

EFFET PURCELL

INTERACTION AVEC UN CONTINUUM « STRUCTURE » : DE L'EMISSION SPONTANEE A L'OSCILLATION DE RABI

*La désexcitation d'un atome par **émission spontanée** n'est pas un processus physique immuable. Comme le prévoit l'électrodynamique quantique en cavité, on la modifie en plaçant l'émetteur dans une cavité délimitée par des miroirs fortement réfléchissant et dont les dimensions sont de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde de la lumière émise.*

L'électrodynamique quantique en cavité, qui s'est beaucoup développée en physique atomique, est apparue ces dernières années dans le domaine des semi-conducteurs.

Des puits quantiques placés entre deux miroirs présentent de fortes analogies avec le système modèle constitué d'un atome unique dans une cavité supraconductrice.

L'émission spontanée est un phénomène essentiel dans le fonctionnement des composants optoélectroniques, tels que les diodes électroluminescentes ou les lasers à semi-conducteur, utilisés pour la transmission des signaux de télécommunications ou pour la lecture des mémoires optiques et des disques compacts. L'émission spontanée restitue sous forme d'émission lumineuse l'énergie stockée dans le composant et son déclenchement est dû à la nature quantique de la lumière. Comme cette émission est omnidirectionnelle, une très faible partie seulement de l'émission spontanée du composant optoélectronique va vers des directions « utiles » (typiquement de l'ordre de 10^{-5}). L'émission spontanée « inutile » constitue donc une perte d'énergie qui conditionne en partie le seuil du laser, introduit un retard au déclenchement de l'émission stimulée et produit des fluctuations aléatoires de la phase et de l'amplitude de son émission.

En 1946, E.M. Purcell indiquait que la dynamique de l'émission spontanée de lumière d'un atome est considérablement modifiée lorsque ce système est introduit dans une micro cavité optique (« *Spontaneous Emission Probabilities and Radiofrequencies* » *Phys. Rev.* **69**, 681 (1946)). Une telle micro cavité est une enceinte, fermée par des miroirs, dont les dimensions sont comparables à la longueur d'onde optique : les modes du champ électromagnétique, avec lesquels l'atome est couplé à l'intérieur de l'enceinte, sont alors discrets. Ces 15 dernières années, l'étude systématique de l'émission de lumière par un atome unique placé dans une cavité monomode a démontré des modifications de l'émission spontanée et donné naissance à un nouveau domaine de la physique, **l'électrodynamique quantique en cavité (EQC)**.

Depuis 4 ans par ailleurs, l'EQC fait son apparition dans le domaine des semi-conducteurs. En introduisant un semi-conducteur dans une cavité optique de type Fabry-Pérot de très petites dimensions, on peut modifier par exemple la dynamique ou la directivité de son émission de lumière. Cela pourrait être mis en œuvre pour améliorer les performances des composants optoélectroniques et atteindre ainsi des régimes de fonctionnement inaccessibles aux composants classiques.

Couplage fort ou faible entre la matière et le rayonnement

Considérons un système quantique dont les niveaux d'énergie sont discrets. Lorsque ce système est en interaction avec un deuxième système, deux situations très différentes se présentent selon que les états du second système forment un continuum ou sont discrets. Dans le premier cas, si le système est excité initialement dans un état discret, l'énergie se dissipe

vers le continuum suivant une loi exponentielle au cours du temps. Cette situation correspond à un « couplage faible » entre l'état discret et le continuum. Dans le deuxième cas, nous avons un couplage entre deux états discrets et l'interaction **mélange** les états des deux systèmes. On est en régime de couplage fort et les nouveaux états propres sont des états mixtes, séparés en énergie par une quantité $\hbar\Omega$ égale à deux fois l'énergie d'interaction. Les états mixtes peuvent également être décrits comme résultant d'une oscillation périodique à la fréquence Ω entre les états des deux systèmes qui les composent (**oscillation de Rabi**).

En l'absence de perturbation extérieure, ces oscillations ne sont pas amorties et la durée de vie des états mixtes est infinie. Cependant, les systèmes physiques considérés sont en interaction avec leur environnement, ce qui donne une certaine largeur (un amortissement) aux niveaux atomiques. *Le concept des états mixtes n'est pertinent que si la période des oscillations est plus courte que la durée moyenne d'amortissement des deux états (cf. encadré I).*

Encadré 1

Couplage fort en physique atomique et en physique des semi-conducteurs (ordres de grandeurs)

Un niveau électronique discret $|e\rangle$, en résonance avec un mode de photon discret $|c\rangle$, est couplé par l'interaction dipolaire électrique $\hat{H}_{\text{int}} = \hat{\vec{d}} \cdot \vec{E}_0$ où $\hat{\vec{d}}$ est le dipôle de la transition vers $|e\rangle$ et \vec{E}_0 est le champ électrique à l'endroit où se trouve le dipôle. L'interaction lève la dégénérescence entre les deux états et les nouveaux états propres sont des états mixtes, superposition en phase et en opposition de phase des états $|e\rangle$ et $|c\rangle$ et séparés par le dédoublement de Rabi $\hbar\Omega = 2\vec{d} \cdot \vec{E}_0$ comme l'indique la figure 1.

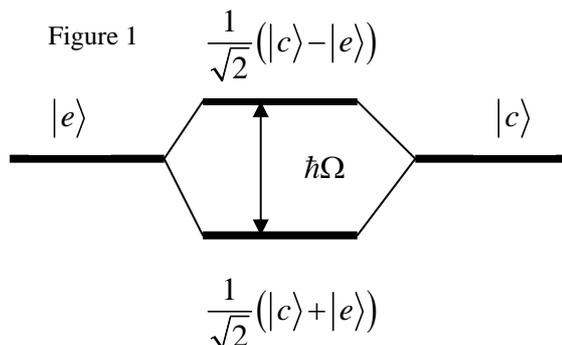


Schéma de la levée de dégénérescence de deux états $|e\rangle$ et $|c\rangle$ couplés

Chacun des deux états mixtes peut être considéré comme résultant d'une oscillation du système entre $|c\rangle$ et $|e\rangle$ à la fréquence Ω . Ce couplage fort entre $|c\rangle$ et $|e\rangle$ ne peut s'établir que si les temps d'amortissement des deux systèmes ainsi que le temps d'interaction entre le dipôle et le champ sont beaucoup plus longs que la période caractéristique des oscillations $T = \frac{2\pi}{\Omega}$. Cette condition sur les constantes de temps revient, dans le domaine spectral, à imposer que les largeurs de la transition et du mode optique soient plus petites que $\hbar\Omega$.

PHYSIQUE ATOMIQUE

On utilise, par exemple, des atomes de rubidium dans des états excités de grand nombre quantique principal (états de Rydberg). Le dédoublement de Rabi est alors de l'ordre de 10^{-7} meV, ce qui correspond à une période d'oscillation $T = 60\mu\text{s}$. Le temps de vie radiatif de ces niveaux excités est de l'ordre de 10 à 100 ms. Le temps d'interaction, lié au temps mis par les atomes pour traverser la cavité, est de l'ordre de la milliseconde. Par ailleurs, avec des cavités supraconductrices à base de niobium (LKB), on obtient des facteurs de qualité très élevés (de l'ordre de $10^9 - 10^{10}$), ce qui correspond à un temps d'amortissement du mode (échappement du photon hors de la cavité) de l'ordre de 10–100 ms. Ainsi toutes les constantes de temps d'amortissement et d'interaction sont bien plus longues que la période d'oscillation et un régime de couplage fort est possible.

PHYSIQUE DES SEMICONDUCTEURS

Dans les semi-conducteurs, les ordres de grandeur sont très différents. Les dédoublements de Rabi obtenus sont de l'ordre de 10 meV, c'est-à-dire 8 ordres de grandeur supérieurs au dédoublement obtenu en physique atomique. On en déduit $T = 0,4$ ps. Le temps de vie radiatif des excitons est de l'ordre de 10 à 20 ps et dans une cavité de type hétéro structure le temps d'échappement des photons hors de la cavité est de l'ordre de 1 ps. Par ailleurs, à basse température, le temps d'interaction avec les phonons acoustiques (amortissement de l'oscillateur exciton) est aussi de l'ordre de 10 ps.

Ainsi tous ces temps caractéristiques sont plus longs que T et le couplage fort peut s'établir.

Le premier système correspond aux états électroniques d'un atome, d'une molécule ou d'un solide, alors que le second système représente les modes du champ électromagnétique (vecteur d'onde + états de polarisation) dans un volume V . L'interaction entre les deux systèmes est due au couplage dipolaire électrique. Si le volume V est grand, il existe un quasi continuum de modes du champ électromagnétique en résonance avec les états excités du système électronique. Dans une telle situation de couplage faible, lorsque le système électronique se trouve dans un état excité, son énergie se dissipe vers ce continuum par émission spontanée d'un photon dont l'énergie $\hbar\omega$ correspond à l'énergie de l'excitation électronique. Réciproquement, le système électronique dans son état fondamental peut absorber un photon d'énergie $\hbar\omega$ pour passer dans son état excité.

Lorsque le système électronique consiste en un atome unique, qui comporte donc des niveaux électroniques discrets, un couplage fort est obtenu si les modes du champ électromagnétique sont également discrets. Cela est réalisé si l'on place l'atome au centre d'une micro cavité monomode, c'est-à-dire d'un petit volume V refermé par deux miroirs sphériques confocaux de haute réflectivité. La taille de la micro cavité est de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde utilisée, en pratique dans le domaine centimétrique ou millimétrique. Les expériences impliquant des atomes en régime d'EQC font l'objet depuis le début des années 80 d'un travail intense (*S. Haroche et J. M. Raymond : « Electrodynamique quantique en cavité », Pour la Science 188, 40 (1993)*).

Ce concept de couplage faible ou fort entre les états de la matière et du rayonnement se transpose au cas des semi conducteurs. Les niveaux électroniques d'un cristal sont regroupés en bandes d'énergie. La bande de valence est remplie d'électrons alors que la bande de conduction est généralement vide. Ces deux bandes sont séparées par un intervalle d'énergie dans lequel n'existe aucun état électronique (la bande interdite). Lorsqu'un photon est absorbé, un électron peut passer de la bande de valence à la bande de conduction, formant

ainsi une paire de quasi particules, un électron dans la bande de conduction et un trou (c'est-à-dire une absence d'électron) dans la bande de valence. Les états de cette paire se caractérisent par deux types de degrés de liberté : le mouvement relatif de l'électron et du trou et le mouvement du centre de masse de la paire. En ce qui concerne le mouvement relatif, l'électron et le trou, qui ont des charges opposées, s'attirent mutuellement par interaction coulombienne. Il existe ainsi des états liés de l'électron et du trou que l'on appelle « **excitons** », dont les énergies discrètes sont inférieures à celles du continuum d'états non liés. En particulier dans l'arséniure de gallium (GaAs), le premier état excité du cristal se trouve lié à environ 5 meV en dessous du continuum. En ce qui concerne le mouvement du centre de masse, l'invariance par translation du système conduit à définir le vecteur d'onde du centre de masse qui décrit un quasi continuum de valeurs. Comme le champ électromagnétique est aussi invariant par translation, le couplage radiatif conserve le vecteur d'onde. Chaque mode optique se couple à un seul état excitonique, celui qui a le même vecteur d'onde et la même énergie, pour former une nouvelle quasi-particule, le « **polariton** ». Ainsi, l'interaction entre les deux continums d'états (liés au vecteur d'onde du centre de masse de l'exciton et à celui du photon) se ramène au couplage fort : un exciton pour un photon.

Les polaritons des semi-conducteurs massifs ont été abondamment étudiés dans les années 70. En l'absence de couplage avec l'extérieur, leur durée de vie est en principe infinie. Toutefois, ils sont diffusés par les vibrations mécaniques du cristal, les impuretés ou les surfaces de l'échantillon, si bien qu'il est assez difficile de les observer.

Manifestations du couplage fort dans les puits quantiques à semi conducteur

Durant les 20 dernières années, parallèlement à la physique des semi conducteurs massifs, s'est développée la physique des hétéro structures à base de semi conducteurs. On sait maintenant fabriquer, par exemple par épitaxie par jets moléculaires, des empilements de couches minces de deux semi-conducteurs de bandes interdites différentes. Les électrons et les trous sont alors confinés dans les couches de plus faible bande interdite. Dans un tel « puits quantique », le mouvement des porteurs le long de l'axe de croissance (perpendiculaire aux couches) est confiné, alors que dans le plan des couches, il reste libre et est décrit par un vecteur d'onde bidimensionnel.

Du point de vue de la symétrie, le confinement brise l'invariance par translation du matériau selon l'axe de croissance alors que le champ électromagnétique lui, reste tridimensionnel. Par conséquent, un exciton de vecteur d'onde $k_{//}$ dans le plan des couches peut se coupler avec tout photon de même vecteur d'onde $k_{//}$ dans le plan mais de vecteur d'onde k_z quelconque selon l'axe de croissance. Chaque état d'exciton est donc en couplage faible avec un continuum de modes électromagnétiques. L'obtention d'un régime de couplage fort avec des puits quantiques nécessite de discrétiser **aussi** les modes du champ électromagnétique dans la direction de croissance. Pour ce faire, il faut insérer les puits quantiques entre deux miroirs plans qui définissent une cavité Fabry-Pérot.

Pratiquement, on fabrique une micro cavité plane à base de semi conducteurs GaAs/AlAs directement par épitaxie par jets moléculaires (MBE). On réalise des miroirs interférentiels de haute réflectivité en déposant un empilement alterné de couches d'indices différents et d'épaisseur optique $\frac{\lambda}{4}$ (miroirs de Bragg). Ainsi une micro cavité est constituée d'un premier miroir de Bragg, d'une couche d'épaisseur optique multiple de $\frac{\lambda}{2}$ destinée à

être le cœur de la cavité et qui contient un ou plusieurs puits quantiques et enfin d'un deuxième miroir de Bragg (cf. Figure 2a).

Les propriétés optiques de ces structures peuvent être appréhendées dans des expériences de photoluminescence où un laser d'énergie supérieure à la bande interdite du matériau excite des paires électron-trou. Les porteurs ainsi créés perdent leur surplus d'énergie cinétique par interaction rapide avec le réseau cristallin pour former une population thermalisée, puis se recombinent par émission spontanée d'un photon. On mesure alors l'intensité lumineuse émise par la structure en fonction de l'énergie.

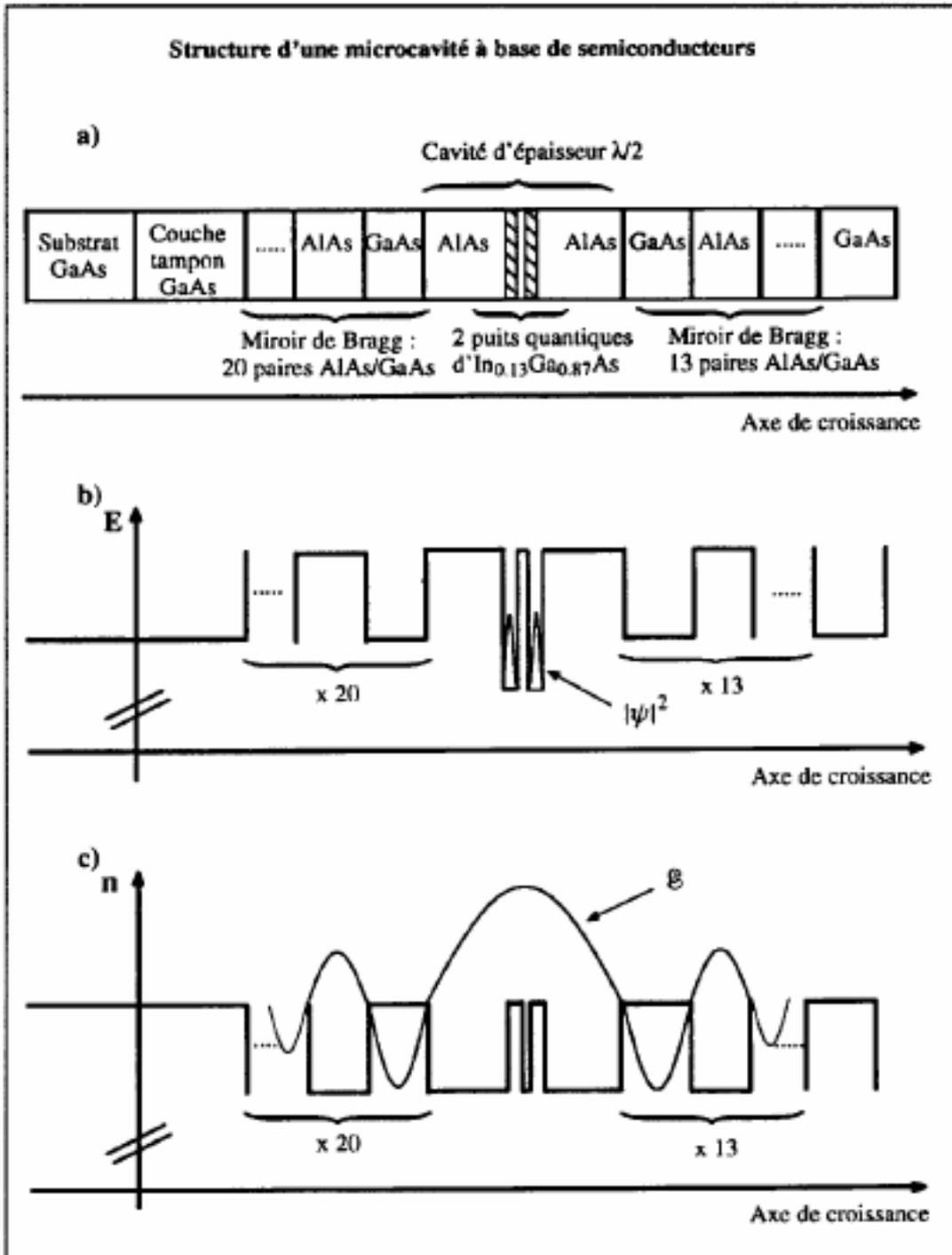


Figure 2 : a) Schéma des différentes couches qui forment la structure. b) Energie E du niveau fondamental de la bande de conduction dans les différentes couches. La fonction

d'onde ψ des électrons est confinée dans les puits quantiques. C) Variation de l'indice de réfraction n dans les différentes couches. Pour le mode résonnant, le champ électromagnétique est confiné dans la cavité et oscille à l'intérieur d'une enveloppe exponentiellement décroissante dans chacun des deux miroirs de Bragg. On a représenté schématiquement l'enveloppe du champ électrique \mathcal{E} .

EXERCICE DE COMPREHENSION

Lorsqu'un « émetteur à deux niveaux » $|e\rangle$ et $|g\rangle$ est couplé à un continuum de modes, le niveau supérieur $|e\rangle$ est instable. Dans ce problème, on étudie d'abord (partie A) les caractéristiques générales de la décroissance d'un état discret en fonction de la structure du continuum auquel il est couplé. On montre ensuite dans la partie B qu'il est possible d'augmenter le taux d'émission spontanée en plaçant l'émetteur dans une cavité résonnante dont les miroirs sont semi-transparentes (effet Purcell). Dans la partie C, on étudie une réalisation expérimentale de la transition vers le régime de « couplage fort », qui se produit quand l'interaction cohérente « émetteur – mode résonnant » est dominante.

Les premiers effets de couplage fort entre un émetteur et un mode d'une cavité résonnante ont été observés sur des atomes de Rydberg traversant une cavité supraconductrice par S. Haroche et son groupe au LKB (voir par exemple : Phys.Rev.Lett. 76, 1800-1803 (1996)).

A. Transition couplage faible – couplage fort

On considère un système d'Hamiltonien \hat{H}_0 initialement dans l'état propre $|i\rangle$, d'énergie $\hbar\omega_i$. Cet état est couplé par l'Hamiltonien \hat{V} à un ensemble d'états finals $\{|f\rangle\}$. Chaque état $|f\rangle$ est état propre de \hat{H}_0 avec l'énergie $\hbar\omega_f$. Le vecteur d'état du système à l'instant t , en représentation d'interaction, s'écrit :

$$|\psi(t)\rangle = c_i(t)e^{-i\omega_i t}|i\rangle + \sum_f c_f(t)e^{-i\omega_f t}|f\rangle \quad (1)$$

1. Donner l'équation intégrodifférentielle satisfaite par $c_i(t)$. On suppose que les états finals ne sont pas couplés entre eux ($\langle f|\hat{V}|f'\rangle = 0$).

2. On suppose que la distribution d'états finals est un continuum infiniment large d'états d'énergie équidistants séparés de ε .

(a) Le couplage de $|i\rangle$ avec les états $|f\rangle$ est supposé constant et est noté $v_{fi} = \langle f|\hat{V}|i\rangle$.

i. Montrer que la probabilité de trouver le système dans l'état $|i\rangle$ décroît exponentiellement et exprimer le taux de décroissance Γ en fonction des paramètres du problème. (On rappelle que : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} d\omega = 2\pi\delta(t)$).

ii. Préciser la densité de modes du continuum et retrouver la règle d'or de Fermi.

(b) On considère maintenant le cas d'un continuum structuré tel que le couplage vaut :

$$\langle f|\hat{V}|i\rangle = \frac{v}{1 + i\frac{E_f - E_i}{\hbar\Delta}} \quad (\Delta > 0) \quad (2)$$

i. Qu'elle est l'équation intégrodifférentielle vérifiée par $c_i(t)$? On donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega t}}{1 + \left(\frac{\omega}{\Delta}\right)^2} d\omega = \pi\Delta e^{-\Delta|t|}$$

- ii. Dériver l'équation obtenue et montrer que l'évolution de c_i est maintenant régie par l'équation différentielle linéaire :

$$\ddot{c}_i + \Delta\dot{c}_i + \frac{\Delta\Gamma}{2}c_i = 0 \quad (3)$$

- iii. Résoudre l'équation (3). Discuter la forme des solutions obtenues selon que
- $2\Gamma < \Delta$ (couplage faible) ;
 - $2\Gamma > \Delta$ (couplage fort).

iv. Qu'obtient-on dans la limite $\Gamma \gg \Delta$?

3. Montrer sans calcul que le modèle de la question 2b s'applique également au cas d'un couplage constant ($\langle f | \hat{V} | i \rangle = v$) avec un continuum dont la densité de modes s'écrit :

$$\rho(E_f) = \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{1 + \left(\frac{E_f - E_i}{\hbar\Delta}\right)^2} \quad (4)$$

Pour quel domaine du paramètre $\frac{\Gamma}{\Delta}$ retrouve-t-on le régime prédit par la règle d'or de Fermi ?

B. Emission spontanée dans l'espace libre ou en cavité.

On considère dans cette partie un système à deux niveaux $|e\rangle$ et $|g\rangle$ appelé *émetteur*. La pulsation de la transition $e \leftrightarrow g$ est notée ω_0 . Initialement préparé dans l'état excité $|e\rangle$, cet émetteur est placé dans un environnement électromagnétique caractérisé par une densité d'états $\rho(\omega)$. Le champ électromagnétique est supposé initialement dans son état fondamental, vide de photons. L'état initial du système « émetteur + champ » est donc $|i\rangle = |e\rangle \otimes |0\rangle$.

Le couplage entre l'émetteur et un mode du champ de pulsation ω , caractérisé par les opérateurs de création et d'annihilation \hat{a}^\dagger et \hat{a} , est donné par l'Hamiltonien *dipolaire-électrique*

$$\hat{V} = \hbar\kappa(\hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_- + \hat{a} \hat{\sigma}_+) \quad ; \quad \begin{cases} \hat{\sigma}_+ = |e\rangle\langle g| \\ \hat{\sigma}_- = |g\rangle\langle e| \end{cases} \quad (5)$$

et le facteur de couplage $\hbar\kappa$ s'écrit

$$\hbar\kappa = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V}} d \quad (6)$$

V est le volume du mode considéré et d est le dipôle de la transition.

N.B. Pour simplifier, on néglige les effets liés au caractère vectoriel du champ et ceux liés à l'inhomogénéité du mode. Par ailleurs, on suppose dans toute cette partie B que la condition de validité de la règle d'or de Fermi (question A.3) est satisfaite.

1. L'émetteur est placé dans l'espace libre. Calculer le taux d'émission spontanée Γ_{libre} de l'émetteur. On rappelle la densité d'états pour le champ dans ce cas :

$$\rho(E) = \frac{E^2 V}{2\pi^2 \hbar^3 c^3}.$$

N.B. : La prise en compte du caractère vectoriel du champ et du dipôle multiplie ce résultat par un facteur $\frac{2}{3}$.

2. L'effet Purcell - Sources lumineuses à un photon

On plonge à présent l'émetteur dans une cavité dont la pulsation de résonance ω est égale à la pulsation ω_0 de l'émetteur. Les miroirs de la cavité ne sont pas parfaitement réfléchissants. Chaque mode de la cavité est donc lui-même couplé à un « réservoir » \mathfrak{R} , constitué par les modes extérieurs à la cavité. On ne cherchera pas à décrire en détail ce couplage et on rendra simplement compte de son effet en attribuant une largeur finie $\Delta\omega$ à chaque mode de la cavité.

Pour le mode résonnant avec l'émetteur, on introduit le facteur de qualité de la cavité $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$, où $\Delta\omega$ est la largeur à mi-hauteur de la courbe de résonance.

(a). En se limitant au mode de pulsation ω_0 résonnant avec l'émetteur, donner la densité de modes du champ $\rho_{cav}(E)$, sachant qu'il s'agit d'une Lorentzienne normée.

(b) En déduire le taux d'émission spontanée Γ_{cav} de l'émetteur dans la cavité.

(c) Montrer que l'on peut ainsi augmenter l'émission spontanée de l'émetteur. On caractérisera ce gain en fonction du *facteur de Purcell* $F_p = \frac{\Gamma_{cav}}{\Gamma_{libre}}$ (7).

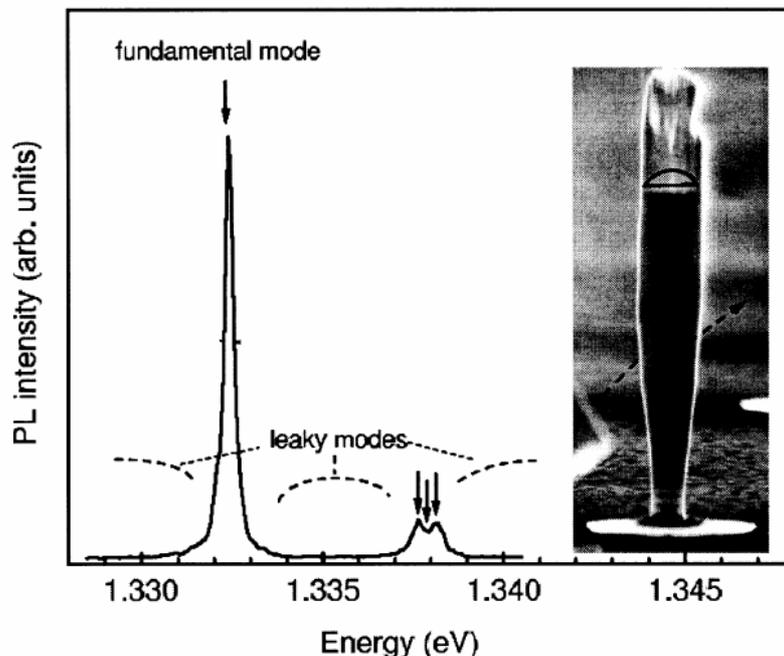


FIG.1 – Courbe de résonance d'un micropilier de diamètre $3\mu\text{m}$, obtenu par J-M. Gérard & al. (*Physica E* 9, 131-139 (2001)). Ce micropilier est formé d'un empilement de semi-conducteurs formant des miroirs de Bragg. L'émetteur est situé au centre de ce micropilier.

(c) Quelles sont les applications possibles de cet effet ? Comment peut-on faire varier expérimentalement le facteur de Purcell ?

3. Des expériences menées entre 1999 et 2001 ont montré l'effet Purcell d'un ensemble de boîtes quantiques dans une microcavité de type micropilier. Une photographie du micropilier ainsi que la courbe de résonance de son mode fondamental sont présentées sur la figure 1.

(a) Estimer le facteur de qualité de la cavité.

(b) Le volume du mode est de l'ordre de $V = 10\lambda^3$. En déduire le facteur de Purcell attendu.

C. Transition vers le couplage fort

Comme dans les questions B2 et B3, l'émetteur de pulsation ω_0 est placé dans une cavité électromagnétique dont un mode de pulsation ω est résonnant ($\delta = \omega - \omega_0 \ll \omega_0$). On s'intéresse désormais au cas où le facteur de qualité de la cavité est très grand et on souhaite explorer des régimes non décrits par la règle d'or de Fermi.

On note $|e, n\rangle$ (resp. $|g, n\rangle$) l'état représentant l'émetteur dans l'état e (resp. g) en présence de n photons dans le mode considéré.

1. On suppose d'abord que les miroirs de la cavité sont parfaitement réfléchissants ($Q = \infty$)

(a) Pour $\kappa = 0$, donner l'expression des énergies du système « atome – mode du champ » en fonction de ω et ω_0 .

(b) On prend maintenant $0 < \kappa \ll \omega_0$. Déterminer et tracer la position des niveaux d'énergie issus du sous-espace $\{|e, 0\rangle, |g, 1\rangle\}$ en fonction de δ .

(c) On se place strictement à la résonance ($\delta = 0$) et on prépare le système dans l'état $|i\rangle = |e, 0\rangle$. Déterminer la probabilité de trouver le système dans ce même état à l'instant t

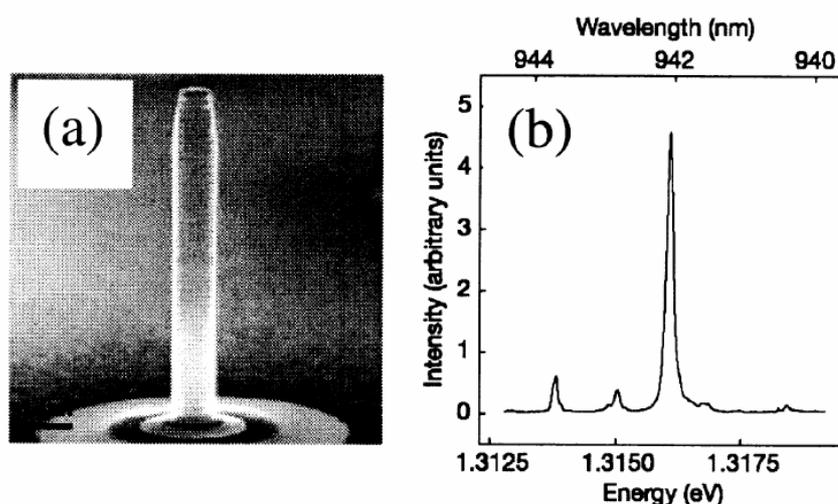
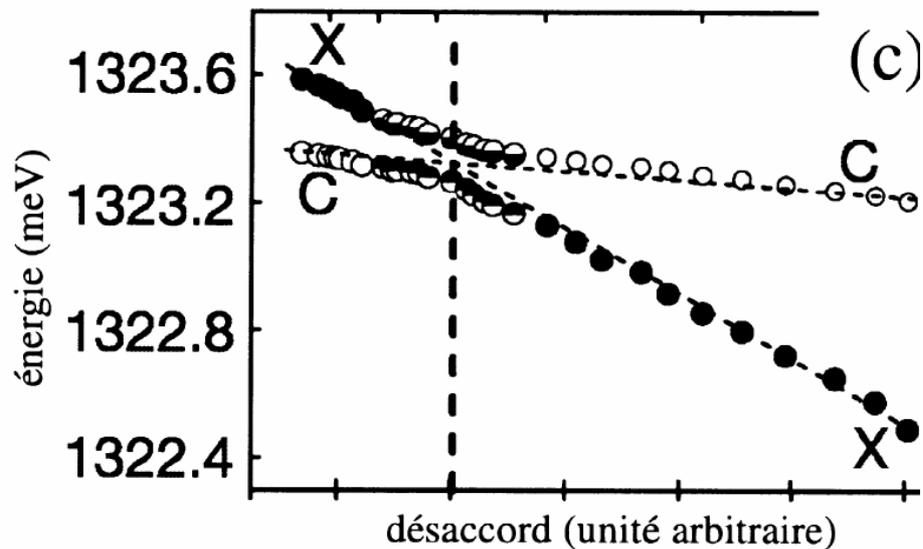


FIG.2 – Micropilier d diamètre $0,8\mu\text{m}$ (a) et sa courbe de résonance (b). L'émetteur est un point quantique situé au centre de ce pilier. (c) Positions des niveaux d'énergie du

ystème « émetteur + mode résonnant » issus du sous-espace $\{|e,0\rangle, |g,1\rangle\}$, déterminées par photoluminescence. (données extraites de J.P. Reithmaier & al., *Nature* **432**, 197 (2004).



2-/ On considère maintenant une cavité réelle, avec un facteur Q grand mais fini. On se place à la résonance ($\delta = 0$).

- (a) Relier les paramètres phénoménologiques ν, ε, Γ et Δ intervenant dans le modèle des questions **A.2** et **A.3** avec les paramètres physiques κ et $\Delta\omega$.
- (b) Exprimer la condition de couplage fort ($2\Gamma > \Delta$) de la partie **A** en fonction de κ et $\Delta\omega$.
- (c) Relier le comportement prédit en **A** dans le cas $\Gamma \gg \Delta$ avec celui trouvé dans la question **C.1.c** ci-dessus.

3-/ Le régime de couplage fort a été observé très récemment pour une boîte quantique dans un micropilier (figure 2a). La figure 2b représente la courbe de résonance de la cavité et la figure 2c la variation en fonction de δ des niveaux d'énergie issus du sous-espace $\{|e,0\rangle, |g,1\rangle\}$.

- (a) Estimer la largeur $\hbar\Delta\omega$ (en meV) et en déduire le facteur de qualité de la cavité.
- (b) Estimer le facteur de couplage $\hbar\kappa$ (en meV).
- (c) En déduire que le régime de couplage fort a été atteint et estimer le nombre d'oscillations de Rabi observables.



E.M.Purcell : « Spontaneous emission probabilities at radio frequencies » *Phys.Rev.***69**, 681 (1946)

Corrigé

A. Transition couplage faible – couplage fort

1- / L'équation de Schrödinger s'écrit : $i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = (\hat{H}_0 + \hat{V}) |\psi(t)\rangle$ (1)

avec $|\psi(t)\rangle = c_i(t) e^{-i\omega_i t} |i\rangle + \sum_f c_f(t) e^{-i\omega_f t} |f\rangle$ (2), développé sur la base des états propres de

\hat{H}_0 , ($\hat{H}_0 |i\rangle = \hbar\omega_i |i\rangle$, $\hat{H}_0 |f\rangle = \hbar\omega_f |f\rangle$). En projetant l'équation (1) sur $|i\rangle$ et $|f\rangle$, on obtient le système d'équations différentielles ($\langle f | \hat{V} | f \rangle = 0$) :

$$\begin{cases} i\hbar \frac{d}{dt} (c_i(t) e^{-i\omega_i t}) = \hbar\omega_i (c_i(t) e^{-i\omega_i t}) + \sum_f \langle i | \hat{V} | f \rangle (c_f(t) e^{-i\omega_f t}) \\ i\hbar \frac{d}{dt} (c_f(t) e^{-i\omega_f t}) = \hbar\omega_f (c_f(t) e^{-i\omega_f t}) + \langle f | \hat{V} | i \rangle (c_i(t) e^{-i\omega_i t}) \end{cases} \quad (3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} i\dot{c}_i(t) = \frac{1}{\hbar} \sum_f v_{if} c_f(t) e^{i\omega_{if} t} \\ i\dot{c}_f(t) = \frac{1}{\hbar} v_{fi} c_i(t) e^{-i\omega_{if} t} \end{cases} \quad (4)$$

Le système étant initialement dans l'état $|i\rangle$, $c_i(0) = 1$; $c_f(0) = 0$. Par conséquent (4) \Rightarrow

$$c_f(t) = -\frac{iv_{fi}}{\hbar} \int_0^t c_i(t') e^{-i\omega_{if} t'} dt'$$

d'où :

$$\dot{c}_i(t) = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t c_i(t') \left(\sum_f e^{i\omega_{if} t} e^{-i\omega_{if} t'} |v_{fi}|^2 \right) dt' \quad (5)$$

Posons $\tau = t - t'$, il vient :

$$\dot{c}_i(t) + \int_0^t c_i(t-\tau) \mathbb{N}(\tau) d\tau = 0 \quad \text{où} \quad \mathbb{N}(\tau) = \frac{1}{\hbar^2} \sum_f e^{i\omega_{if} \tau} |v_{if}|^2 \quad (6)$$

2- /

(a) – Couplage constant $\Leftrightarrow |v_{if}|^2 = v^2$. $\mathbb{N}(\tau) = \frac{v^2}{\hbar^2} \sum_f e^{i\omega_{if} \tau}$. On transforme la somme discrète en intégrale. Les niveaux du continuum étant équidistants de ε , le nombre d'états correspondant à un intervalle de pulsation $d\omega$ est égal à $d\mathbb{N}(\omega) = \frac{\hbar d\omega}{\varepsilon} = \frac{d\omega}{\varepsilon/\hbar}$.

$$(6) \Rightarrow \mathbb{N}(\tau) = \frac{v^2}{\hbar^2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\mathbb{N}(\omega) e^{i\omega\tau} = \frac{v^2}{\hbar^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{\varepsilon/\hbar} e^{i\omega\tau} = \frac{v^2}{\hbar\varepsilon} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\tau} d\omega}_{2\pi\delta(\tau)}$$

$$\mathbb{N}(\tau) = \frac{v^2}{\hbar\varepsilon} 2\pi\delta(\tau) \quad (7)$$

$$\dot{c}_i(t) + \int_0^t c_i(t-\tau) \mathbb{N}(\tau) d\tau = \dot{c}_i(t) + \frac{2\pi}{\hbar} v^2 \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t c_i(t-\tau) \delta(\tau) d\tau$$

Or $\delta(\tau)$ est une « fonction » paire donc :

$$\int_0^t c_i(t-\tau) \delta(\tau) d\tau = \frac{1}{2} \int_{-t}^t c_i(t-\tau) \delta(\tau) d\tau = \frac{c_i(t)}{2}$$

(i) – En définitive $c_i(t)$ vérifie l'équation différentielle :

$$\dot{c}_i(t) + \frac{\Gamma}{2} c_i(t) = 0 \quad \text{avec } \Gamma = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{N}(\tau) d\tau = \frac{2\pi}{\hbar} v^2 \frac{1}{\varepsilon} \quad (8)$$

$$(8) \left. \begin{array}{l} \\ c_i(0) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow c_i(t) = e^{-\frac{\Gamma t}{2}}$$

La probabilité de trouver le système dans l'état $|i\rangle$ décroît de façon exponentielle avec le temps :

$$\boxed{P_{|i\rangle}(t) = |c_i(t)|^2 = e^{-\Gamma t} \quad (9)}$$

En d'autres termes, (9) exprime qu'un système préparé dans l'état $|i\rangle$ a une *durée de vie* égale à Γ^{-1} .

(ii) – Soit $P_{|i\rangle \rightarrow |f\rangle}(t)$ la probabilité de transition de l'état initial $|i\rangle$ vers un état $|f\rangle$ du continuum (états discrets tous les deux). On a alors $P_{|i\rangle}(t) = 1 - \sum_{f=-\infty}^{+\infty} P_{|i\rangle \rightarrow |f\rangle}(t)$ où $P_{|i\rangle \rightarrow |f\rangle}(t)$ est donnée par la règle d'or de Fermi (**aux temps courts**) :

$$P_{|i\rangle \rightarrow |f\rangle}(t) = \frac{2\pi t}{\hbar} |v_{if}|^2 \delta(E_f = E_i) \quad (10)$$

La densité de modes du continuum est constante et égale à $\rho(E) = \frac{1}{\varepsilon} (\forall E)$

$$P_{|i\rangle}(t) = 1 - \sum_{f=-\infty}^{+\infty} P_{|i\rangle \rightarrow |f\rangle}(t) = 1 - \frac{2\pi t}{\hbar} v^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(E) \delta(E) dE = 1 - \frac{2\pi t v^2}{\hbar\varepsilon}$$

On peut alors définir une *probabilité de départ par unité de temps* Γ

$$\Gamma = \frac{1 - P_{|i\rangle}(t)}{t} = \frac{2\pi}{\hbar} v^2 \frac{1}{\varepsilon}$$

On a ainsi mis en évidence la signification physique de Γ car en se plaçant **aux temps courts** (9) $\Rightarrow P_{|i\rangle}(t) = 1 - \Gamma t + O(t^2)$ en développant l'exponentielle.

(b) –

$$v_{fi} = \langle f | \hat{V} | i \rangle = \frac{v}{1 + i \frac{E_f - E_i}{\hbar \Delta}} \quad (\Delta > 0) \Rightarrow |v_{fi}|^2 = \frac{v^2}{1 + \frac{(E_f - E_i)^2}{\hbar^2 \Delta^2}} \quad (12)$$

(i) - $\mathbb{N}(\tau) = \frac{1}{\hbar^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{\varepsilon / \hbar} e^{i\omega\tau} \frac{v^2}{1 + \frac{\omega^2}{\Delta^2}} = \frac{v^2}{\hbar \varepsilon} \pi \Delta e^{-\Delta|\tau|} = \frac{\Gamma}{2} \Delta e^{-\Delta|\tau|}$

L'équation intégrodifférentielle vérifiée par $c_i(t)$ est alors :

$$\dot{c}_i(t) + \frac{\Gamma}{2} \Delta \int_0^t c_i(t-\tau) e^{-\Delta\tau} d\tau = 0. \text{ Soit en effectuant le changement de variable } \tau = t - t' :$$

$$\dot{c}_i(t) + \frac{\Gamma \Delta}{2} e^{-\Delta t} \int_0^t c_i(t') e^{-\Delta t'} dt' = 0 \quad (13)$$

(ii) - En dérivant (13) on obtient :

$$\ddot{c}_i(t) + \frac{\Gamma \Delta}{2} e^{-\Delta t} c_i(t) e^{\Delta t} - \Delta \underbrace{\frac{\Gamma \Delta}{2} \int_0^t c_i(t') e^{\Delta t'} dt'}_{-\dot{c}_i(t)} = 0$$

soit :

$$\ddot{c}_i(t) + \Delta \dot{c}_i(t) + \frac{\Gamma \Delta}{2} c_i(t) = 0 \quad (14)$$

(iii) - On cherche des solutions de (14) de la forme $c_i(t) = c_0 e^{-rt}$

équation caractéristique : $r^2 - \Delta r + \frac{\Gamma \Delta}{2} = 0$ de discriminant $\Delta(\Delta - 2\Gamma)$

- $\Delta > 2\Gamma \rightarrow$ (couplage faible) : 2 racines réelles (somme de 2 exponentielles)
- $\Delta < 2\Gamma \rightarrow$ (couplage fort) 2 racines complexes conjuguées avec partie réelle en $-\frac{\Delta}{2}$.

(iv) - Si $\Gamma \gg \Delta$ (couplage fort) \rightarrow racines complexes conjuguées presque imaginaires

pures $r_{1,2} = -\frac{\Delta}{2} \pm i \sqrt{\frac{\Gamma \Delta}{2}}$. **Oscillation de Rabi avec la pulsation** $\pm \sqrt{\frac{\Gamma \Delta}{2}}$.

3-1 $\mathbb{N}(\tau) = \frac{1}{\hbar^2} \int dE \rho(E) |v_{fi}|^2 e^{-\frac{i}{\hbar}(E-E_i)\tau}$. Seul compte le produit $\rho(E) |v_{fi}|^2$. Si on prend $|v_{fi}|^2 = v^2$ et $\rho(E) = \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{1 + \left(\frac{E - E_i}{\hbar \Delta}\right)^2}$, on est ramené au problème précédent.

On retrouve le régime de la règle d'or de Fermi quand $\Gamma \ll \Delta$. Les deux racines sont alors réelles : $r_1 = \Delta, r_2 = \frac{\Gamma}{2}$ et la solution de l'équation différentielle se décompose en :

$$c_i(t) = \alpha_1 e^{-r_1 t} + \alpha_2 e^{-r_2 t} \text{ avec } c_i(0) = 1 \text{ et } \dot{c}_i(0) = 0$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ r_1 \alpha_1 + r_2 \alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = -\frac{r_2}{r_1} \alpha_2 \ll \alpha_1 \text{ si } r_2 \ll r_1$$

Seul le poids de $r_2 = \frac{\Gamma}{2}$ est appréciable.

Remarque : On retrouve aussi $N(\tau) = \frac{\Gamma \Delta}{2} e^{-\Delta \tau} \simeq \frac{\Gamma}{2} \delta(\tau)$

B. Emission spontanée dans l'espace libre ou en cavité.

1-/ La règle d'or de Fermi donne le taux d'émission spontanée Γ_{libre} :

$$\Gamma_{\text{libre}} = \frac{2\pi}{\hbar} (\hbar \kappa)^2 \frac{(\hbar \omega)^2 V}{2\pi^2 \hbar^3 c^3} = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{\hbar \omega}{2\varepsilon_0 V} \frac{d^2(\hbar \omega)^2 V}{2\pi^2 \hbar^3 c^3} = \frac{1}{2\pi} \frac{d^2 \omega^3}{\hbar \varepsilon_0 c^3}$$

soit avec la prise en compte du caractère vectoriel du champ et du dipôle :

$$\Gamma_{\text{libre}} = \frac{1}{3\pi} \frac{d^2 \omega^3}{\hbar \varepsilon_0 c^3} \quad (15)$$

2-/

(a)- $\rho_{\text{cav}}(E) = \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{1 + 4 \left(\frac{E - \hbar \omega_0}{\hbar \Delta \omega} \right)^2}$. Quand $E = \hbar \left(\omega \pm \frac{\Delta \omega}{2} \right)$, ρ_{cav} est divisée par 2 $\Rightarrow \Delta \omega$

largeur à mi-hauteur.

$$1 = \int \rho_{\text{cav}}(E) dE = \frac{\hbar \Delta \omega / 2}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE}{\hbar \Delta \omega / 2} \frac{1}{1 + \left(\frac{E - \hbar \omega_0}{\hbar \Delta \omega / 2} \right)^2} = \pi \frac{\hbar \Delta \omega}{2\varepsilon} \Rightarrow \varepsilon = \frac{\pi}{2} \hbar \Delta \omega \text{ et :}$$

$$\rho_{\text{cav}} = \frac{2}{\pi} \frac{\hbar \Delta \omega}{4(E - \hbar \omega_0)^2 + (\hbar \Delta \omega)^2}$$

(c) $\rho_{\text{cav}}(\hbar \omega_0) = \frac{1}{\varepsilon} = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\hbar \Delta \omega}$ et $\Gamma_{\text{cav}} = \frac{2\pi}{\hbar} (\hbar \kappa)^2 \rho_{\text{cav}} = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{\hbar \omega_0}{2\varepsilon_0 V} d^2 \frac{2}{\pi} \frac{1}{\hbar \Delta \omega}$

$$\Gamma_{\text{cav}} = \frac{\omega_0}{\Delta \omega} \frac{2d^2}{\hbar \varepsilon_0 V} \quad (16)$$

(d) $F_P = \frac{\Gamma_{\text{cav}}}{\Gamma_{\text{libre}}} = \frac{\omega_0}{\Delta \omega} \frac{2d^2}{\hbar \varepsilon_0 V} \frac{3\pi \hbar \varepsilon_0 c^3}{d^2 \omega^3} = \frac{3}{4\pi^2} \frac{\omega_0}{\Delta \omega} \frac{\lambda^3}{V}$

$$F_P = \frac{3}{4\pi^2} Q \frac{\lambda^3}{V} \quad (17)$$

(e) Emission privilégiée de photons dans un mode de la cavité \Rightarrow sources lumineuses à 1 photon. Nécessité d'utiliser des petits volumes V (ils resteront supérieurs à λ^3) et des grands facteurs de qualité.

3.

(a)

$$\hbar\Delta\omega \rightarrow 1,5 \text{ mm et } 26 \text{ mm} \leftrightarrow 5 \text{ meV} \Rightarrow \hbar\Delta\omega = \frac{1,5}{26} \times 5 = 0,29 \text{ meV}$$

$$\hbar\omega = 1,332 \text{ eV d'où } Q = \frac{1,332 \times 10^3}{0,29} \approx 4600$$

(b) $F_p = \frac{3}{4\pi^2} \times 4600 \times \frac{1}{10} = 35$

C. Transition vers le couplage fort

1.

(a) pas de couplage : $\begin{cases} |e, n\rangle \leftrightarrow \hbar\omega_0 + n\hbar\omega \\ |g, n\rangle \leftrightarrow 0 + n\hbar\omega \end{cases}$

(b) Pour $\omega = \omega_0$ $|e, 0\rangle$ et $|g, 1\rangle$ sont dégénérés.

Sinon, matrice 2x2

$$\begin{matrix} |e, 0\rangle & |g, 1\rangle \\ \begin{pmatrix} \hbar\omega_0 & \hbar\kappa \\ \hbar\kappa & \hbar\omega \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Dont les valeurs propres sont $v_p = \frac{\hbar}{2}(\omega + \omega_0) \pm \frac{\hbar}{2}\sqrt{(\omega_0 - \omega)^2 + 4\kappa^2}$

(c) $\delta = 0$: états propres $|\phi_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e, 0\rangle \pm |g, 1\rangle)$

$$|\psi(0)\rangle = |e, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\phi_+\rangle + |\phi_-\rangle) \rightarrow |\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-ikt}|\phi_+\rangle + e^{ikt}|\phi_-\rangle)$$

$$P_e(t) = \left| \langle e | \psi(t) \rangle \right|^2 = \left| \frac{1}{2}(e^{-ikt} + e^{ikt}) \right|^2 = \cos^2 \kappa t$$

$$\boxed{P_e(t) = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\kappa t)}$$

2. (a) On a déjà plus ou moins répondu en **B :2(a)**

$$\hbar\Delta \leftrightarrow \frac{\hbar}{2}\Delta\omega ; \varepsilon \leftrightarrow \frac{\pi}{2}\hbar\Delta\omega ; v \leftrightarrow \hbar\kappa$$

$$\Gamma = \frac{2\pi}{\hbar} v^2 \rho(E) = \frac{2\pi}{\hbar} \hbar^2 \kappa^2 \frac{2}{\pi} \frac{1}{\hbar\Delta\omega} = 4 \frac{\kappa^2}{\Delta\omega}$$

(b) couplage fort : $2\Gamma > \Delta \Leftrightarrow 8 \frac{\kappa^2}{\Delta\omega} > \frac{\Delta\omega}{2}$ soit : $\boxed{4\kappa > \Delta\omega}$

(c) Si $\Gamma \gg \Delta$, on a prédit en **A.** une oscillation de Rabi $c_i(t) = e^{i\sqrt{\frac{\Gamma\Delta}{2}}t} + e^{-i\sqrt{\frac{\Gamma\Delta}{2}}t} \sim \cos\left(\sqrt{\frac{\Gamma\Delta}{2}}t\right)$ avec un très faible amortissement. Avec la correspondance ci-dessus :

$$\sqrt{\frac{\Gamma\Delta}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2} \frac{4\kappa^2}{\Delta\omega} \frac{\Delta\omega}{2}} = \kappa$$

On retrouve $c_i(t)$ en $\cos(\kappa t)$ et $P_e(t)$ en $\cos^2(\kappa t)$

3. (a) $\hbar\Delta\omega = 1\text{mm} \Leftrightarrow 2,5\text{meV} = 14\text{mm}$; $\hbar\Delta\omega = \frac{1}{14} \times 2,5 = 0,18\text{meV}$

$$Q = \frac{\omega}{\Delta\omega} = \frac{1,315}{0,18} = 7360 \approx 7000$$

(b) $2\kappa = 3,5\text{mm} \Leftrightarrow 0,4\text{meV} = 11\text{mm}$; $\kappa = \frac{1}{2} \frac{3,5}{11} \times 0,4 = 0,064\text{meV}$

(c) $\frac{4\kappa}{\Delta\omega} = 1,4 > 1 \Rightarrow$ **ça va pouvoir osciller !**

Loi d'oscillation : $c_i(t) = e^{-\frac{\Delta t}{2}} \cos(\kappa t)$ avec $\Delta = \frac{\Delta\omega}{2} \approx 1,4\kappa$

On va pouvoir aller jusqu'à des temps $t \sim 4\Delta^{-1}$. Ensuite on a un amortissement $\geq e^{-2} \Rightarrow \kappa t \sim \kappa \frac{4}{\Delta} \sim \frac{4}{1,4} \sim 3 \sim \pi$. On va voir une oscillation au maximum.