UN OUTIL DE CALCUL UTILE POUR TRAITER LES SYSTEMES A DEUX NIVEAUX

On présente ici un « outil mathématique » particulièrement utile pour l'étude des systèmes à deux niveaux. Quelques exemples « simplistes » d'utilisation illustre son emploi.

• Théorème de Cayley-Hamilton (Rappel)

Soit : $f(\lambda)=|c(\lambda)|=\lambda^{n}+\alpha_1\lambda^{n-1}+\alpha_2\lambda^{n-2}+\cdots+\alpha_{n-1}\lambda+\alpha_n=0$ l'équation caractéristique de la matrice carrée $[a]$. Alors l'équation polynomiale matricielle

$$f([X])=[X]^n+\alpha_1[X]^{n-1}+\alpha_2[X]^{n-2}+\cdots+\alpha_{n-1}[X]+\alpha_n[1]=0$$

est satisfaite pour $[X]=[a]$.

Autrement dit : **« toute matrice carrée satisfait sa propre équation caractéristique ».**

• Calcul des polynômes et des séries : Formules de Frazer-Duncan et Collar.

Soit $F([a])$ un polynôme ou une série convergente matriciels, alors si $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ sont les valeurs propres **toutes distinctes** de $[a]$, on évalue $F([a])$ au moyen de la formule de Frazer-Duncan et Collar :

$$F([a])=\sum_{i=1}^{n}F(\lambda_i)[G_i] \text{ avec } [G_i]=\frac{\prod_{j\neq i}(\lambda_j[1]-[a])}{\prod_{j\neq i}(\lambda_j-\lambda_i)} \quad (1)$$

• **Exemple :** Calculer $F([a])=[a]^3+2[a]^2-3[1]$

où $[a]=\begin{bmatrix}4 & 5\\ -1 & -2\end{bmatrix}$

$$|c(\lambda)|=|\lambda[1]-[a]|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -5\\ 1 & \lambda+2\end{vmatrix}=\lambda^2-2\lambda-3=(\lambda+1)(\lambda-3)$$

donc deux valeurs propres $\begin{cases}\lambda_1=3\\ \lambda_2=-1\end{cases}$

Par ailleurs $F(\lambda)=\lambda^3+2\lambda-3$ et $\begin{cases}F(\lambda_1)=42\\ F(\lambda_2)=-2\end{cases}$

$$[G_1]=\frac{\lambda_2[1]-[a]}{\lambda_2-\lambda_1}=\frac{-[1]-[a]}{-1-3}=\frac{[1]+[a]}{4}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}5 & 5\\ -1 & -1\end{bmatrix}$$

$$[G_2]=\frac{\lambda_1[1]-[a]}{\lambda_1-\lambda_2}=\frac{3[1]-[a]}{3-(-1)}=\frac{3[1]-[a]}{4}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}-1 & -5\\ 1 & 5\end{bmatrix}$$

$$F([a])=F(\lambda_1)[G_1]+F(\lambda_2)[G_2]=\frac{42}{4}\begin{bmatrix}5 & 5\\ -1 & -1\end{bmatrix}-\frac{2}{4}\begin{bmatrix}-1 & -5\\ 1 & 5\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}53 & 55\\ -11 & -13\end{bmatrix}$$

Remarque :

Pour p très élevé : $$\boxed{[a]^p \cong \lambda_i^p \frac{\prod_{r\neq i}(\lambda_r[1]-[a])}{\prod_{r\neq i}(\lambda_r-\lambda_i)}} \quad (2)$$

où λ_i représente la valeur propre dont le module est le plus grand.

• Cas de la série exponentielle :

$$e^{[a]} = [1] + [a] + \frac{1}{2!}[a]^2 + \cdots + \frac{1}{n!}[a]^n + \cdots$$

$$\boxed{e^{[a]} = \sum_{i=1}^{i=n} e^{\lambda_i}[G_i] \quad \left(\text{avec } [G_i] = \frac{\prod_{j\neq i}(\lambda_j[1]-[a])}{\prod_{j\neq i}(\lambda_j-\lambda_i)}\right)}$$

Exemple : Calculer $e^{[a]}$ avec $[a] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Les valeurs propres de $[a]$ sont $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$

il vient : $[G_1] = \frac{\lambda_2[1]-[a]}{\lambda_2-\lambda_1} = \frac{1}{2}([1]+[a]) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$[G_2] = \frac{\lambda_1[1]-[a]}{\lambda_1-\lambda_2} = \frac{1}{2}([1]-[a]) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$e^{[a]} = \frac{1}{2}e\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}e^{-1}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh 1 & \sinh 1 \\ \sinh 1 & \cosh 1 \end{bmatrix}$

• Equations matricielles différentielles

1-/du premier ordre à coefficients constants, sans second membre

$$\frac{d}{dt}\{X\} + [\alpha]\{0\}$$

une telle équation peut encore s'écrire

$\frac{d}{dt}\{X\} = [a]\{X\}$ avec $[a] = -[\alpha]$

La solution d'une telle équation est évidemment : $\{X\} = e^{(t-t_0)[a]}\{X_0\}$ où t_0 est une valeur arbitraire de t, $\{X_0\}$ une colonne de constantes arbitraires $\{X(t_0)\}$.

Pour évaluer $e^{(t-t_0)[a]}$ on utilise la méthode précédente si $[a]$ a des valeurs propres distinctes.

Exemple : Donner la solution de $\frac{d}{dt}\{X\} = [a]\{X\}$ où $\{X\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$ et $[a] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

L'équation caractéristique de $[a]$ est $\lambda(\lambda-2) = 0$, soit 2 valeurs propres $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2$

Il vient : $e^{(t-t_0)[a]} = e^{(t-t_0)\lambda_1}[G_1] + e^{(t-t_0)\lambda_2}[G_2]$

$[G_1] = \frac{\lambda_2[1]-[a]}{\lambda_2-\lambda_1} = \frac{2[1]-[a]}{2} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$[G_2] = \frac{\lambda_1[1]-[a]}{\lambda_1-\lambda_2} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$e^{(t-t_0)[a]} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + e^{2(t-t_0)}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+e^{2(t-t_0)} & 1-e^{2(t-t_0)} \\ 1-e^{2(t-t_0)} & 1+e^{2(t-t_0)} \end{bmatrix}$

• Résolution des systèmes d'équations différentielles scalaires au moyen du calcul matriciel :

Exemple : Soit à résoudre $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = x \end{cases}$ (1) avec $\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$$

Posons $\{X\} = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$, $\{X_0\} = \begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{Bmatrix}$, $[a] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Il vient : $\dfrac{d}{dt}\{X\} = [a]\{X\}$

Pour simplifier, prenons le cas où $t_0 = 0$. L'équation caractéristique de $[a]$ est $\lambda^2 - 1$ et par conséquent ses deux valeurs propres sont $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -1$.

On a :

$$e^{t[a]} = e^t [G_1] + e^{-t}[G_2] \text{ avec } \begin{cases} [G_1] = \dfrac{\lambda_2[1] - [a]}{\lambda_2 - \lambda_1} = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ [G_2] = \dfrac{\lambda_1[1] - [a]}{\lambda_1 - \lambda_2} = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{cases} \text{ d'où}$$

$$e^{t[a]} = \frac{e^t}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{e^{-t}}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{bmatrix} \text{ et donc}$$

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \cosh t + y_0 \sinh t \\ y(t) = x_0 \sinh t + y_0 \cosh t \end{cases}$$

• Equations différentielles du second ordre

Exemple 1: Soit à intégrer l'équation $\dfrac{d^2x}{dt^2} + x = 0$ (1)

avec les conditions initiales $\begin{cases} x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$

Posons $y = \dfrac{dx}{dt}$. On a :

$$(1) \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -x, \quad \text{soit } \frac{d}{dt}\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}.$$

Les valeurs propres de $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ sont $\lambda_1 = i$ et $\lambda_2 = -i$.

Il vient : $e^{t\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}} = e^{it}[G_1] + e^{-it}[G_2]$ avec $\begin{cases} [G_1] = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix} \\ [G_2] = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \end{cases}$

$$e^{t\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}} = \frac{e^{it}}{2}\begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix} + \frac{e^{-it}}{2}\begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

D'où :

$$\begin{cases} x = x_0 \cos t + y_0 \sin t \\ y = \dfrac{dx}{dt} = -x_0 \sin t + y_0 \cos t \end{cases}$$

Exemple 2: Résoudre au moyen de la méthode matricielle

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2 x=0$$

avec les conditions initiales $x(0)=x_0,\quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0}=y_0$.

Posons $y=\frac{dx}{dt},\quad (1)\Rightarrow \frac{dy}{dt}=-\omega^2 x$

On est par conséquent amené à résoudre le système

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=y\\ \frac{dy}{dt}=-\omega^2 x\end{cases}\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\begin{Bmatrix}x\\ y\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\omega^2 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x\\ y\end{Bmatrix}$$

Les valeurs propres de la matrice carrée $\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\omega^2 & 0\end{bmatrix}$

sont distinctes : $\lambda_1=i\omega,\ \lambda_2=-i\omega$.

On calcule

$$e^{t\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\omega^2 & 0\end{bmatrix}}=e^{i\omega}\left[G_1\right]+e^{-i\omega}\left[G_2\right]$$

$$=e^{i\omega t}\left(\frac{-i\omega[1]-\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\omega^2 & 0\end{bmatrix}}{-i\omega-i\omega}\right)+e^{-i\omega t}\left(\frac{i\omega[1]-\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\omega^2 & 0\end{bmatrix}}{2i\omega}\right)$$

$e^{t\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\omega^2 & 0\end{bmatrix}}==\begin{bmatrix}\cos\omega t & \frac{1}{\omega}\sin\omega t\\ -\omega\sin\omega t & \cos\omega t\end{bmatrix}$. Finalement :

$$\begin{Bmatrix}x\\ y\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\omega t & \frac{1}{\omega}\sin\omega t\\ -\omega\sin\omega t & \cos\omega t\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_0\\ y_0\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x(t)=x_0\cos\omega t+\frac{y_0}{\omega}\sin\omega t\\ y(t)=\frac{dx}{dt}=-\omega x_0\sin\omega t+y_0\cos\omega t\end{cases}$$

PRECESSION DE RABI ET FRANGES DE RAMSEY

1. Rappels sur les systèmes à deux niveaux. Vecteur de Bloch.

En Mécanique Quantique il est souvent commode de ramener un problème à l'étude d'un système à deux niveaux $|e\rangle$ (état excité) et $|g\rangle$ (état fondamental).

Celui-ci étant analogue à un spin fictif $\frac{1}{2}$, on dispose alors d'une représentation spatiale de l'espace des états appelée ***vecteur de Bloch****.*

Le Hamiltonien du système à deux niveaux s'écrit dans la base $\{|e\rangle, |g\rangle\}$:

$$H_0 = \frac{\hbar\omega_0}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_z$$

où $\hbar\omega_0$ est l'énergie entre les deux niveaux et σ_z la matrice de Pauli $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

On peut donc interpréter $|e\rangle$ et $|g\rangle$ comme les états propres d'une observable de spin (un polariseur) dirigé selon l'axe Oz.

D. Marchand

1.1. Montrer, à partir de l'analogie « système à deux niveaux $\leftrightarrow$spin fictif $\frac{1}{2}$ », que **tout état** d'un système à deux niveaux peut s'écrire :

$$|\Psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-i\frac{\phi}{2}} |e\rangle + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\phi}{2}} |g\rangle$$

où θ et ϕ sont les angles polaires d'une direction de l'espace déterminée par le vecteur unitaire $\vec{n}(\theta,\phi)$.
Donner une interprétation géométrique de cet état dans le cadre de l'analogie développée ici. Quelle est la probabilité P_e de détecter le système dans l'état excité ?

1.2. On suppose que l'état initial du système est :

$$|\Psi(t=0)\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |e\rangle + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |g\rangle$$

Décrire l'évolution ultérieure du système. Interprétation géométrique ? On appelle usuellement ce phénomène **précession de Larmor**.

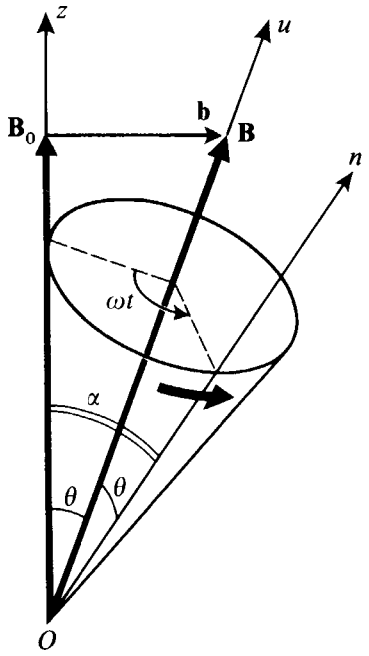
1.3. On branche maintenant un couplage entre les deux niveaux. Le Hamiltonien s'écrit :

$$\begin{aligned} H &= \frac{\hbar\omega_0}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{\hbar\Omega_0}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &\equiv \frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_z + \frac{\hbar\Omega_0}{2}\sigma_x \end{aligned} \qquad (1)$$

Comment s'écrivent les nouveaux états propres du système couplé ? Décrire l'évolution temporelle d'un état quelconque de ce système. Interprétation géométrique ? Comment évolue $P_{|g\rangle\to|e\rangle}$? On appelle usuellement ce phénomène **précession de Rabi**.

Indication :
*Pour résoudre cette question, on pourra (**éventuellement**) se servir d'une formule classique de trigonométrie sphérique rappelée ici :*

$$\cos\alpha = \cos^2\theta + \sin^2\theta\cos\omega t$$



2. Interaction avec un champ classique

On considère maintenant l'interaction de l'atome à deux niveaux étudié précédemment avec un champ électrique classique $\vec{E}$. Pour simplifier les expressions on prend maintenant le niveau fondamental comme nouvelle référence des énergies soit $E_g = 0$ et $E_e = \hbar\omega_0$.

Le Hamiltonien de couplage atome-champ s'écrit, dans l'approximation dipolaire :

$$H_1(t) = -\vec{D}.\vec{E}(t)$$

où $\vec{D}$ est l'opérateur dipolaire atomique et $\vec{E}(t)=\vec{E}_0\cos(\omega t+\phi)$. Dans la base $\{|e\rangle,|g\rangle\}$ on a

$$\vec{D}=\vec{d}_{eg}\left(|e\rangle\langle g|+|g\rangle\langle e|\right) \qquad (2)$$

où $\vec{d}_{eg}=\langle e|q\vec{R}|g\rangle$ est l'élément de matrice dipolaire, que l'on prend réel, entre les deux niveaux atomiques de la transition.
On posera $\hbar\Omega_0=-\vec{d}_{eg}.\vec{E}_0$.

2.1. Donner l'expression du Hamiltonien total $H(t)=H_0+H_1(t)$ du système dans la base $\{|e\rangle,|g\rangle\}$ et écrire l'équation de Schrödinger régissant l'évolution de l'atome décrit par le ket $|\Psi(t)\rangle=a(t)|g\rangle+b(t)|e\rangle$. Ecrire le système d'équations différentielles vérifié par les coefficients $a(t)$ et $b(t)$.
On introduit une nouvelle base $\{|\gamma\rangle\equiv|g\rangle,|\varepsilon\rangle\equiv e^{-i\omega_0 t}|e\rangle\}$ qui présente le mérite d'incorporer la précession libre. Soient $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ les nouveaux coefficients de $|\Psi(t)\rangle$ dans cette base :

$$|\Psi(t)\rangle=\alpha(t)|\gamma\rangle+\beta(t)|\varepsilon\rangle$$

Ecrire le système d'équations différentielles vérifié par les coefficients $\alpha(t)$ et $\beta(t)$.
Ecrire le champ classique comme la superposition de deux champs tournant en sens opposé et négliger les termes en $e^{i(\omega+\omega_0)t}$ provenant de l'interaction avec le champ tournant en sens rétrograde (approximation dite « de l'onde tournante »). Justifier qualitativement cette approximation.
En appelant $\delta=(\omega-\omega_0)$ le désaccord par rapport à la résonance (detuning) de la lumière du laser (source du champ $\vec{E}(t)$) par rapport à la transition atomique $e\leftrightarrow g$, montrer que $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ vérifient le système d'équations différentielles

$$\begin{cases}\dot{\alpha}(t)=-i\beta(t)\dfrac{\Omega_0}{2}e^{i(\delta t+\phi)}\\ \dot{\beta}(t)=-i\alpha(t)\dfrac{\Omega_0}{2}e^{-i(\delta t+\phi)}\end{cases}$$

2.2. On introduit $|\Phi(t)\rangle = c(t)|\gamma\rangle + d(t)|\varepsilon\rangle$, transformé de $|\Psi(t)\rangle = \alpha(t)|\gamma\rangle + \beta(t)|\varepsilon\rangle$ par la transformation unitaire R $\left(|\Phi(t)\rangle = R|\Psi(t)\rangle, \left(RR^{\dagger} = I\right)\right)$ donnée par :

$$R = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\delta t}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\delta t}{2}} \end{pmatrix}$$

2.2.a. Quelle interprétation géométrique donner à cette transformation ? Ecrire l'expression du nouvel Hamiltonien H_R obtenu grâce à cette transformation. Quel est l'intérêt de la transformation unitaire R ?
Calculer les énergies propres (on posera $\Omega_1 = \sqrt{\Omega_0^2 + \delta^2}$, pulsation de Rabi généralisée).

2.2.b. Montrer que les coefficients $c(t)$ et $d(t)$ vérifient le système

$$\begin{cases} i\dot{c}(t) = \frac{1}{2}\left[\delta c(t) + \Omega_0 e^{i\phi} d(t)\right] \\ i\dot{d}(t) = \frac{1}{2}\left[\Omega_0 e^{-i\phi} c(t) - \delta d(t)\right] \end{cases}$$

dont la solution générale s'écrit :

$$\begin{cases} c(t) = e^{i\frac{\delta}{2}(t-t_0)}\left[\left\{\cos\frac{\Omega_1}{2}(t-t_0) + i\cos\theta\sin\frac{\Omega_1}{2}(t-t_0)\right\}c(t_0) + e^{i\delta t_0}\left\{-i\sin\theta e^{i\phi}\sin\frac{\Omega_1}{2}(t-t_0)\right\}d(t_0)\right] \\ d(t) = e^{-i\frac{\delta}{2}(t-t_0)}\left[\left\{-i\sin\theta e^{-i\phi}\sin\frac{\Omega_1}{2}(t-t_0)\right\}e^{-i\delta t_0}c(t_0) + \left\{\cos\frac{\Omega_1}{2}(t-t_0) - i\cos\theta\sin\frac{\Omega_1}{2}(t-t_0)\right\}d(t_0)\right] \end{cases}$$

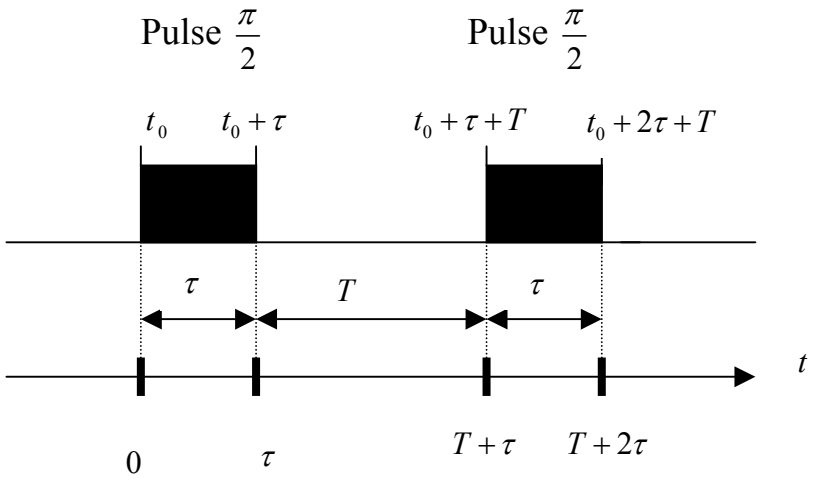
où : $\Omega_1 = \sqrt{\Omega_0^2 + \delta^2}$, $\sin\theta = \frac{\Omega_0}{\Omega_1}$, $\cos\theta = \frac{-\delta}{\Omega_1}$ $(0 \le \theta \le \pi)$

2.2.c. On suppose qu'à l'instant initial t_0 l'atome est soumis à un pulse de lumière de durée τ (temps d'interaction atome-champ) inférieure au temps de vie des niveaux e et g. Ecrire les amplitudes de probabilité de trouver l'atome dans les états $|\gamma\rangle$ et $|\varepsilon\rangle$ à la suite de ce pulse. Montrer qu'en l'absence de champ l'état de l'atome n'évolue pas. Calculer la probabilité $P_{|g\rangle\to|e\rangle}(\tau)$ de trouver l'atome dans l'état excité après un pulse de lumière résonnante $(\delta = 0)$ de durée τ si initialement il était dans son état fondamental au temps t_0. Ecrire l'expression de cette probabilité pour une lumière non résonnante $(\delta \neq 0)$. Montrer que la valeur maximum de cette probabilité $P^{\max}_{|g\rangle\to|e\rangle}$ présente un caractère résonant lorsque ω varie autour de la fréquence de Bohr ω_0. Tracer qualitativement la courbe $P^{\max}_{|g\rangle\to|e\rangle}(\delta)$.

2.2.d. Qu'appelle-t-on « impulsion π » donnée à l'atome ? Montrer que dans le cas d'une lumière résonnante une telle impulsion permet de transférer la totalité des atomes du niveau fondamental à l'état excité.
Qu'appelle-t-on « impulsion $\frac{\pi}{2}$ » ? Quel est son intérêt ?

3. Franges de Ramsey

3.1. On se place dans le cas où l'atome et le champ sont très légèrement désaccordés. L'atome initialement dans $|g\rangle$ subit un premier pulse $\frac{\pi}{2}$ puis l'interaction est « débranchée ». L'atome et le champ **évoluent librement** pendant un temps T. On « branche » alors à nouveau l'interaction et l'atome subit un second pulse $\frac{\pi}{2}$.



Donner en fonction du désaccord δ entre atome et champ électrique, l'évolution de la probabilité de mesurer l'atome dans l'état excité après les deux pulses.

3.2. Tracer qualitativement $P_{|g\rangle\to|e\rangle}(\delta)$ et donner une interprétation de ce phénomène en terme de franges d'interférence.
Cette technique, connue sous le nom « **d'interférométrie Ramsey** » est très utilisée en métrologie et en optique quantique notamment. Quel est son intérêt pratique ? Donner quelques exemples d'application.

1. Rappels sur les systèmes à deux niveaux. Vecteur de Bloch.

a) cas d'un spin $\frac{1}{2}$

Soit $\vec{n}(\theta,\phi)$ le vecteur unitaire définissant une direction quelconque de polarisation.

Le Hamiltonien de spin s'écrit :

$H_n = \frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_{\vec{n}}$ où $\sigma_{\vec{n}} = \vec{\sigma}.\vec{n} = \sigma_x \sin\theta\cos\phi + \sigma_y \sin\theta\sin\phi + \sigma_z\cos\theta$. Soit :

$$(\sigma_{\vec{n}}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\sin\theta\cos\phi + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\sin\theta\sin\phi + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\cos\theta$$

$$\Rightarrow H_n = \frac{\hbar\omega_0}{2}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta\, e^{-i\phi} \\ \sin\theta\, e^{i\phi} & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

de valeurs propres $E_\pm = \pm\frac{\hbar\omega_0}{2}$ (isotropie de l'espace) et dont les états propres sont respectivement :

$$\begin{cases} |+\rangle_n = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{-i\frac{\phi}{2}}|+\rangle_z + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\phi}{2}}|-\rangle_z \\ |-\rangle_n = -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\phi}{2}}|+\rangle_z + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{-i\frac{\phi}{2}}|-\rangle_z \end{cases}$$

b) application à un système à deux niveaux

Soit $|\Psi\rangle = a|e\rangle + b|g\rangle$ l'état normé le plus général du système du système à deux niveaux et où a et $b \in \mathbb{C}$

$$|\Psi\rangle \text{ normé } \Rightarrow \left\| |\Psi\rangle \right\|^2 = 1 \Rightarrow |a|^2 + |b|^2 = 1$$

et par conséquent $\exists\theta$ tel que $\begin{cases} |a| = \cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \\ |b| = \sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \end{cases}$ $\left(0 \le \theta \le \pi\right) \Rightarrow \tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = \left|\dfrac{b}{a}\right|$

Cette dernière égalité détermine θ de façon unique.
Les phases de a et b n'interviendrons dans les prévisions physiques que par leur différence.

Posons $\begin{cases} \phi = Arg(b) - Arg(a) \\ \chi = Arg(b) + Arg(a) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Arg(b) = \dfrac{\chi}{2} + \dfrac{\phi}{2} \\ Arg(a) = \dfrac{\chi}{2} - \dfrac{\phi}{2} \end{cases}$

D'où $|\Psi\rangle = e^{i\frac{\chi}{2}}\left[\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)e^{-i\frac{\phi}{2}}|e\rangle + \sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\phi}{2}}|g\rangle\right]$. Le facteur de phase $e^{i\frac{\chi}{2}}$ étant sans signification physique, l'état le plus général d'un système à deux niveaux peut donc s'écrire :

$$\boxed{|\Psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{-i\frac{\phi}{2}}|e\rangle + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\phi}{2}}|g\rangle \quad \equiv \quad |+\rangle_n}$$

L'interprétation géométrique de cet état est immédiate dans le cadre de l'analogie du système avec un spin fictif $\frac{1}{2}$: l'état $|\Psi\rangle$ peut être représenté par un vecteur (**vecteur de Bloch**) colinéaire à $\vec{n}(\theta,\phi)$, vecteur unitaire

définissant la direction de l'espace où une mesure de la composante de spin S_n suivant cet axe donne $+\frac{\hbar}{2}$ avec certitude.

La probabilité de trouver le système dans l'état excité $|e\rangle$ est : $P_e = |\langle e|\Psi\rangle|^2 = \cos^2\frac{\theta}{2}$

Celle de le trouver dans l'état fondamental $|g\rangle$ étant $P_g = |\langle g|\Psi\rangle|^2 = \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = 1 - P_e$

1.1. $|\Psi(t=0)\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|e\rangle + \sin\frac{\theta}{2}|g\rangle \Rightarrow |\Psi(t)\rangle = U(t,0)|\Psi(t=0)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}|\Psi(t=0)\rangle$

où $U(t,0)$ est l'opérateur d'évolution. $|e\rangle$ et $|g\rangle$ étant vecteurs propres de l'Hamiltonien du système avec les valeurs propres respectives $\pm\frac{\hbar\omega_0}{2}$, il en résulte que

$$|\Psi(t)\rangle = \cos\frac{\theta}{2}e^{-i\frac{\omega_0 t}{2}}|e\rangle + \sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\omega_0 t}{2}}|g\rangle$$

L'angle θ entre $\vec{n}(t)$ et Oz reste constant mais $\vec{n}(t)$ tourne autour de Oz à la vitesse angulaire ω_0 (pulsation de Bohr de la transition entre les deux niveaux $|e\rangle$ et $|g\rangle$). C'est le phénomène de **précession de Larmor**.

1.2. • On « branche » maintenant un couplage entre les deux niveaux. Le Hamiltonien s'écrit :

$$H = \frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_z + \frac{\hbar\Omega_0}{2}\sigma_x$$

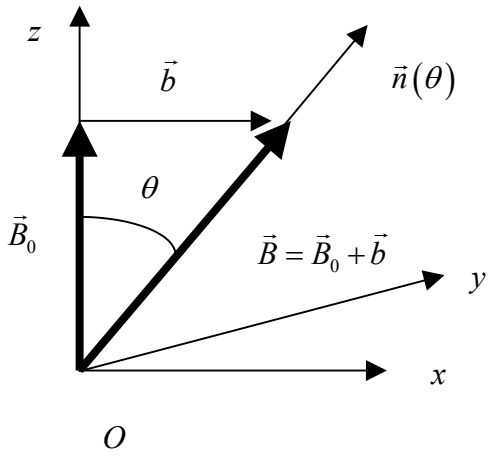
$$H = \frac{\hbar\omega_0}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{\hbar\Omega_0}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \omega_0 & \Omega_0 \\ \Omega_0 & -\omega_0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar\omega_0}{2}\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\Omega_0}{\omega_0} \\ \dfrac{\Omega_0}{\omega_0} & -1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar\omega_0}{2}\begin{pmatrix} 1 & \tan\theta \\ \tan\theta & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad \left(\tan\theta = \frac{\Omega_0}{\omega_0}\right)$$

dont les valeurs propres sont $E_\pm = \pm\frac{\hbar}{2}\sqrt{\omega_0^2 + \Omega_0^2} = \pm\frac{\hbar\Omega_1}{2}$

En posant $\sin\theta = \frac{\Omega_0}{\Omega_1}$, les états propres normés, développés sur la base $\left\{\left|e\right\rangle, \left|g\right\rangle\right\}$ sont alors :

$$\begin{cases} E_+ \rightarrow \left|\Psi_+\right\rangle = \cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\left|e\right\rangle + \sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\left|g\right\rangle \\ E_- \rightarrow \left|\Psi_-\right\rangle = -\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\left|e\right\rangle + \cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\left|g\right\rangle \end{cases} \quad (2) \quad \text{avec } \tan\theta = \frac{\Omega_0}{\omega_0}$$



En termes de spin fictif et de vecteur de Bloch, tout se passe comme si l'on avait un spin soumis à un champ magnétique $\vec{B}_0$ dirigé suivant Oz ($\omega_0 = -\gamma B_0$) et à un champ magnétique $\vec{b}$ perpendiculaire à Oz et situé dans le plan xOz ($\Omega_0 = -\gamma b$).

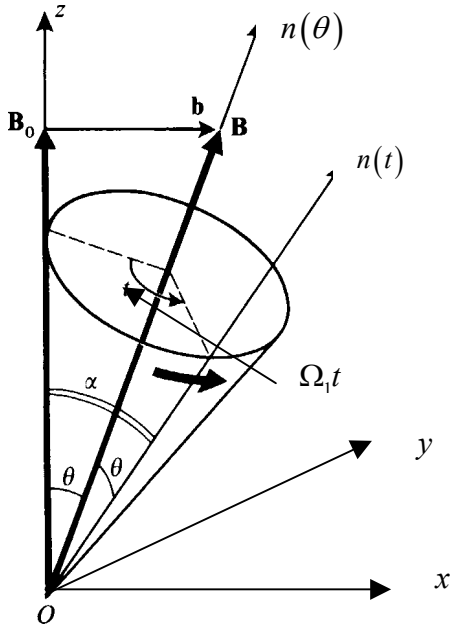
Un état quelconque du système s'écrit maintenant : $\left|\Psi\left(t=0\right)\right\rangle = \lambda\left|\Psi_+\right\rangle + \mu\left|\Psi_-\right\rangle$

Avec $\left|\lambda\right|^2 + \left|\mu\right|^2 = 1$, λ et μ étant fixés par les conditions initiales.

- Son évolution temporelle est : $\left|\Psi\left(t\right)\right\rangle = \lambda e^{-\frac{i}{\hbar}E_+ t}\left|\Psi_+\right\rangle + \mu e^{-\frac{i}{\hbar}E_- t}\left|\Psi_-\right\rangle$

On a cette fois une précession de Larmor autour de $\vec{n}(\theta)$ à la vitesse angulaire $\Omega_1 = \dfrac{E_+ - E_-}{\hbar} = \sqrt{\omega_0^2 + \Omega_0^2}$.

.



Interprétation géométrique en termes de spin fictif et de vecteur de Bloch :
Sous l'effet du couplage (représenté par le champ magnétique $\vec{b}$), le spin , initialement orienté le long de Oz, précesse autour de $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{b}$ (champ magnétique effectif). Par suite, la probabilité de trouver $\pm\frac{\hbar}{2}$ lors d'une mesure de sa composante S_z sur Oz est une fonction oscillante du temps.

Supposons que $\left|\Psi(t=0)\right\rangle = \left|g\right\rangle$. En inversant (2) nous obtenons :

$$\left|\Psi(t=0)\right\rangle = \left|g\right\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left|\Psi_-\right\rangle + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\left|\Psi_+\right\rangle$$

d'où : $\left|\Psi(t)\right\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{-\frac{i}{\hbar}E_- t}\left|\Psi_-\right\rangle + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{-\frac{i}{\hbar}E_+ t}\left|\Psi_+\right\rangle$

L'amplitude de probabilité de trouver le système à l'instant t dans l'état excité $\left|e\right\rangle$ s'écrit alors :

$$\langle e|\Psi(t)\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{-\frac{i}{\hbar}E_- t}\langle e|\Psi_-\rangle + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{-\frac{i}{\hbar}E_+ t}\langle e|\Psi_+\rangle$$

$$= \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[e^{-\frac{i}{\hbar}E_+ t} - e^{-\frac{i}{\hbar}E_- t}\right]$$

d'où la probabilité :

$$P_{|g\rangle\to|e\rangle} = \left|\langle e|\Psi(t)\rangle\right|^2 = \frac{1}{2}\sin^2\theta\left[1-\cos\left(\frac{E_+ - E_-}{\hbar}t\right)\right] = \frac{1}{2}\sin^2\theta\left[1-\cos\Omega_1 t\right]$$

$$\boxed{P_{|g\rangle\to|e\rangle} = \frac{1}{2}\sin^2\theta\left[1-\cos\Omega_1 t\right]}$$

Ou bien encore :

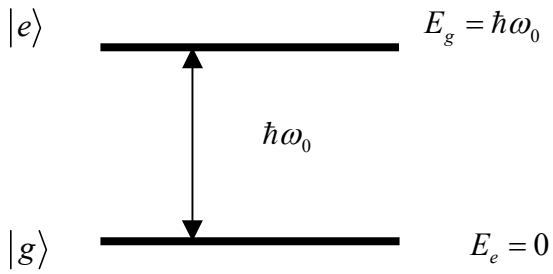
Le calcul de $P_{|e\rangle\to|g\rangle}$ *est très simple si l'on considère l'évolution du spin fictif servant à décrire le système à deux niveaux. En effet, son évolution au cours du temps se réduit à la précession de Larmor autour de* $\vec{B}$ *(champ effectif). Au cours de cette précession, l'angle* θ *entre le spin et la direction* $\vec{n}(\theta)$ *reste constant. A l'instant* t*, le spin pointe dans la direction* $\vec{n}(t)$ *faisant un angle* α *avec* Oz *: l'angle du dièdre formé par les plans* $\left(Oz,\vec{n}(\theta)\right)$ et $\left(\vec{n}(\theta),\vec{n}(t)\right)$ *est égal à* $\Omega_1 t$ *. Il est rappelé dans l'énoncé que :*

$$\cos\alpha = \cos^2\theta + \sin^2\theta\cos\Omega_1 t$$

Or, lorsque le spin pointe dans une direction faisant l'angle α avec Oz, *la probabilité de le trouver dans l'état* $|g\rangle$ *est égale (d'après* ***1.1.****) à* $\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1-\cos\alpha}{2}$. *En utilisant la formule de trigonométrie sphérique précédente, on en déduit que :* $P_{|e\rangle\to|g\rangle}=\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1}{2}\sin^2\theta\left(1-\cos\Omega_1 t\right)$

formule identique à celle trouvée précédemment mais dont nous donnons une interprétation purement géométrique.

2. Interaction avec un champ classique



Considérons un atome à deux niveaux (par exemple un atome d'alcalin tel que le Rb ou le Cs dans un état de Rydberg circulaire c'est-à-dire dans un état **très excité** (par effets Stark successifs) où l'électron de valence appartient à une couche très élevée $\left(\text{nombre quantique principal } n\sim 50\right)$, l et $|m|$ maximum, et pour lequel l'interaction entre l'électron de valence et le reste du cortège électronique est négligeable. Appelons $|g\rangle$ son état fondamental d'énergie E_g prise comme énergie de référence $\left(E_g=0\right)$ et $|e\rangle$ un état excité d'énergie $E_e=\hbar\omega_0$.

Dans la base $\{|g\rangle,|e\rangle\}$,où les vecteurs sont pris dans cet ordre, l'Hamiltonien d'évolution libre H_0 s'écrit :

$$H_0 = \hbar\omega_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

L'interaction de cet atome à deux niveaux avec une onde plane électromagnétique peut être décrite, dans l'approximation dipolaire électrique, par le terme additionnel

$$H_1 = -\vec{D}.\vec{E} = -\vec{D}.\vec{E}_0 \cos\left(\omega t + \phi\right)$$

où $\vec{D} = q\vec{R}$ est l'opérateur dipôle électrique de l'atome : et $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos\left(\omega t + \phi\right)$ le champ électrique de l'onde électromagnétique.

Dans la base $\{|g\rangle,|e\rangle\}$ l'expression de cet opérateur dipolaire électrique est

$$\vec{D} = \vec{d}_{eg}\left(|g\rangle\langle e| + |e\rangle\langle g|\right) \text{ où } \vec{d}_{eg} = \langle e|q\vec{R}|g\rangle$$

Définissons la fréquence libre de Rabi par

$$\hbar\Omega_0 = -\vec{d}_{eg}.\vec{E}_0 = -\langle e|\vec{D}.\vec{E}_0|g\rangle \qquad (2)$$

En choisissant des facteurs de phase adéquates pour les états $|g\rangle$ et $|e\rangle$ (ce qui ne modifie pas les états en question), il est toujours possible de faire en sorte que la fréquence libre de Rabi Ω_0 soit réelle et positive

$$\hbar\Omega_0 = -\langle e|\vec{D}.\vec{E}_0|g\rangle = -\langle g|\vec{D}.\vec{E}_0|e\rangle > 0$$

Le Hamiltonien de l'atome couplé au champ s'écrit maintenant :

$$H(t) = H_0 + H_1(t) = \hbar \begin{pmatrix} 0 & \Omega_0 \cos(\omega t + \phi) \\ \Omega_0 \cos(\omega t + \phi) & \omega_0 \end{pmatrix} \qquad (3)$$

L'évolution temporelle d'un état quelconque $|\Psi(t)\rangle = a(t)|g\rangle + b(t)|e\rangle$ est régie par l'équation de Schrödinger $i\hbar \frac{d}{dt}|\Psi(t)\rangle = H(t)|\Psi(t)\rangle$ qui, projeter sur les deux vecteurs de base $|g\rangle$ et $|e\rangle$ donne l'évolution temporelle des coefficients a et b :

$$\begin{cases} i\dot{a}(t) = \Omega_0 \cos(\omega t + \phi) b(t) \\ i\dot{b}(t) = \Omega_0 \cos(\omega t + \phi) a(t) + \omega_0 b(t) \end{cases} \qquad (4)$$

Il est pratique d'introduire une nouvelle base $\left\{ |\gamma\rangle \equiv |g\rangle, |\varepsilon\rangle \equiv e^{-i\omega_0 t}|e\rangle \right\}$ qui présente le mérite d'incorporer la précession libre.

Soient $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ les nouveaux coefficients de $|\Psi(t)\rangle$ dans cette base :

$$|\Psi(t)\rangle = \alpha(t)|\gamma\rangle + \beta(t)|\varepsilon\rangle$$

Leur évolution temporelle, d'après (4), est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{\alpha}(t) = -i\beta(t)\Omega_0 e^{-i\omega_0 t} \cos(\omega t + \phi) \\ \dot{\beta}(t) = -i\alpha(t)\Omega_0 e^{i\omega_0 t} \cos(\omega t + \phi) \end{cases} \qquad (5)$$

En écrivant le champ comme la superposition de deux champs tournant en sens opposé, ce qui revient à écrire que $\cos(\omega t+\phi)=\frac{1}{2}\left(e^{i(\omega t+\phi)}+e^{-i(\omega t+\phi)}\right)$, la première équation du système (5), par exemple, s'intègre formellement de la façon suivante :

$$\alpha(t)=\alpha(t_0)-i\Omega_0\int_{t_0}^{t}\beta(t')\frac{e^{i\phi}}{2}\left[e^{i(\omega-\omega_0)t'}+e^{-i(\omega+\omega_0)t'}\right]dt'$$

Au voisinage de la résonance $(\omega\sim\omega_0)$, $|\omega+\omega_0|>>|\omega-\omega_0|$, le terme en $e^{-i(\omega+\omega_0)t'}$ oscille donc beaucoup plus rapidement que celui en $e^{i(\omega-\omega_0)t'}$ et donne une contribution négligeable à l'intégrale (il s'annule en moyenne).
On appelle « approximation de l'onde tournante » ou « rotating wave approximation » (RWA) le fait de négliger les termes de haute fréquence en $(\omega+\omega_0)$ par rapport aux termes variant à la fréquence $(\omega-\omega_0)$.
En appelant $\delta=\omega-\omega_0$ le désaccord par rapport à la résonance (detuning) de la lumière du laser par rapport à la transition atomique, le système (5) se réécrit suivant l'approximation RWA :

$$\begin{cases}\dot{\alpha}(t)=-i\beta(t)\frac{\Omega_0}{2}e^{i(\delta t+\phi)}\\ \dot{\beta}(t)=-i\alpha(t)\frac{\Omega_0}{2}e^{-i(\delta t+\phi)}\end{cases}\Leftrightarrow i\hbar\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\alpha(t)\\ \beta(t)\end{pmatrix}=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & \Omega_0 e^{i(\delta t+\phi)}\\ \Omega_0 e^{-i(\delta t+\phi)} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha(t)\\ \beta(t)\end{pmatrix} \quad (6)$$

et par conséquent, le Hamiltonien de l'atome couplé au champ s'écrit dans la base $\{|\gamma\rangle,|\varepsilon\rangle\}$

$$H(t)=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & \Omega_0 e^{i(\delta t+\phi)}\\ \Omega_0 e^{-i(\delta t+\phi)} & 0\end{pmatrix} \quad (7)$$

2.2. Pour rendre cet opérateur indépendant du temps, introduisons la transformation unitaire ($RR^{\dagger}=I$).

2.2.a.
$$R(t)=\begin{pmatrix}e^{-i\frac{\delta t}{2}} & 0\\ 0 & e^{i\frac{\delta t}{2}}\end{pmatrix}$$

Soit $\left|\Phi(t)\right\rangle=c(t)\left|\gamma\right\rangle+d(t)\left|\varepsilon\right\rangle$ le transformé par R de $\left|\Psi(t)\right\rangle=\alpha(t)\left|\gamma\right\rangle+\beta(t)\left|\varepsilon\right\rangle$.

Il vient : $\left|\Phi(t)\right\rangle=R\left|\Psi(t)\right\rangle\Rightarrow\begin{cases}c(t)=\alpha(t)e^{-i\frac{\delta t}{2}}\\ d(t)=\beta(t)e^{i\frac{\delta t}{2}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha(t)=c(t)e^{i\frac{\delta t}{2}}\\ \beta(t)=d(t)e^{-i\frac{\delta t}{2}}\end{cases}$

Physiquement, les coefficients $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ décrivent les états quantiques dans un référentiel tournant à la « fréquence » δ par rapport au plan $\left[\left|\gamma\right\rangle,\left|\varepsilon\right\rangle\right]$.

2.2.b. En substituant dans (6) on obtient le système :

$$\begin{cases}i\hbar\dot{c}(t)=\frac{\hbar}{2}\left[\delta c(t)+\Omega_0 e^{i\phi}d(t)\right]\\ i\hbar\dot{d}(t)=\frac{\hbar}{2}\left[\Omega_0 e^{-i\phi}c(t)-\delta d(t)\right]\end{cases} \quad (7)$$

d'où la nouvelle expression de l'Hamiltonien **rendu indépendant du temps** grâce à la transformation unitaire $R(t)$:

$$H_R = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \delta & \Omega_0 e^{i\phi} \\ \Omega_0 e^{-i\phi} & -\delta \end{pmatrix}$$

dont les valeurs propres sont $E_\pm = \pm\frac{\hbar\Omega_1}{2}$ où la fréquence de Rabi non résonnante (ou fréquence de Rabi dite « généralisée ») est définie par $\Omega_1 = \sqrt{\Omega_0^2 + \delta^2}$

Remarque :

On peut évidemment écrire directement

$$H_R = RHR^\dagger \text{ soit } H_R = \frac{\hbar}{2}\underbrace{\begin{pmatrix} e^{-i\frac{\delta t}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\delta t}{2}} \end{pmatrix}}_{R}\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \Omega_0 e^{i(\delta t+\phi)} \\ \Omega_0 e^{-i(\delta t+\phi)} & 0 \end{pmatrix}}_{H}\underbrace{\begin{pmatrix} e^{i\frac{\delta t}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\delta t}{2}} \end{pmatrix}}_{R^\dagger}$$

$$H_R = H_R = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \delta & \Omega_0 e^{i\phi} \\ \Omega_0 e^{-i\phi} & -\delta \end{pmatrix}$$

La différence d'énergie entre les deux niveaux est

$$\Delta E = \hbar\sqrt{\Omega_0^2 + \delta^2} = \hbar\delta\left[1 + \left(\frac{\Omega}{\delta}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \approx \hbar\left(\delta + \frac{\Omega_0^2}{2\delta}\right)$$

On observe que cette valeur augmente en présence d'une lumière non résonnante. Sans lumière $(\Omega_0 = 0)$ *la différence d'énergie devient* $\hbar\delta$ *. Le terme additionnel* $\frac{\Omega_0^2}{2\delta}$ *est dû à la présence de la lumière. Cet effet est appelé « déplacement lumineux » (« light shift ») ou « effet Stark dynamique ». Il a été mis en évidence expérimentalement pour la première fois par Claude Cohen-Tannoudji.*

2.2.c.Formule de Rabi

L'intégration du système (7) (par exemple, grâce aux formules de Fraser-Duncar et Collard) donne :

$$\begin{cases} c(t) = e^{i\frac{\delta}{2}(t-t_0)}\left[\left\{\cos\frac{\Omega_1}{2}(t-t_0) + i\cos\theta\sin\frac{\Omega_1}{2}(t-t_0)\right\}c(t_0) + e^{i\delta t_0}\left\{-i\sin\theta e^{i\phi}\sin\frac{\Omega_1}{2}(t-t_0)\right\}d(t_0)\right] \\ d(t) = e^{-i\frac{\delta}{2}(t-t_0)}\left[\left\{-i\sin\theta e^{-i\phi}\sin\frac{\Omega_1}{2}(t-t_0)\right\}e^{-i\delta t_0}c(t_0) + \left\{\cos\frac{\Omega_1}{2}(t-t_0) - i\cos\theta\sin\frac{\Omega_1}{2}(t-t_0)\right\}d(t_0)\right] \end{cases}$$

où $\boxed{\sin\theta = \frac{\Omega_0}{\Omega_1}, \quad \cos\theta = \frac{-\delta}{\Omega_1} \quad (0 \le \theta \le \pi)}$

Supposons qu'au temps t_0 on soumette l'atome à un pulse de lumière d'une durée τ (temps d'interaction atome-champ) inférieure au temps de vie des niveaux $|g\rangle$ et $|e\rangle$ $(\sim 30\ \text{ms})$. D'après les expressions précédentes de $c(t)$ et $d(t)$, les **amplitudes de probabilité** de trouver l'atome dans les états $|\gamma\rangle$ ou $|\varepsilon\rangle$ sont respectivement données par :

$$\begin{cases} c(t_0+\tau) = e^{i\frac{\delta\tau}{2}}\left[\left\{\cos\dfrac{\Omega_1\tau}{2} + i\cos\theta\sin\dfrac{\Omega_1\tau}{2}\right\}c(t_0) + \left\{-i\sin\theta\sin\dfrac{\Omega_1\tau}{2}\right\}d(t_0)e^{i(\delta t_0+\phi)}\right] \\ d(t_0+\tau) = e^{-i\frac{\delta\tau}{2}}\left[\left\{-i\sin\theta\sin\dfrac{\Omega_1\tau}{2}\right\}c(t_0)e^{-i(\delta t_0+\phi)} + \left\{\cos\dfrac{\Omega_1\tau}{2} - i\cos\theta\sin\dfrac{\Omega_1\tau}{2}\right\}d(t_0)\right] \end{cases}$$

- **En l'absence de champ appliqué** la fréquence de Rabi est telle que : $\Omega_1 = |\delta|$ et $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{-\delta}{|\delta|} \\ \sin\theta = 0 \end{cases}$

Les équations précédentes montrent que **les coefficients** $c(t)$ et $d(t)$ **ne varient pas**.

- Si on applique à $t = t_0$ une **lumière résonnante** $(\delta = 0)$ à un atome dans l'état fondamental $|g\rangle$, $(c(t_0) = 1, d(t_0) = 0, \sin\theta = 1)$ son évolution est donnée par :

$$d(t_0+\tau) = -i\sin\left(\frac{\Omega_1\tau}{2}\right)e^{-i\phi}$$

La probabilité $P_{|g\rangle\to|e\rangle}$ de trouver l'atome dans le niveau excité $|e\rangle$ après un pulse de longueur τ est donnée par la **formule de Rabi**

$$\boxed{P_{|g\rangle\to|e\rangle}=\left|d\left(t_0+\tau\right)\right|^2=\frac{1}{2}\left[1-\cos\left(\Omega_1\tau\right)\right]}$$

- **Hors résonance** $\left(\delta\neq 0,\ \sin\theta=\frac{\Omega_0}{\Omega_1}\neq 1\right)$ on a évidemment

$$P_{|g\rangle\to|e\rangle}=\frac{1}{2}\sin^2\theta\left[1-\cos\left(\Omega_1\tau\right)\right]=\frac{1}{2}\underbrace{\frac{\Omega_0^2}{\Omega_0^2+\delta^2}}_{\Omega_1^2}\left[1-\cos\left(\Omega_1\tau\right)\right]$$

$$\boxed{P_{|g\rangle\to|e\rangle}=\frac{1}{2}\frac{\Omega_0^2}{\Omega_0^2+\delta^2}\left[1-\cos\left(\Omega_1\tau\right)\right]}$$

La probabilité de transition oscille à la pulsation de Rabi généralisée $\Omega_1=\sqrt{\Omega_0^2+\delta^2}$ entre les valeurs 0 et la valeur maximum $P^{\max}_{|g\rangle\to|e\rangle}=\sin^2\theta=\frac{\Omega_0^2}{\Omega_0^2+\delta^2}$.

$P^{\max}_{|g\rangle\to|e\rangle}$ a un comportement résonnant lorsque ω varie autour de la fréquence de Bohr ω_0. La loi de variation correspondante est une loi Lorentzienne de largeur à mi hauteur $2\Omega_0$. On constate que la courbe s'élargit

lorsque l'intensité de l'onde électromagnétique augmente, proportionnellement à l'amplitude du champ électrique.

2.2.d.

A la résonance $\left(\delta = 0, \Omega_1 = \Omega_0\right)$, $P^{\max}_{|g\rangle \to |e\rangle} = 1$. Il est donc possible de transférer la totalité des atomes du niveau $|g\rangle$ au niveau $|e\rangle$ en choisissant une durée d'impulsion τ égale à $\dfrac{\pi}{\Omega_0}$.

Une impulsion ayant cette durée s 'appelle une « **impulsion** π ».

De même si l'impulsion a une durée $\tau = \dfrac{\pi}{2\Omega_0}$, on aura ce qu'on appelle une « **impulsion** $\dfrac{\pi}{2}$ ». On a alors :

$$\begin{cases} c(\tau) = \dfrac{e^{i\frac{\delta\tau}{2}}}{\sqrt{2}} \\ d(\tau) = \dfrac{e^{-i\frac{\delta\tau}{2}}}{\sqrt{2}}\left(-ie^{-i\phi}\right) \end{cases}$$

La probabilité de présence dans chacun des états $|g\rangle$ et $|e\rangle$ **n'évolue plus une fois le champ « débranché ».**

Il ne faut pourtant pas en conclure que le système est figé. Pour s'en convaincre, choisissons une observable ayant des éléments de matrice entre $|g\rangle$ et $|e\rangle$. *Par exemple dans le cas d'une transition dipolaire électrique, considérons la composante* $D_\varepsilon = \vec{D}.\vec{\varepsilon}$ *de l'opérateur dipolaire électrique, représenté dans la base* $\{|e\rangle,|g\rangle\}$ *par :*

$$D_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & d \\ d & 0 \end{pmatrix}$$

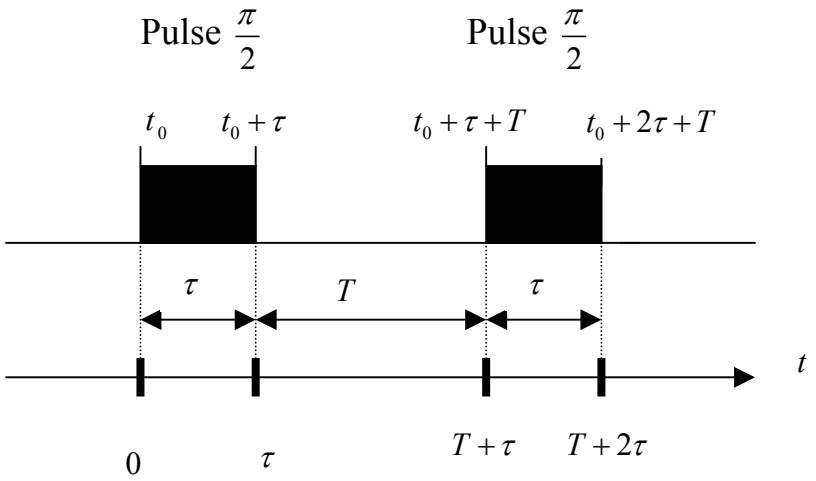
elle a une valeur moyenne $\langle D_\varepsilon \rangle(t) = -d\sin(\omega_0 t + \phi)$. *On constate que le dipôle oscille à la fréquence de Bohr* ω_0. *Dans le cas d'une transition optique, ceci se traduit par une émission de lumière à cette fréquence il s'agit d'une* ***émission induite.***
Bien qu'émise à la fréquence ω_0, *cette lumière a des propriétés différentes de la lumière de fluorescence produite par* ***émission spontanée****. Ces propriétés particulières sont liées à la* ***cohérence de l'émission****. L'oscillation du dipôle se produit en effet avec une phase reliée de façon univoque à celle de l'onde excitatrice.*

Si on a une assemblée d'atomes préparés par la même impulsion $\frac{\pi}{2}$, *ils vont tous émettre avec* ***la même phase****, à la différence d'une assemblée d'atomes émettant par émission spontanée avec des phases aléatoires.*

3. Franges de Ramsey

3.1. Considérons un atome à deux niveaux couplé à un champ électromagnétique tel que décrit précédemment. On suppose que cet atome est à l'instant $t=0$ dans l'état fondamental $|g\rangle$ $\left(c(t=0)=1, \quad d(t=0)=0\right)$. On lui fait subir une « séquence micro-onde $\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}$ » constituée de deux pulses $\frac{\pi}{2}$ $\left(\Omega_1\tau=\frac{\pi}{2}\right)$ de durée d'interaction

τ et séparés par un temps T (temps de vol) (cf. figure ci-dessous). On suppose que la fréquence micro-onde est très proche de la fréquence de Bohr de la transition, de telle sorte que $\delta << \Omega_0, \theta \sim \frac{\pi}{2}\left(\sin\theta \sim 1, \cos\theta \sim 0\right)$.



Par conséquent $c\left(t_0+\tau\right)$ et $\mathrm{d}\left(t_0+\tau\right)$ peuvent s'exprimer en bonne approximation par :

$$\begin{cases} c\left(t_0+\tau\right) = \dfrac{e^{i\frac{\delta\tau}{2}}}{\sqrt{2}}\left(c\left(t_0\right) - id\left(t_0\right)e^{i\left(\delta t_0+\phi\right)}\right) \\ d\left(t_0+\tau\right) = \dfrac{e^{-i\frac{\delta\tau}{2}}}{\sqrt{2}}\left(d\left(t_0\right) - ic\left(t_0\right)e^{-i\left(\delta t_0+\phi\right)}\right) \end{cases} \quad (8)$$

Entre les deux pulses (absence de champ), on a vu précédemment que les amplitudes de probabilité ne varient pas. Ainsi en appliquant les équations (8) au premier pulse $\frac{\pi}{2}$ nous avons

$$\begin{cases} c\left(T+\tau\right)=c\left(\tau\right)=\dfrac{e^{i\frac{\delta\tau}{2}}}{\sqrt{2}} \\ d\left(T+\tau\right)=d\left(\tau\right)=\dfrac{e^{-i\frac{\delta\tau}{2}}}{\sqrt{2}}\left(-ie^{-i\phi}\right) \end{cases}$$

On en déduit que : $\boxed{P_{|g\rangle\to|e\rangle}=\left|d\left(T+\tau\right)\right|^2=\frac{1}{2}}$ **après le premier pulse** $\frac{\pi}{2}$.

En appliquant une nouvelle fois les équations (8) avec les conditions initiales précédentes on a donc après le second pulse $\frac{\pi}{2}$

$$\begin{cases} c\left(T+2\tau\right)=\dfrac{1}{2}\left[e^{i\delta\tau}-i\left(-ie^{-i\phi}\right)e^{i\left[\delta\left(T+\tau\right)+\phi\right]}\right]=\dfrac{1}{2}e^{i\delta\tau}\left(1-e^{i\delta T}\right) \\ d\left(T+2\tau\right)=-\dfrac{i}{2}e^{-i\left(\delta\tau+\phi\right)}\left(1+e^{-i\delta T}\right) \end{cases}$$

- La probabilité après la séquence $\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)$ de trouver l'atome dans l'état fondamental $|g\rangle$ est

$$\left|c\left(T+2\tau\right)\right|^2=\frac{1}{2}\left[1-\cos\left(\delta T\right)\right]$$

Cette probabilité n'est fonction que du déphasage $\varphi=\delta T$ produite par le temps de vol T entre les deux pulses.

- De même la probabilité de trouver l'atome dans l'état excité $|e\rangle$ **après la séquence** $\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)$ est :

$$\boxed{P_{|g\rangle\to|e\rangle}=\left|d\left(T+2\tau\right)\right|^2=\frac{1}{2}\left[1+\cos\left(\delta T\right)\right]}$$

On observe un **phénomène d'interférences entre les deux « chemins » suivants** :

- l'atome est excité par le premier pulse $\frac{\pi}{2}$ avec une probabilité $\frac{1}{2}$
- l'atome n'est pas excité par le premier pulse $\frac{\pi}{2}$ mais par le second avec une probabilité $\frac{1}{2}$

la séquence $\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)$ compose ces deux amplitudes de probabilité et la probabilité d'excitation contient par conséquent un terme d'interférence (dû à l'élévation au carré du module de la somme des amplitudes de probabilité).

Hors résonance ($\left(\delta \neq 0, \sin\theta = \frac{\Omega_0}{\Omega_1} \neq 1\right)$

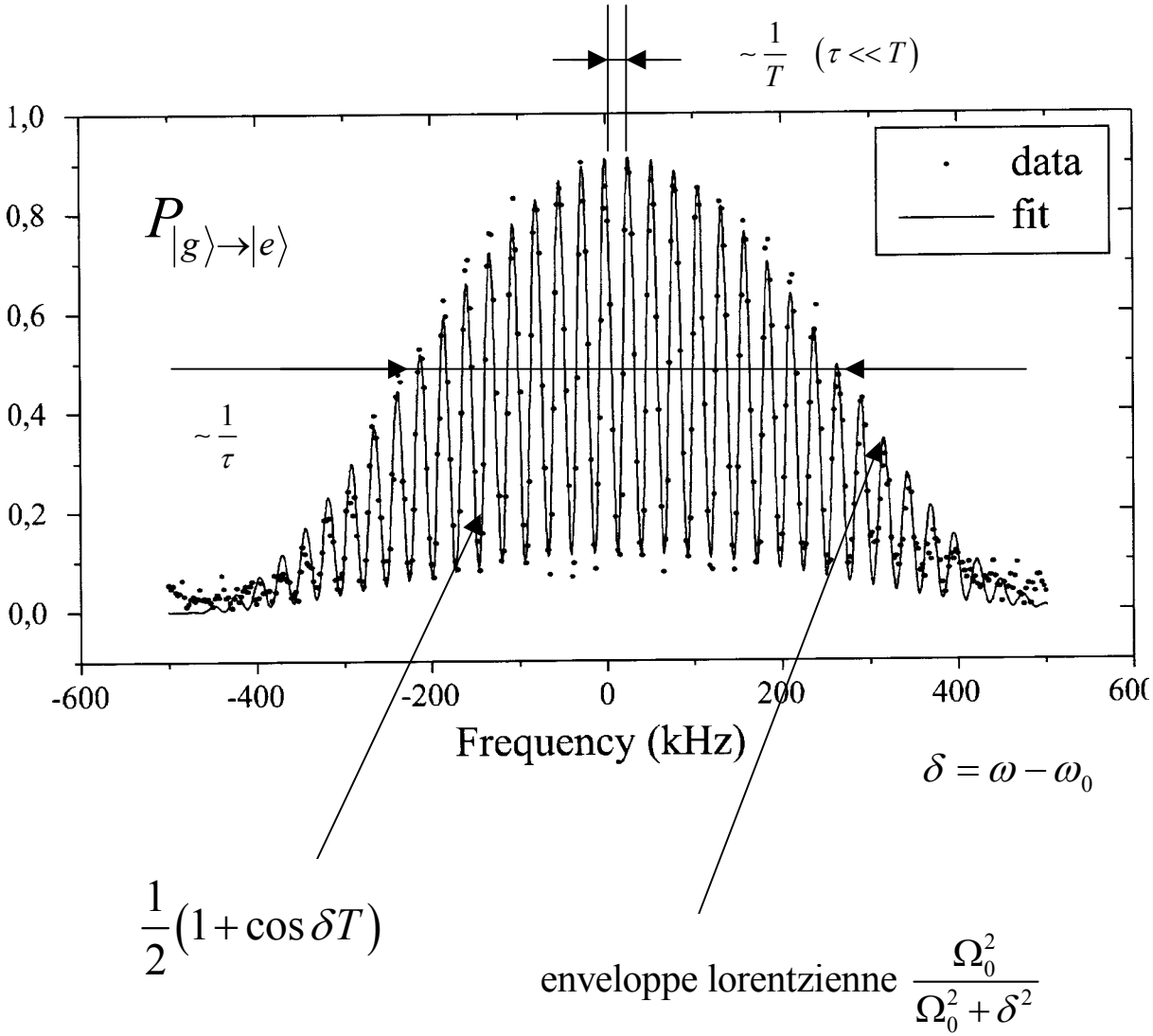
$$\boxed{P_{|g\rangle \to |e\rangle} = \frac{1}{2}\frac{\Omega_0^2}{\Omega_0^2 + \delta^2}\left[1 + \cos\left(\delta T\right)\right]}$$

3.2. On obtient maintenant une Lorentzienne $\frac{\Omega_0^2}{\Omega_0^2 + \delta^2}$ modulée par une fonction sinusoïdale de pulsation δ très faible, $\frac{1}{2}\left[1 + \cos\left(\delta T\right)\right]$, permettant ainsi de déterminer la résonance (maximum de la Lorentzienne $\frac{\Omega_0^2}{\Omega_0^2 + \delta^2}$) avec une bien meilleure précision (cf. figure ci-dessous).

(expérimentalement, on observe l'intensité de fluorescence, proportionnelle au nombre d'atomes qui ont été portés dans l'état excité)

$\left(|g\rangle \equiv (n = 50, m = 49); |e\rangle \equiv (n = 51, m = 50)\right)$. Durée de vie des niveaux exceptionnellement longue $\left(\sim 30 \text{ ms}\right)$, très fort moment dipolaire $\left(d \sim 1250 \text{ ua } \left(1\text{ua} = qa_0 \approx 10^{-29} \text{ C}\right)\right)$

$\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \approx 51 \text{ GHz}$. Faisceau laser donnant un éclairement $\Pi = \frac{\varepsilon_0 c}{2}|E_0|^2 \sim 10^3 \text{ W.m}^{-2}$. Pulsation de Rabi du vide $\Omega_0 = \frac{2dE_0}{\hbar} \sim 2\pi \times 50 \text{ kHz}$



Courbe expérimentale obtenue avec des atomes de Rubidium au LKB