« LES POINTS DE VUE » DE HEISENBERG ET SCHRÖDINGER

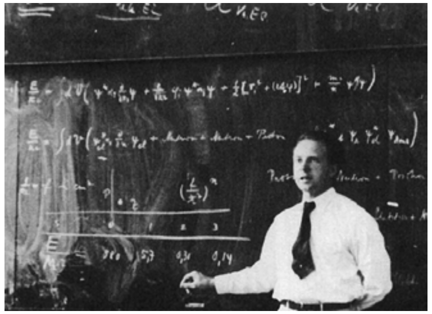
Deux méthodes (« points de vue ») équivalents pour décrire l'évolution d'un système en mécanique quantique :

1. Le point de vue de Schrödinger :

Les opérateurs sont indépendants du temps
L'état du système évolue (équation de Schrödinger)

2. Le point de vue de Heisenberg :

L'état du système est indépendant du temps
Les opérateurs évoluent (équation de Heisenberg)



Très utile en Optique Quantique, car on retrouve des équations d'évolution des opérateurs champ très proches de celles de l'électromagnétisme classique

Lien entre ces points de vue ? L'Opérateur d'évolution.

L'OPERATEUR D'EVOLUTION

Equation de Schrödinger :

$$\boxed{i\hbar\frac{d\left|\Psi(t)\right\rangle}{dt}=\hat{H}(t)\left|\Psi(t)\right\rangle}$$

*** Si $\hat{H}$ est indépendant du temps, intégration formelle** :

$$\frac{d\left|\Psi(t)\right\rangle}{\left|\Psi(t)\right\rangle}=-\frac{i\hat{H}dt}{\hbar}\quad\rightarrow\quad\left|\Psi(t)\right\rangle=e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}\left|\Psi(0)\right\rangle=\hat{U}(t)\left|\Psi(0)\right\rangle$$

où $\boxed{\hat{U}(t)=e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}}$ **est un <u>opérateur unitaire</u> appelé : « opérateur d'évolution ».**

<u>Attention !</u> si $\hat{H}$ dépend du temps (cas général) on a toujours $\left|\Psi(t)\right\rangle=\hat{U}(t)\left|\Psi(0)\right\rangle$ où

$\hat{U}(t)$ **est solution de** : $i\hbar\frac{d\hat{U}(t)}{dt}=\hat{H}(t)\hat{U}(t)$ **mais généralement.** $\hat{U}(t)\neq e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}$

EQUATION DE HEISENBERG

*** Valeur moyenne de l'opérateur $\hat{A}_S$ dans l'état $\left|\Psi(t)\right\rangle$:**

$$\left\langle\Psi(t)\right|\hat{A}_S\left|\Psi(t)\right\rangle=\left\langle\Psi(0)\right|\hat{U}^\dagger(t)\,\hat{A}_S\hat{U}(t)\left|\Psi(0)\right\rangle=\left\langle\Psi(0)\right|\hat{A}_H(t)\left|\Psi(0)\right\rangle$$

où $\boxed{\hat{A}_H(t)=\hat{U}^\dagger(t)\,\hat{A}_S\hat{U}(t)}$ **est l'opérateur $\hat{A}$ en « point de vue de Heisenberg ».**

*** Equation d'évolution de $\hat{A}_H(t)$ ($\hat{A}_S$ et $\hat{H}$ sont indépendants du temps)** :

$$\frac{d\hat{A}_H(t)}{dt}=\frac{d\hat{U}^\dagger(t)}{dt}\hat{A}_S\hat{U}(t)+\hat{U}^\dagger(t)\,A_S\frac{d\hat{U}(t)}{dt}$$

$$i\hbar\frac{d\hat{A}_H(t)}{dt}=-\hat{U}^\dagger(t)\,\hat{H}A_S\hat{U}(t)+\hat{U}^\dagger(t)\,\hat{A}_S\hat{H}\hat{U}(t)=\left[\hat{U}^\dagger(t)\,\hat{A}_S\hat{U}(t),H\right]$$

On obtient l'**équation de Heisenberg :** $\boxed{i\hbar\frac{d\hat{A}_H(t)}{dt}=\left[\hat{A}_H(t),\hat{H}\right]}$

EQUATION DE HEISENBERG : remarques...

*** Valeur moyenne de l'équation de Heisenberg**

$$i\hbar \frac{d\hat{A}_H(t)}{dt} = \left[\hat{A}_H(t), \hat{H}\right]$$

En prenant la valeur moyenne dans l'état $\left|\Psi(0)\right\rangle$:

$$i\hbar \frac{d\left\langle \hat{A} \right\rangle(t)}{dt} = \left\langle \left[\hat{A}, \hat{H}\right] \right\rangle(t)$$ **Théorème d'Ehrenfest**

*** Cas général où $\hat{A}_S$ et $\hat{H}_S$ dépendent de t :**

$$i\hbar \frac{d\hat{A}_H(t)}{dt} = i\hbar \left(\frac{\partial \hat{A}_S(t)}{\partial t} \right)_H + \left[\hat{A}_H(t), \hat{H}_H(t)\right]$$

avec pour tous les opérateurs

$$\hat{A}_H(t) = \hat{U}^\dagger(t)\,\hat{A}_S \hat{U}(t)$$

Valeur moyenne $\longrightarrow$ théorème d'Ehrenfest généralisé.