ADDITION DE DEUX MOMENTS CINETIQUES

Soient deux moments cinétiques $\hat{\vec{J}}_1$ et $\hat{\vec{J}}_2$ de nombres quantiques respectifs $j_1 = j_2 = 1$. On désigne par C_1 l'espace des états de $\hat{\vec{J}}_1$ et par C_2 celui des états de $\hat{\vec{J}}_2$. On note $|j_1, m_1\rangle$ $\left(\text{resp. } |j_2, m_2\rangle\right)$ les vecteurs propres communs à $\left\{\hat{J}_1^2, \hat{J}_{1z}\right\}$ $\left(\text{resp.}\left\{\hat{J}_2^2, \hat{J}_{2z}\right\}\right)$. On effectue le produit tensoriel $C_{12} = C_1 \otimes C_2$ et on note $|j_1, j_2, m_1, m_2\rangle$ les nouveaux vecteurs de base. On a donc

$$|j_1, j_2, m_1, m_2\rangle = |j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle$$

1-/ Quelles valeurs peuvent prendre m_1 et m_2 ? Quelle est la dimension de C_{12} ? Quelle est l'action des opérateurs $\hat{J}_1^2,\ \hat{J}_{1z},\ \hat{J}_2^2,\ \hat{J}_{2z}$ sur les nouveaux vecteurs de base $|j_1, j_2, m_1, m_2\rangle$?

On introduit le moment cinétique total $\hat{\vec{J}} = \hat{\vec{J}}_1 + \hat{\vec{J}}_2$ et on note $\{|j_1, j_2, J, M\rangle\}$ la base commune à l'ECOC $\left\{\hat{J}_1^2, \hat{J}_2^2, \hat{J}^2, \hat{J}_z\right\}$.

2-/ Quelles sont les valeurs possibles de J ? Quelle est la dimension de la base $\{|j_1, j_2, J, M\rangle\}$

Remarque *:*
j_1 et j_2 *étant fixés (* $j_1 = j_2 = 1$*) on adoptera la notation simplifiée suivante :*

$$|j_1, j_2, J, M\rangle \equiv |J, M\rangle \text{ et } |j_1, j_2, m_1, m_2\rangle \equiv |m_1, m_2\rangle$$

On désigne par P la matrice de passage de la base $|J, M\rangle$ à la base $|m_1, m_2\rangle$. *Les coefficients de cette matrice s'appellent* ***"coefficients de Clebsch-Gordan".***

3-/ A l'aide de la relation $M = m_1 + m_2$, déterminer les coefficients de Clebsch-Gordan non nuls.

4-/ On adopte la convention de phase : $\langle j_1, J - j_1 | J, J\rangle$ réel > 0. Calculer $|J, J\rangle$ en utilisant cette convention de phase.

5-/ En déduire $|J, J-1\rangle$ en utilisant l'action de l'opérateur $\hat{J}^- = \hat{J}_1^- + \hat{J}_2^-$ sur le ket $|J, J\rangle$ $(\in C_{12})$

6-/ Obtenir $|J-1, J-1\rangle$ en utilisant la structure de la matrice de passage P.

7-/ Obtenir les autres vecteurs de proche en proche à l'aide de l'opérateur $\hat{J}^-$.

8-/ Ecrire la matrice de passage P.

9-/ Retrouver directement les résultats obtenus ci-dessus à l'aide d'une table de coefficients de Clebsch-Gordan.

Table de coefficients de Clebsch-Gordan relative à l'addition de deux moments cinétiques 1

$$\left|J, M\right\rangle$$

$$\left\langle m_1, m_2\right|$$

1×1		2								
		+2	2	1						
+1	+1	1	+1	+1						
	+1	0	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	2	1	0			
	0	+1	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$	0	0	0			
			+1	- 1	$\sqrt{\frac{1}{6}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$			
			0	0	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	0	$-\sqrt{\frac{1}{3}}$	2	1	
			- 1	+1	$\sqrt{\frac{1}{6}}$	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	- 1	- 1	
					0	- 1	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	2	
					- 1	0	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$	- 2	
							- 1	- 1	1	

Remarque : La table est à double entrée et permet le passage d'une base de représentation standard à l'autre : $\left\{\left|J, M\right\rangle\right\} \leftrightarrow \left\{\left|m_1, m_2\right\rangle\right\}$

Exemple : $\left\{\left|J, M\right\rangle\right\} \rightarrow \left\{\left|m_1, m_2\right\rangle\right\}$ $\qquad \left|2,1\right\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}}\left\{\left|1,0\right\rangle + \left|0,1\right\rangle\right\}$

$\left\{\left|J, M\right\rangle\right\} \leftarrow \left\{\left|m_1, m_2\right\rangle\right\}$ $\qquad \left|1,0\right\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}}\left\{\left|2,1\right\rangle + \left|1,1\right\rangle\right\}$

Les outils...

Moments cinétiques -

« orbital » noté L *s'il possède un équivalent classique*

« spin » noté S *s'il s'agit d'un moment intrinsèque sans équivalent classique*

1-/ Définition et principales propriétés :

On appelle moment cinétique J *tout ensemble de trois observables* $\hat{J}_x, \hat{J}_y, \hat{J}_z$ *vérifiant les relations de commutation :* $\begin{cases} \left[\hat{J}_x, \hat{J}_y\right] = i\hbar\hat{J}_z \\ \left[\hat{J}_y, \hat{J}_z\right] = i\hbar\hat{J}_x \\ \left[\hat{J}_z, \hat{J}_x\right] = i\hbar\hat{J}_y \end{cases}$ *(qu'on peut résumer par* $\hat{\vec{J}} \wedge \hat{\vec{J}} = i\hbar\hat{\vec{J}}$ *)*

Soit $\hat{J}^2 = \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + \hat{J}_z^2$ l'opérateur carré scalaire du moment cinétique $\hat{\vec{J}}$. Cet opérateur est hermitique (puisque $\hat{J}_x, \hat{J}_y, \hat{J}_z$ le sont). $\hat{J}^2$ commute avec les composantes de $\hat{\vec{J}}$: $\left[\hat{J}^2, \hat{\vec{J}}\right] = 0$

$\Rightarrow \hat{J}^2$ et $\hat{J}_z$ admettent un système de vecteurs propres communs $\{|k, j, m\rangle\}$, les équations aux valeurs propres étant les suivantes : $\begin{cases} \hat{J}^2|k, j, m\rangle = j(j+1)\hbar^2|k, j, m\rangle \\ \hat{J}_z|k, j, m\rangle = m\hbar|k, j, m\rangle \end{cases}$

(l'indice k est nécessaire car dans le cas général, $\hat{J}^2$ et $\hat{J}_z$ ne constituent pas un ECOC)

- Les seules valeurs possibles pour j sont les nombres entiers (moments orbitaux) ou demi-entiers positifs ou nul $\left(0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \ldots\right)$ (spins).
- Pour une valeur fixée de j, les seules valeurs possibles pour m sont les $(2j+1)$ nombres $(-j, -j+1, \ldots, j-1, j)$; m est donc entier si j est entier, demi-entier si j est demi-entier.

Remarques :

1) *Au lieu d'utiliser les composantes* $\hat{J}_x$ et $\hat{J}_y$ *du moment cinétique* $\hat{\vec{J}}$*, il est plus commode d'introduire les combinaisons linéaires* $\hat{J}_\pm = \hat{J}_x \pm i\hat{J}_y$*. On a alors* $\left[\hat{J}^2, \hat{J}_\pm\right] = \left[\hat{J}^2, \hat{J}_z\right] = 0$ *et :*

$\hat{J}_\pm|k, j, m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m\pm1)}\,|k, j, m\pm1\rangle$

2) *En représentation* $\{|r\rangle\}$ *les fonctions propres de* $\hat{J}^2$ et $\hat{J}_z$ *sont les harmoniques sphériques* $Y_l^m(\theta, \varphi)$.

2-/ Composition (ou addition) des moments cinétiques :

2-1/ Définition : $\hat{\vec{J}} = \hat{\vec{J}}_1 + \hat{\vec{J}}_2$ *est défini comme le moment cinétique somme des moments cinétiques partiels* $\hat{\vec{J}}_1$ et $\hat{\vec{J}}_2$.

2-2/ Utilité : On connaît une base de l'espace des états constituée des vecteurs propres communs à $\hat{J}_1^2, \hat{J}_{1z}, \hat{J}_2^2, \hat{J}_{2z}$. Cependant $\hat{\vec{J}}_1$ et $\hat{\vec{J}}_2$ ne sont pas généralement des constantes du mouvement $\left(\left[\hat{H}, \hat{\vec{J}}_1\right] \neq 0, \left[\hat{H}, \hat{\vec{J}}_2\right] \neq 0\right)$ alors que $\hat{J}^2$ et $\hat{J}_z$ le sont $\left(\left[\hat{H}, \hat{J}^2\right] = \left[\hat{H}, \hat{J}_z\right] = 0\right)$.

On cherche donc à construire une nouvelle base formée de vecteurs propres communs à $\hat{J}^2$ et $\hat{J}_z$ à partir de la base précédente.

L'intérêt de cette nouvelle base se comprend aisément. Pour déterminer les états stationnaires du système, c'est-à-dire les états propres de $\hat{H}$, il est plus simple de diagonaliser la matrice représentant $\hat{H}$ dans cette nouvelle base. En effet, comme $\left[\hat{H}, \hat{J}^2\right] = \left[\hat{H}, \hat{J}_z\right] = 0$, cette matrice se décompose en autant de blocs qu'il y a de sous-espaces propres associés aux divers ensembles de valeurs propres de $\hat{J}^2$ et $\hat{J}_z$. Sa structure (diagonale par blocs) est beaucoup plus simple que celle de la matrice représentant $\hat{H}$ dans la base des vecteurs propres communs à $\hat{J}_1^2, \hat{J}_{1z}, \hat{J}_2^2, \hat{J}_{2z}$ puisque ni $\hat{J}_{1z}$ ni $\hat{J}_{2z}$ ne commutent en général avec $\hat{H}$.

3-/ Les deux bases standards possibles :

a) Celle constituée des vecteurs propres communs à $\hat{J}_1^2, \hat{J}_{1z}, \hat{J}_2^2, \hat{J}_{2z}$: notée :

$\left\{\left| j_1, j_2, m_1, m_2 \right\rangle\right\} \equiv \left\{\left| j_1, m_1 \right\rangle \otimes \left| j_2, m_2 \right\rangle\right\} \equiv \left\{\left| m_1, m_2 \right\rangle\right\}$ à j_1 et j_2 fixés

telle que : $\begin{cases} \hat{J}_1^2 \left| m_1, m_2 \right\rangle = j_1 \left(j_1 + 1 \right) \hbar^2 \left| m_1, m_2 \right\rangle \\ \hat{J}_{1z} \left| m_1, m_2 \right\rangle = m_1 \hbar \left| m_1, m_2 \right\rangle \end{cases}$ et $\begin{cases} \hat{J}_2^2 \left| m_1, m_2 \right\rangle = j_2 \left(j_2 + 1 \right) \hbar^2 \left| m_1, m_2 \right\rangle \\ \hat{J}_{2z} \left| m_1, m_2 \right\rangle = m_2 \hbar \left| m_1, m_2 \right\rangle \end{cases}$

b) Celle constituée des vecteurs propres communs à $\hat{J}_1^2, \hat{J}_2^2, \hat{J}^2, \hat{J}_z$ **:** notée :

$\left\{\left| j_1, j_2, j, m \right\rangle\right\} \equiv \left\{\left| j, m \right\rangle\right\}$ à j_1 et j_2 fixés

telle que : $\begin{cases} \hat{J}^2 \left| j, m \right\rangle = j \left(j + 1 \right) \hbar^2 \left| j, m \right\rangle \\ \hat{J}_z \left| j, m \right\rangle = m \hbar \left| j, m \right\rangle \end{cases}$ et $\begin{cases} \hat{J}_1^2 \left| j, m \right\rangle = j_1 \left(j_1 + 1 \right) \hbar^2 \left| j, m \right\rangle \\ \hat{J}_2^2 \left| j, m \right\rangle = j_2 \left(j_2 + 1 \right) \hbar^2 \left| j, m \right\rangle \end{cases}$

Avec : $\left| j_1 - j_2 \right| \leq j \leq j_1 + j_2$ et $-j \leq m \leq j$ par saut d'une unité ($\left(2j+1\right)$ valeurs)

4-/ Passage d'une base à l'autre :

Par « injection » de la relation de fermeture de l'autre base

$$\left| j, m \right\rangle = 1 \left| j, m \right\rangle = \sum_{m_1 = -j_1}^{+j_1} \sum_{m_2 = -j_2}^{+j_2} \left| m_1, m_2 \right\rangle \underbrace{\left\langle m_1, m_2 \middle| j, m \right\rangle}_{\text{coefficients de Clebsch-Gordan}}$$ et réciproquement :

$$\left| m_1, m_2 \right\rangle = 1 \left| m_1, m_2 \right\rangle = \sum_{j = \left| j_1 - j_2 \right|}^{j_1 + j_2} \sum_{m = -j}^{+j} \left| j, m \right\rangle \underbrace{\left\langle j, m \middle| m_1, m_2 \right\rangle}_{\text{coefficients de Clebsch-Gordan}}$$

Corrigé

La base commune (standard) de l'ECOC $\left\{\hat{J}_1^2, \hat{J}_{1z}, \hat{J}_2^2, \hat{J}_{2z}\right\}$ est $\left\{\left|j_1, j_2, m_1, m_2\right\rangle\right\} \equiv \left\{\left|m_1, m_2\right\rangle\right\}$

La base commune (standard) de l'ECOC $\left\{\hat{J}_1^2, \hat{J}_2^2, \hat{J}^2, \hat{J}_z\right\}$ est $\left\{\left|j_1, j_2, J, M\right\rangle\right\} \equiv \left\{\left|\overline{J,M}\right\rangle\right\}$

pour j_1 et j_2 fixés.

On se propose d'exprimer les vecteurs $\left|\overline{J,M}\right\rangle$ en fonction des vecteurs $\left|m_1, m_2\right\rangle$.

Comme pour tout changement de base, on se sert de la relation de fermeture :

$$\left|\overline{J,M}\right\rangle = \hat{1}\left|\overline{J,M}\right\rangle = \sum_{m_1=-j_1}^{+j_1}\sum_{m_2=-j_2}^{+j_2}\left|m_1, m_2\right\rangle\left\langle m_1, m_2\middle|\overline{J,M}\right\rangle$$

$$== \sum_{m_1=-j_1}^{+j_1}\sum_{m_2=-j_2}^{+j_2}\underbrace{\left\langle m_1, m_2\middle|\overline{J,M}\right\rangle}_{coefficient\,de\,Clebsch-Gordan}\left|m_1, m_2\right\rangle$$

Soit sous forme matricielle : $\left(\left|\overline{J,M}\right\rangle\right) = (P)\left(\left|m_1, m_2\right\rangle\right)$ où les coefficients de la matrice de passage sont les coefficients de Clebsch-Gordan.

1-/ On sait que : m_1 prend toutes les valeurs (par sauts d'une unité) comprises entre $-j_1$ et $+j_1$ (soit $2j_1+1$ valeurs). de même m_2 prend toutes les valeurs (par sauts d'une unité) comprises entre $-j_2$ et $+j_2$ (soit $2j_2+1$ valeurs).

L'espace vectoriel sous-tendu par la base $\left\{\left|m_1, m_2\right\rangle\right\}$ a donc pour dimension $(2j_1+1)(2j_2+1)$.

On additionne ici deux moments égaux à 1 $(j_1 = j_2 = 1)$, par conséquent la dimension de C_{12} sera égale à $(2\times1+1)(2\times1+1) = 9$. La matrice P sera une matrice (9×9).

Rappel :

$$\hat{J}_1^2\left|m_1, m_2\right\rangle = j_1(j_1+1)\hbar^2\left|m_1, m_2\right\rangle \qquad \hat{J}_{1z}\left|m_1, m_2\right\rangle = m_1\hbar\left|m_1, m_2\right\rangle$$

$$\hat{J}_2^2\left|m_1, m_2\right\rangle = j_2(j_2+1)\hbar^2\left|m_1, m_2\right\rangle \qquad \hat{J}_{2z}\left|m_1, m_2\right\rangle = m_2\hbar\left|m_1, m_2\right\rangle$$

2-/ J varie depuis $\left|j_1 - j_2\right|$ jusqu'à $j_1 + j_2$ par saut d'une unité.

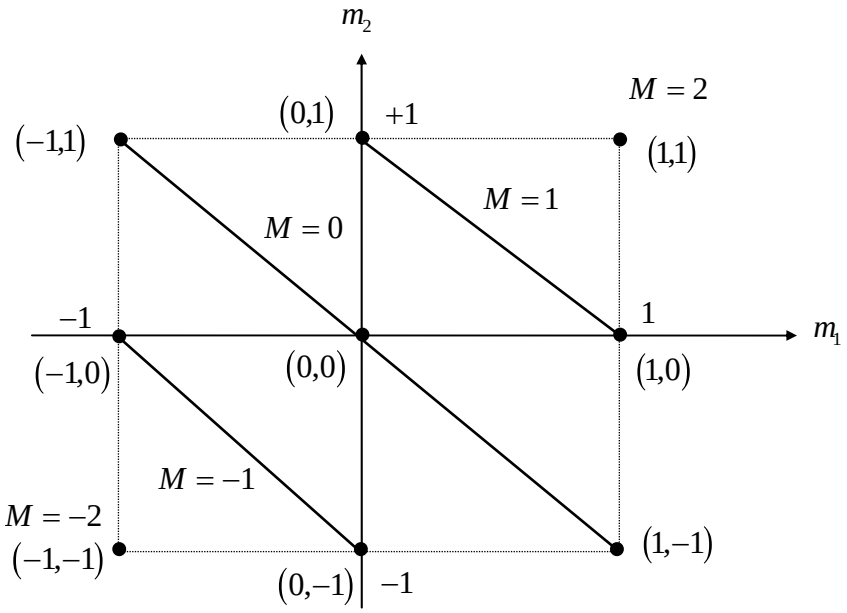
Donc ici puisque : $j_1 = j_2 = 1 \rightarrow J = 0,1,2$.

D'autre part : M prend $(2J+1)$ valeurs comprises entre $-J$ et $+J$ $\quad(-J \le M \le +J)$

On aura donc les jeux suivants de nombres quantiques :

$$J = 0 \rightarrow M = 0 \qquad J = 1 \rightarrow M = \begin{cases} -1 \\ 0 \\ +1 \end{cases} \qquad J = 2 \rightarrow M = \begin{cases} -2 \\ -1 \\ 0 \\ +1 \\ +2 \end{cases}$$

3-/ Dégénérescence des sous-espaces vectoriels $E(M)$: $M = m_1 + m_2$
C'est le nombre de façons de réaliser une valeur de M à partir de m_1 et m_2.



Le schéma ci-dessus montre qu'on aura les dégénérescences suivantes pour les différentes valeurs de M: $\begin{cases} M = 2 \rightarrow g(2) = 1 \\ M = 1 \rightarrow g(1) = 2 \\ M = 0 \rightarrow g(0) = 3 \\ M = -1 \rightarrow g(-1) = 2 \\ M = -2 \rightarrow g(-2) = 1 \end{cases}$

La matrice de passage P se composera donc de deux blocs (1×1), deux blocs (2×2) et d'un blocs (3×3).

Classons par exemple les vecteurs $\left|\overline{J,M}\right\rangle$ suivant l'ordre décroissant des valeurs possibles de M.

$\boxed{M = 2}$ (dégénérescence 1)

$M = 2 \Rightarrow J = 2$, le vecteur $\left|\overline{J,M}\right\rangle = \left|\overline{2,2}\right\rangle$ ne peut être obtenu qu'à partir du vecteur $|m_1, m_2\rangle = |1,1\rangle$. Notons cette correspondance : $\left|\overline{2,2}\right\rangle \leftrightarrow |1,1\rangle$

$\boxed{M = 1}$ (dégénérescence 2)

$M=1 \Rightarrow J=\begin{cases}1\\2\end{cases}$ donc deux vecteurs $\left|\overline{J,M}\right\rangle$ possibles $\begin{cases}\overline{|1,1\rangle}\\ \overline{|2,1\rangle}\end{cases}$ qui d'après le schéma précédent ne peuvent être construits qu'à partir des vecteurs $|m_1,m_2\rangle=\begin{cases}|1,0\rangle\\|0,1\rangle\end{cases}$

$\boxed{M=0}$ (dégénérescence 3)

$M=0 \Rightarrow J=\begin{cases}0\\1\\2\end{cases}$ donc trois vecteurs $\left|\overline{J,M}\right\rangle$ possibles $\begin{cases}\overline{|0,0\rangle}\\ \overline{|1,0\rangle}\\ \overline{|2,0\rangle}\end{cases}$ qui d'après le schéma précédent ne peuvent être construits qu'à partir des vecteurs $|m_1,m_2\rangle=\begin{cases}|0,0\rangle\\|1,-1\rangle\\|-1,1\rangle\end{cases}$

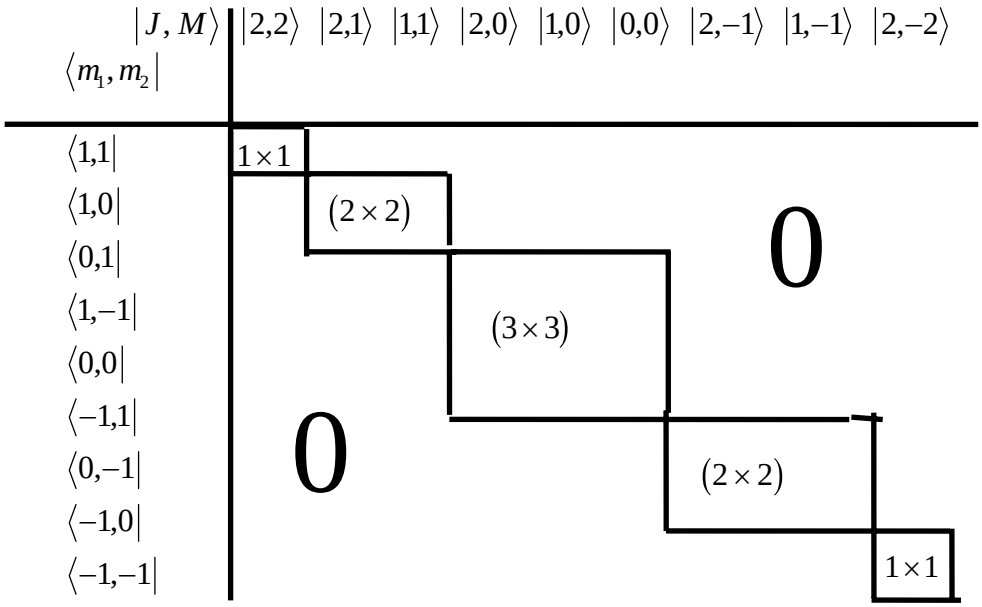
$\boxed{M=-1}$ (dégénérescence 2)

$M=-1 \Rightarrow J=\begin{cases}1\\2\end{cases}$ donc deux vecteurs $\left|\overline{J,M}\right\rangle$ possibles $\begin{cases}\overline{|1,-1\rangle}\\ \overline{|2,-1\rangle}\end{cases}$ qui d'après le schéma précédent ne peuvent être construits qu'à partir des vecteurs $|m_1,m_2\rangle=\begin{cases}|-1,0\rangle\\|0,-1\rangle\end{cases}$

$\boxed{M=-2}$ (dégénérescence 1)

$M=-2 \Rightarrow J=2$, le vecteur $\left|\overline{J,M}\right\rangle=\left|\overline{2,-2}\right\rangle$ ne peut être obtenu qu'à partir du vecteur $|m_1,m_2\rangle=|-1,-1\rangle$. Notons cette correspondance : $\left|\overline{2,-2}\right\rangle \leftrightarrow |-1,-1\rangle$

La matrice de passage P va donc avoir la structure suivante :



4-/ Détermination des vecteurs $\left|\overline{J,M}\right\rangle$

* $\boxed{\left|\overline{2,2}\right\rangle}$

$\underbrace{\left|\overline{2,2}\right\rangle}_{\left|\overline{J,M}\right\rangle} = \alpha \underbrace{|1,1\rangle}_{|m_1,m_2\rangle}$ (1) . Ces deux vecteurs sont normés, par hypothèse, donc :

$$(1) \Rightarrow \left\| \left|\overline{2,2}\right\rangle \right\|^2 = |\alpha|^2 \left\| |1,1\rangle \right\|^2 \Rightarrow \alpha = e^{i\varphi}$$

Prenons comme convention de phase : $\left\langle j_1, J - j_1 \middle| \overline{J,J} \right\rangle$ réel > 0 (2).

Pour $j_1 = 1$ et $J = 2$ $(2) \Rightarrow \left\langle 1,1 \middle| \overline{2,2} \right\rangle$ réel > 0 $\Rightarrow \varphi = 0$

Finalement : $\boxed{\left|\overline{2,2}\right\rangle = |1,1\rangle}$

5-/

* $\boxed{\left|\overline{2,1}\right\rangle}$

On utilise l'opérateur $\hat{J}^-$: $\hat{J}^- \left|\overline{J,M}\right\rangle = \hbar\sqrt{J(J+1) - M(M-1)}\left|\overline{J,M-1}\right\rangle$

Soit ici :

$$\hat{J}_- \overline{|2,2\rangle} = \hbar\sqrt{2(2+1)-2(2-1)}\ \overline{|2,1\rangle} = 2\hbar\ \overline{|2,1\rangle} \quad (3)$$

$$\hat{J}^- \overline{|2,2\rangle} = \left(\hat{j}_{1-} + \hat{j}_{2-}\right)|1,1\rangle = \hbar\left\{\sqrt{j_1(j_1+1)-m_1(m_1-1)}\,|0,1\rangle + \sqrt{j_2(j_2+1)-m_2(m_2-1)}\,|1,0\rangle\right\}$$

$$\hat{J}_- \overline{|2,2\rangle} = \hbar\left\{\sqrt{1(1+1)-1(1-1)}\,|0,1\rangle + \sqrt{1(1+1)-1(1-1)}\,|1,0\rangle\right\} = \hbar\sqrt{2}\left\{|0,1\rangle + |1,0\rangle\right\} \quad (4)$$

$$(3) \text{ et } (4) \Rightarrow \overline{|2,1\rangle} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{|0,1\rangle + |1,0\rangle\right\}$$

6-/ D'après (3) : $\overline{|1,1\rangle} = \alpha|0,1\rangle + \beta|1,0\rangle$

Pour $J=1$, la convention de phase précédente donne : $\left\langle 1,0 \middle| \overline{1,1} \right\rangle$ réel $> 0 \Rightarrow \beta$ réel > 0.

D'autre part la condition d'orthonormalité

$$\left.\begin{array}{l} \left\langle \overline{J',M} \middle| \overline{J,M} \right\rangle = \delta_{J,J'} \Rightarrow \left\langle \overline{2,1} \middle| \overline{1,1} \right\rangle = 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha+\beta) = 0 \\ \left\| \overline{|1,1\rangle} \right\|^2 = 1 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \beta = -\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

d'où en définitive : $\overline{|1,1\rangle} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{|1,0\rangle - |0,1\rangle\right\}$

7-/ Puis de proche en proche :

$$\hat{J}_- \overline{|2,1\rangle} = \hbar\sqrt{2(2+1)-1(1-1)}\ \overline{|2,0\rangle} = \hbar\sqrt{6}\ \overline{|2,0\rangle} \quad (5)$$

$$\hat{J}_- \overline{|2,1\rangle} = \left(\hat{J}_{1-} + \hat{J}_{2-}\right)\left\{\sqrt{\frac{1}{2}}\left(|1,0\rangle + |0,1\rangle\right)\right\}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}}\left\{\begin{array}{l} \hbar\sqrt{1(1+1)-1(1-1)}\,|0,0\rangle + \hbar\sqrt{1(1+1)-0(0-1)}\,|-1,1\rangle\cdots \\ \cdots + \hbar\sqrt{1(1+1)-0(0-1)}\,|1,-1\rangle + \hbar\sqrt{1(1+1)-1(1-1)}\,|0,0\rangle \end{array}\right\}$$

$$= \hbar\left\{|1,-1\rangle + 2|0,0\rangle + |-1,1\rangle\right\} \quad (6)$$

$$(5) \text{ et } (6) \Rightarrow \overline{|2,0\rangle} = \sqrt{\frac{1}{6}}|1,-1\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|0,0\rangle + \sqrt{\frac{1}{6}}|-1,1\rangle$$

$$\hat{J}_- \overline{|1,1\rangle} = \hbar\sqrt{2}\ \overline{|1,0\rangle} \quad (7)$$

$$\hat{J}_- \overline{|1,1\rangle} = \left(\hat{J}_{1-} + \hat{J}_{2-}\right)\left\{\sqrt{\frac{1}{2}}\left(|1,0\rangle - |0,1\rangle\right)\right\} = \hbar\sqrt{\frac{1}{2}}\left\{\sqrt{2}|0,0\rangle - \sqrt{2}|-1,1\rangle + \sqrt{2}|1,-1\rangle - \sqrt{2}|0,0\rangle\right\}$$

$$\hat{J}_- \overline{|1,1\rangle} = \hbar\left\{|1,-1\rangle - |-1,1\rangle\right\} \quad (8)$$

(7) et $(8) \Rightarrow$ $\boxed{\overline{|1,0\rangle} = \sqrt{\frac{1}{2}}\left(|1,-1\rangle - |-1,1\rangle\right)}$

$$\boxed{\overline{|0,0\rangle} = \alpha|1,-1\rangle + \beta|0,0\rangle + \gamma|1,-1\rangle}$$

La convention de phase $\left\langle j_1, J - j_1 \middle| \overline{J,J} \right\rangle$ réel $> 0 \Rightarrow$ pour $J = 0$: $\left\langle 1,-1 \middle| \overline{0,0} \right\rangle$ réel $> 0 \Rightarrow$ γ réel > 0

D'autre part, les conditions d'orthonormalisation dans le sous-espace $\{M = 0\}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left\| \overline{|0,0\rangle} \right\|^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \\ \left\langle \overline{0,0} \middle| \overline{2,0} \right\rangle = \alpha + 2\beta + \gamma = 0 \\ \left\langle \overline{0,0} \middle| \overline{1,0} \right\rangle = \alpha - \gamma = 0 \end{cases} \quad \text{d'où :} \begin{cases} \alpha = \sqrt{\frac{1}{3}} \\ \beta = -\sqrt{\frac{1}{3}} \\ \gamma = \sqrt{\frac{1}{3}} \end{cases} \quad \text{soit :}$$

$$\boxed{\overline{|0,0\rangle} = \sqrt{\frac{1}{3}}|1,-1\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}|0,0\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|-1,1\rangle}$$

Puis dans ce même sous-espace :

$$\hat{J}_- \overline{|2,0\rangle} = \hbar\sqrt{6}\,\overline{|2,-1\rangle} \qquad (9)$$

$$\hat{J}_- \overline{|2,0\rangle} = \left(\hat{J}_{1-} + \hat{J}_{2-}\right)\left\{\sqrt{\frac{1}{6}}|1,-1\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|0,0\rangle + \sqrt{\frac{1}{6}}|-1,1\rangle\right\}$$

$$\hat{J}_- \overline{|2,0\rangle} = \frac{\hbar}{\sqrt{6}}\left\{\sqrt{2}|0,-1\rangle + 2\sqrt{2}|0,-1\rangle + 2\sqrt{2}|-1,0\rangle + \sqrt{2}|0,-1\rangle\right\} \qquad (10)$$

(9) et (10) $\Rightarrow$ $\boxed{\overline{|2,-1\rangle} = \sqrt{\frac{1}{2}}\left(|0,-1\rangle + |-1,0\rangle\right)}$

$$\hat{J}_- \overline{|1,0\rangle} = \hbar\sqrt{2}\,\overline{|1,-1\rangle} \qquad (11)$$

$$\hat{J}_- \overline{|1,0\rangle} = \left(\hat{J}_{1-} + \hat{J}_{2-}\right)\left\{\sqrt{\frac{1}{2}}\left(|1,-1\rangle - |-1,1\rangle\right)\right\} = \hbar\left(|0,-1\rangle - |-1,0\rangle\right) \qquad (12)$$

(11) *et* $(12) \Rightarrow$ $\boxed{\overline{|1,-1\rangle} = \sqrt{\frac{1}{2}}\left(|0,-1\rangle - |-1,0\rangle\right)}$

Et enfin :

$$\hat{J}_- \overline{|2,-1\rangle} = 2\hbar\,\overline{|2,-2\rangle} = \left(\hat{J}_{1-} + \hat{J}_{2-}\right)\left\{\sqrt{\frac{1}{2}}\left(|0,-1\rangle + |-1,0\rangle\right)\right\}$$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{|2,-2\rangle} = |-1,-1\rangle}$$

8-/ La matrice de passage P s'écrit :

$$
(P) = \begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccc} |2,2\rangle & |2,1\rangle & |1,1\rangle & |2,0\rangle & |1,0\rangle & |0,0\rangle & |2,-1\rangle & |1,-1\rangle & |2,-2\rangle \end{array} \\
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Bien sûr, en pratique, on utilise toujours une table de coefficients de Clebsch-Gordan lorsqu'on effectue un changement de base en passant d'une représentation standard à l'autre !