations faites.

• PROBLEME 2:

MESURE DU RAPPORT GYROMAGNETIQUE DU NEUTRON

1-/ L'expression de l'Hamiltonien $\hat{H}_{spin}(t)$ est :

$$\begin{aligned}\hat{H}_{spin}(t) &= -\hat{\vec{M}} \cdot \vec{B} = -\gamma \hat{\vec{S}} \cdot \vec{B} \\ \hat{H}_{spin}(t) &= -\gamma (\hat{S}_z B_0 + \hat{S}_x B_{1x} + \hat{S}_y B_{1y})\end{aligned}$$

2-/ Dans la base $\{|+_z\rangle, |-_z\rangle\}$ et en utilisant les notations de l'énoncé, la matrice représentative de $\hat{H}_{spin}(t)$ s'écrit :

$$\hat{H}_{spin}(t) = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \omega_0 & \omega_1 e^{-\frac{v|t|}{a}} e^{-i\omega t} \\ \omega_1 e^{-\frac{v|t|}{a}} e^{+i\omega t} & -\omega_0 \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \omega_0 & 0 \\ 0 & -\omega_0 \end{pmatrix}}_{\hat{H}_0} + \underbrace{\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & \omega_1 e^{-\frac{v|t|}{a}} e^{-i\omega t} \\ \omega_1 e^{-\frac{v|t|}{a}} e^{+i\omega t} & 0 \end{pmatrix}}_{\hat{H}_1(t)}$$

3-/ Soit $|\psi(t)\rangle$ le vecteur d'état à l'instant t . Il est solution de l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = (\hat{H}_0 + \hat{H}_1) |\psi(t)\rangle$$

avec $\hat{H}_0 = -\gamma \hat{\vec{S}} \cdot \vec{B}_0$ et $\hat{H}_1 = -\gamma \hat{\vec{S}} \cdot \vec{B}_1(t)$.

Dans la base $\{|+_z\rangle, |-_z\rangle\}$, il a pour expression :

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i\omega_0 t}{2}} A(t) |+_z\rangle + e^{+\frac{i\omega_0 t}{2}} B(t) |-_z\rangle$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}i\hbar \left[\left(-i \frac{\omega_0}{2} A(t) + \dot{A}(t) \right) e^{-\frac{i\omega_0 t}{2}} |+_z\rangle + \left(+i \frac{\omega_0}{2} B(t) + \dot{B}(t) \right) e^{+\frac{i\omega_0 t}{2}} |-_z\rangle \right] \\ = \frac{\hbar\omega_0}{2} A(t) e^{-\frac{i\omega_0 t}{2}} |+_z\rangle - \frac{\hbar\omega_0}{2} B(t) e^{+\frac{i\omega_0 t}{2}} |-_z\rangle + \hat{H}_1(t) |\psi(t)\rangle\end{aligned}$$

Soit, après simplification :

$$i\hbar \dot{A}(t) e^{-\frac{i\omega_0 t}{2}} |+_z\rangle + i\hbar \dot{B}(t) e^{+\frac{i\omega_0 t}{2}} |-_z\rangle = \hat{H}_1 |\psi(t)\rangle$$

Multipliant scalairement cette équation par $\langle +_z |$ et par $\langle -_z |$, on obtient alors le système :

$$\begin{cases} i\hbar \dot{A}(t) = \underbrace{\langle +_z | \hat{H}_1 | +_z \rangle}_{=0} A(t) + e^{i\omega_0 t} \langle +_z | \hat{H}_1 | -_z \rangle B(t) \\ i\hbar \dot{B}(t) = e^{-i\omega_0 t} \langle -_z | \hat{H}_1 | +_z \rangle A(t) + \underbrace{\langle -_z | \hat{H}_1 | -_z \rangle}_{=0} B(t) \end{cases}$$

soit encore :

$$\begin{cases} i\hbar \dot{A}(t) = e^{+i\omega_0 t} \langle +_z | \hat{H}_1 | -_z \rangle B(t) \\ i\hbar \dot{B}(t) = e^{-i\omega_0 t} \langle -_z | \hat{H}_1 | +_z \rangle A(t) \end{cases}$$

Remarque : le système ci-dessus a été obtenu sans approximation.

Le premier ordre des perturbations correspond à $B(t) \simeq B(-\infty) = 1$ et conduit à :

$$A(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t e^{i\omega_0 t'} \langle +_z | \underbrace{\hat{H}_0 + \hat{H}_1(t')}_{\hat{H}_{spin}} | -_z \rangle dt'$$

où l'on a introduit $\langle +_z | \hat{H}_0 | -_z \rangle = 0$

Ce qui montre le résultat cherché.

4-/ Calcul de C_{-+}

Remplaçant $\hat{H}_1$ par son expression, on obtient :

$$C_{-+} = -\frac{i}{\hbar} \frac{\hbar \omega_1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega_0 t} e^{-i\omega t} e^{-\frac{v|t|}{a}} dt = -\frac{i\omega_1}{2} \frac{\frac{2v}{a}}{\left(\frac{v}{a}\right)^2 + (\omega_0 - \omega)^2}$$

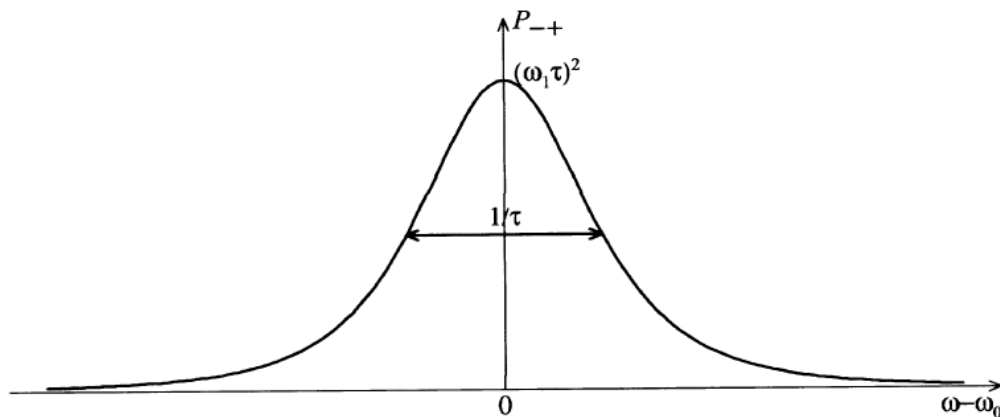
On en déduit la probabilité de transition :

$$P_{-+} = |C_{-+}|^2 = \left(\frac{\omega_1 \tau}{1 + \tau^2 (\omega_0 - \omega)^2} \right)^2$$

avec $\tau = \frac{a}{v}$ qui correspond au temps de passage dans la zone où règne le champ $\vec{B}_1$, et la largeur à mi-hauteur Δ définie par :

$$\left(\frac{\omega_1 \tau}{1 + \tau^2 \left(\frac{\Delta}{2}\right)^2} \right)^2 = \frac{1}{2} (\omega_1 \tau)^2 \Rightarrow \Delta = 2(\sqrt{2} - 1)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\tau} \simeq \frac{1}{\tau}$$

L'allure de la probabilité de transition en fonction de $(\omega - \omega_0)$ est indiquée sur la figure ci-dessous.



5-/ L'Hamiltonien s'écrit maintenant :

$$\hat{H}_{spin}(t) = \hat{H}_0 + \hat{H}_1(t) + \hat{H}'(t)$$

avec $\hat{H}'(t) = -\gamma \hat{S} \cdot \vec{B}'(t)$. L'élément de matrice devient :

$$\langle +_z | \hat{H}_{spin}(t) | -_z \rangle = \frac{\hbar \omega_1}{2} e^{-\frac{v|t|}{a}} e^{-i\omega t} + \frac{\hbar \omega_1}{2} e^{-\frac{v|t-b|}{a}} e^{-i\omega t} = \frac{\hbar \omega_1}{2} e^{-i\omega t} \left(e^{-\frac{v|t|}{a}} + e^{-\frac{v|t-T|}{a}} \right)$$

avec $T = \frac{b}{v}$.

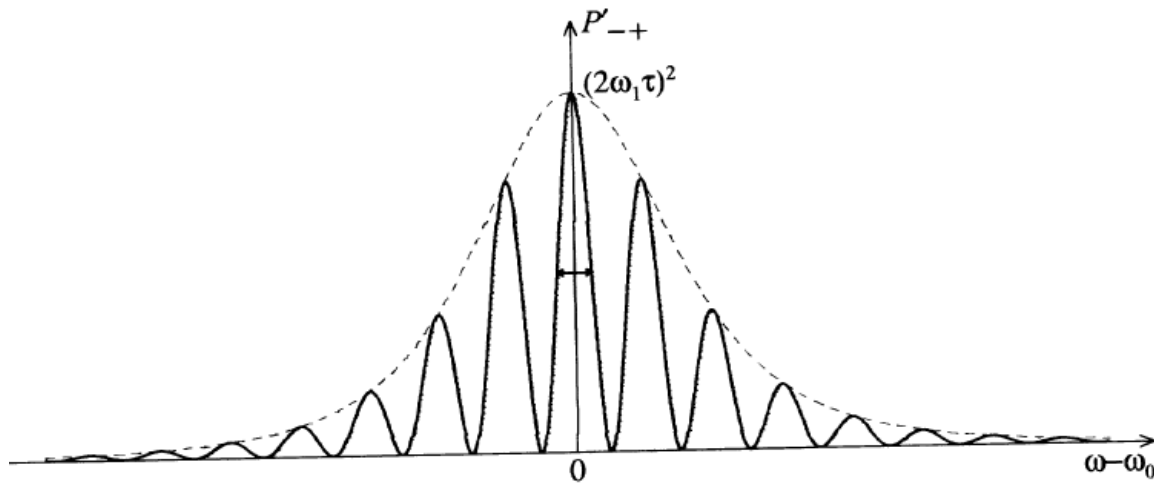
On en déduit la nouvelle expression de l'amplitude de transition :

$$\begin{aligned}
 C'_{-+} &= -\frac{i\omega_1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\omega_0 - \omega)t} \left(e^{-\frac{v|t|}{a}} + e^{-\frac{v|t-T|}{a}} \right) dt \\
 C'_{-+} &= -\frac{i\omega_1}{2} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\omega_0 - \omega)t} e^{-\frac{v|t|}{a}} dt + e^{i(\omega_0 - \omega)T} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\omega_0 - \omega)(t-T)} e^{-\frac{v|t-T|}{a}} dt \right] \\
 C'_{-+} &= -\frac{i\omega_1}{2} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\omega_0 - \omega)t} e^{-\frac{v|t|}{a}} dt}_{C_{-+}} \times (1 + e^{i(\omega_0 - \omega)T}) \\
 C'_{-+} &= C_{-+} (1 + e^{i(\omega_0 - \omega)T})
 \end{aligned}$$

et celle de la probabilité de transition :

$$P'_{-+} = |C'_{-+}|^2 = 4 \cos^2 \left(\frac{(\omega_0 - \omega)b}{2v} \right) P_{-+}$$

L'allure de la probabilité de transition en fonction de $(\omega - \omega_0)$ est représentée sur la figure ci-



dessous.

6-1 La courbe présente un pic beaucoup plus étroit. C'est la courbe standard de diffraction par deux fentes identiques : franges d'interférences modulées par le phénomène de diffraction dû à l'une ou l'autre des zones de champ tournant.

La largeur à mi-hauteur est de l'ordre de $\frac{v}{b} \ll \frac{v}{a}$.

L'ordre de grandeur de la précision sur le facteur gyromagnétique est égal à :

$$\Delta g = \Delta \omega_0 \left(\frac{2m_n}{eB_0} \right) \approx \frac{2m_n v}{eB_0 b}$$

7-1 Application numérique :

$$\Delta g \approx 2 \times 10^{-6} \Rightarrow b \approx 1 \text{ m}$$