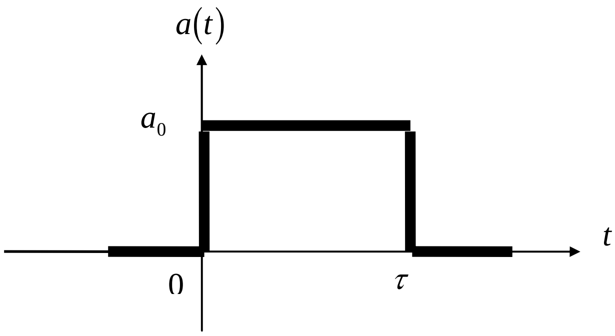
PROBLEMES NON STATIONNAIRES
INTERACTION SCALAIRE DE DEUX SPINS

On considère deux spins $\frac{1}{2}$, $\hat{\vec{S}}_1$ et $\hat{\vec{S}}_2$, couplés par une interaction scalaire de la forme $a(t)\,\hat{\vec{S}}_1 \cdot \hat{\vec{S}}_2$; $a(t)$ est une fonction du temps représentée ci-dessous :



(Il s'agit, par exemple, d'un modèle simple de collision entre deux spins $\frac{1}{2}$ où les degrés de liberté externes sont traités classiquement et « quantiquement» les degrés de liberté de spin. La constante de couplage a est alors une fonction rapidement décroissante de la distance r qui sépare les deux particules. Comme r varie au cours du temps, il en est de même de a. Le maximum de $a(t)$ correspond à l'instant où la distance entre les deux particules est minimale. Pour simplifier les raisonnements on remplace la courbe réelle par le "créneau " représenté ci-dessus)

1-/

A $t=-\infty$, le système est dans l'état $|+,-\rangle$ (état propre de $\hat{S}_{1z}$ et $\hat{S}_{2z}$ avec les valeurs propres $+\frac{\hbar}{2}$ et $-\frac{\hbar}{2}$).

Calculer **sans approximation :**

a) l'état du système à $t=+\infty$.
(On se rappellera que multiplier un vecteur d'état par un facteur de phase global est sans importance physique)
b) la probabilité $P_{(|+,-\rangle \to |-,+\rangle)}$ de trouver à $t=+\infty$, le système dans l'état $|-,+\rangle$.

2-/

Calculer $P_{(|+,-\rangle \to |-,+\rangle)}$ **en utilisant la théorie des perturbations dépendant du temps au premier ordre.**
Discuter les conditions de validité d'une telle approximation en comparant les résultats obtenus à ceux de la question précédente.

Table de coefficients de CLEBSCH-GORDAN $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$

Notation	S S ... M M ...
m_1 m_2 m_1 m_2	coefficient sans √

Note : la racine carrée s'applique à chaque coefficient dans ces tables.

Par exemple $-\frac{1}{2}$ doit être lu $-\sqrt{\frac{1}{2}}$.

On démontre la propriété suivante pour ces coefficients :

$$\left\langle S_1, m_1, S_2, m_2 \middle| S, M, S_1, S_2 \right\rangle = (-1)^{S-S_1-S_2} \left\langle S_2, m_2, S_1, m_1 \middle| S, M, S_2, S_1 \right\rangle$$

$\mathbf{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}$		1			
		+1	1	0	
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	0	
	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1
			$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1

Corrigé

1-/

On sait que l'évolution d'un système quantique se calcule dans la base des états propres du Hamiltonien de ce système.

Soit $\hat{\vec{S}} = \hat{\vec{S}}_1 + \hat{\vec{S}}_2 \quad (1)$ le spin total.

En l'absence de couplage, le Hamiltonien $\hat{\mathrm{H}}_0$ du système des deux spins est diagonal aussi bien dans la base $\{|\varepsilon_1, \varepsilon_2\rangle\}$(avec $\varepsilon_1 = \pm, \varepsilon_2 = \pm$) des états propres de $\hat{S}_{1z}$ et $\hat{S}_{2z}$ que dans la base $\{|S, M_S\rangle\}$(avec $S = 0$ ou $1, -S \leq M_S \leq S$) des états propres de $\hat{S}^2$ et $\hat{S}_z$.

Les différents vecteurs $|\varepsilon_1, \varepsilon_2\rangle$ ou $|S, M_S\rangle$ sont vecteurs propres de $\hat{H}_0$ avec la même valeur propre qu'on prendra comme zéro des énergies.

Lorsqu'on tient compte du couplage $\hat{W}(t) = a(t)\hat{\vec{S}}_1 \cdot \hat{\vec{S}}_2$, le Hamiltonien total $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{W}(t)$ n'est plus diagonal dans la base $\{|\varepsilon_1, \varepsilon_2\rangle\}$ mais le reste dans la base $\{|S, M_S\rangle\}$.

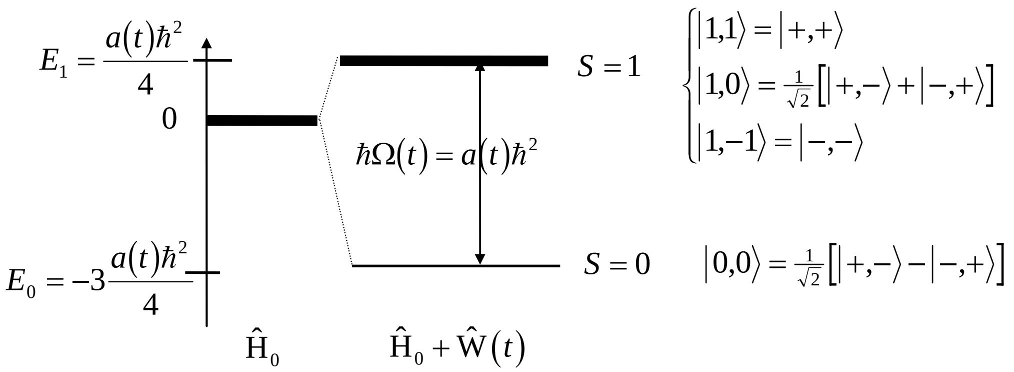
En effet : $(1) \Rightarrow \hat{S}^2 = \hat{S}_1^2 + \hat{S}_2^2 + 2\hat{\vec{S}}_1 \cdot \hat{\vec{S}}_2$, ce qui permet d'écrire :

$$\hat{W}(t) = a(t)\hat{\vec{S}}_1 \cdot \hat{\vec{S}}_2 = \frac{a(t)}{2}\left[\hat{S}^2 - \hat{S}_1^2 - \hat{S}_2^2\right] = \frac{a(t)}{2}\left[\hat{S}^2 - \frac{3}{2}\hbar^2\right]$$

(Tous les vecteurs de l'espace des états sont vecteurs propres de $\hat{S}_1^2$ et $\hat{S}_2^2$ avec la valeur propre $3\dfrac{\hbar^2}{4}$).

On peut donc écrire : $\left(\hat{H}_0 + \hat{W}(t)\right)|S, M_S\rangle = \dfrac{a(t)\hbar^2}{2}\left[S(S+1) - \dfrac{3}{2}\right]|S, M_S\rangle \quad (2)$

D'où le diagramme des niveaux d'énergie :



où $\Omega(t)$ est la fréquence de Bohr du système des deux spins.

Comme $\hat{\mathrm{W}}(t) = 0$ pour $t < 0$, on a :

$$\left|\Psi(0)\right\rangle = \left|\Psi(-\infty)\right\rangle = \left|+,-\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left|1,0\right\rangle + \left|00\right\rangle\right]$$

$$\left|\Psi(\tau)\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left|1,0\right\rangle e^{-\frac{i}{\hbar}E_1\tau} + \left|00\right\rangle e^{-\frac{i}{\hbar}E_0\tau}\right] \quad (3)$$

Soit en multipliant (3) par le facteur de phase global $e^{\frac{i}{\hbar}(E_0+E_1)\frac{\tau}{2}}$ sans importance physique et en revenant à la base $\left\{\left|\varepsilon_1, \varepsilon_2\right\rangle\right\}$, on obtient :

$$\left|\Psi(\tau)\right\rangle = \cos\frac{\Omega(\tau)\tau}{2}\left|+,-\right\rangle - i\sin\frac{\Omega(\tau)\tau}{2}\left|-,+\right\rangle \quad (4)$$

Enfin comme $\hat{\mathrm{W}}(t) = 0$ pour $t > \tau$ on a : $\left|\Psi(+\infty)\right\rangle = \left|\Psi(\tau)\right\rangle \quad (5)$

la probabilité $P_{(|+,-\rangle\to|-,+\rangle)}$ de trouver à $t = +\infty$, le système dans l'état $\left|-,+\right\rangle$ est égale à :

$$\boxed{P_{(|+,-\rangle\to|-,+\rangle)}(+\infty) = \left|\left\langle -,+\middle|\Psi(+\infty)\right\rangle\right|^2 = \sin^2\frac{\Omega(\tau)\tau}{2} = \sin^2\frac{a_0\hbar\tau}{2} \quad (6)}$$

2-*I*

En utilisant la théorie des perturbations dépendant du temps au premier ordre :

$$P_{(|+,-\rangle\to|-,+\rangle)}(+\infty) = \frac{1}{\hbar^2}\left|\int_0^\tau e^{i\omega_{|+,-\rangle\to|-,+\rangle}t}\left\langle -,+\middle|\hat{W}\middle|+,-\right\rangle dt\right|^2 \quad (7) \quad (\hat{W}(t) = 0 \text{ pour } t > \tau\ )$$

Or $\omega_{\left|+,-\right\rangle \to \left|-,+\right\rangle} = 0$ (les deux états ont même énergie) donc :

$$P_{(|+,-\rangle\to|-,+\rangle)}(+\infty) = \frac{1}{\hbar^2}\left|\int_0^\tau \left\langle -,+\middle|\hat{W}\middle|+,-\right\rangle dt\right|^2 \quad (8)$$

$$\hat{W}\left|+,-\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{W}\left(\left|1,0\right\rangle + \left|0,0\right\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\frac{a_0\hbar^2}{4}\left|1,0\right\rangle - 3\frac{a_0\hbar^2}{4}\left|0,0\right\rangle\right\}$$

$$\hat{W}\left|+,-\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\frac{a_0\hbar^2}{4}\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left|+,-\right\rangle + \left|-,+\right\rangle\right] - 3\frac{a_0\hbar^2}{4}\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left|+,-\right\rangle - \left|-,+\right\rangle\right]\right\}$$

$$\hat{W}\left|+,-\right\rangle = \frac{1}{2}\left\{-\frac{a_0\hbar^2}{2}\left|+,-\right\rangle + a_0\hbar^2\left|-,+\right\rangle\right\} \Rightarrow \left\langle -,+\middle|\hat{W}\middle|+,-\right\rangle = \frac{a_0\hbar^2}{2}$$

$$\boxed{P_{(|+,-\rangle\to|-,+\rangle)}(+\infty) = \frac{1}{\hbar^2}\left|\int_0^\tau \frac{a_0\hbar^2}{2}dt\right|^2 = \frac{a_0^2\hbar^2\tau^2}{4} \quad (9)}$$

On retrouve, comme on pouvait s'y attendre, le résultat classique obtenu à la résonance pour une perturbation constante :

$$P_{if}(t;\omega_{fi} = 0) = \frac{\left|W_{fi}\right|^2}{\hbar^2}t^2$$