LE « PARADOXE » EPR & L'INEGALITE DE BELL

Je pense qu'il vaut mieux dire tout de suite que personne ne comprend la mécanique quantique...Si vous le pouvez, évitez de vous dire : « Mais comment peut-il en être ainsi ? », sinon vous serez submergés, noyés et entraînés vers un gouffre dont personne encore n'a réussi à s'échapper. Personne ne sait comment il peut en être ainsi.

RICHARD FEYNMAN

Les physiciens ont réagi de deux manières différentes à la théorie quantique. Une première attitude a consisté à appliquer cette théorie aux phénomènes naturels, ce qui a permis le développement de la théorie quantique des solides, de la théorie quantique des champs et de la physique nucléaire. La seconde orientation, plus philosophique, concerne les problèmes d'interprétation de la théorie.

La majorité des physiciens en exercice ne s'intéressent pas vraiment aux problèmes d'interprétation. Pragmatiques, les théoriciens trouvent leur motivation dans les nouvelles expériences et dans les idées liées à ces expériences. Ils croient fermement à l'interprétation de Copenhague (∗), à moins qu'une expérience ne les oblige à penser le contraire. Le problème de l'interprétation de la théorie quantique n'a eu qu'un faible impact sur la compréhension de la physique nucléaire, de la physique des particules élémentaires ou de la construction des transistors et autres composants électroniques.

(∗) *L'interprétation ,dite de Copenhague, due à Heisenberg et à Bohr en 1927,est sommairement la suivante :*
- *La réalité quantique est statistique et non pas certaine. L'univers microscopique ne nous est connu que sous forme de distributions statistiques de mesures, distributions qui peuvent être déterminées par la physique.*
- *Parler des propriétés physiques d'un objet quantique sans spécifier très précisément le dispositif expérimental grâce auquel nous souhaitons le mesurer n'a pas de sens. La réalité quantique est en partie une réalité crée par l'observateur. Aucun phénomène n'est **réel** tant qu'il n'est pas **observé**. La théorie quantique indique que la structure du monde physique dépend de l'observation qui en est faite.*

En résumé, l'interprétation de Copenhague de la théorie quantique rejette le déterminisme pour lui préférer la nature statistique de la réalité ; de plus, elle rejette l'objectivité et soutient que la réalité matérielle dépend en partie de la façon dont nous choisissons de l'observer.

Cet état de choses n'empêche pas la recherche sur les questions d'interprétation de se poursuivre. Philosophes ou physiciens ne peuvent s'empêcher de se poser la grande question : « *Qu'est-ce que la réalité quantique ?* ». Cette interrogation a permis de préciser quelque peu la nature de la réalité quantique. Au fil des années, toute une série « d'expériences par la pensée » – l'expérience des deux trous d'Young, celle du chat de Schrödinger – ou réelles (Alain Aspect : *Phys. Rev. Lett.* **47**,460 (1981), Alain Aspect, Grangier & Roger : *Phys. Ev. Lett.* **49**, 91, (1982)), ont été conçues dans le but de mettre en évidence l'étrangeté quantique, ces caractéristiques de la réalité quantique qui diffèrent tant du réalisme naïf. Deux de ces expériences, celle d'**EPR** et celle de **BELL**, ont été largement discutées par les philosophes et les physiciens. A la lumière de ces deux expériences, examinons la nature de la réalité quantique.

L'essence de l'interprétation de Copenhague est que le monde doit être vraiment observé pour être objectif. Einstein fut parmi les plus virulents critiques de ce point de vue. Par la suite, il cessa de critiquer la logique de cette interprétation pour concentrer ses attaques sur un point bien particulier : la théorie quantique offre-t-elle ou non une **description complète** de la réalité ?

En 1935, Albert **E**instein, Boris **P**odolsky et Nathan **R**osen rédigèrent un article (*Phys.Rev.47, 777 (1935))* dans lequel ils proposaient une « expérience par la pensée » (*Gedankenexperiment*) conduisant à ce que l'on nomme souvent : le paradoxe d'**EPR**. En fait, ce nom est mal choisi ; il n'y a pas de paradoxe, puisqu'il n'y a pas de contradiction. Cet article traduisait la pensée d'Einstein, à savoir que l'interprétation orthodoxe de Copenhague était incompatible avec la réalité objective. Sur ce point Einstein avait raison. Mais cet article avait pour but principal de montrer que la théorie quantique est incomplète en son état actuel – il y a certains éléments objectifs de la réalité qu'elle ne décrit pas. Ainsi Einstein l'écrira plus tard, « *je suis par conséquent enclin à croire que la description de la mécanique quantique….doit être considérée comme une description incomplète et indirecte de la réalité, qui devra un jour être remplacée par une interprétation plus complète et plus directe* ».

Etant donné qu'il n'existe aucune faille logique dans l'interprétation de Copenhague et qu'aucune expérience ne parvient à contredire les prévisions de la théorie quantique, comment EPR étaient-ils parvenus à cette étonnante conclusion ? Pour le comprendre, exposons au préalable, dans leurs grandes lignes, les hypothèses que EPR posèrent avant de décrire leur « expérience par la pensée ».

L'hypothèse de l'existence d'une réalité objective signifie que le **monde existe dans un état défini**. Selon l'interprétation de Copenhague, élaborée par Niels Bohr et reprise par la plupart des physiciens, la théorie quantique invalide cette hypothèse ; Einstein & al pensait cependant que l'on ne peut pas rejeter l'idée que quelques propriétés mesurables du monde microscopique au moins puissent avoir une signification objective. Pour eux, aucune vision raisonnable de la réalité ne pouvait rejeter totalement l'objectivité ; **l'objectivité était donc la première de leurs hypothèses**.

Einstein était profondément troublé par **l'indéterminisme** de la théorie quantique. Mais la raison pour laquelle il s'obstinait à refuser l'image de la réalité que lui offrait cette théorie était autre. Plus encore qu'au déterminisme, Einstein tenait au principe de **causalité locale** – des événements lointains ne peuvent faire sentir instantanément leur influence sur des objets proches sans qu'il y ait **médiation**, de quelque ordre qu'elle soit. Sans faire la moindre hypothèse relative au déterminisme ou à l'indéterminisme, la thèse d'EPR avait pour but de montrer que la théorie quantique viole le principe de causalité locale. C'est pourquoi l'argument EPR ébranla la confiance des physiciens qui, eux aussi, tenaient le principe de causalité locale pour une chose sacrée.

Nous pouvons donner une définition précise de la causalité en imaginant que nous construisions une surface fictive autour de chaque objet. Le principe de causalité locale stipule alors que tout ce qui influence l'objet doit être imputé soit à des modifications locales de l'objet lui-même, soit à une certaine énergie qui traverse la surface entourant l'objet. Ce principe, accepté par tous les physiciens, occupe une place centrale dans toute réflexion ayant pour objet la physique.

Munis de leur définition de l'objectivité, les auteurs de l'article EPR ont montré que la théorie quantique ou bien viole le principe de causalité locale, ou bien est incomplète. Personne ne souhaitant réellement abandonner la causalité, ils en conclurent que la théorie quantique était incomplète. Voici résumé leur argument.

Deux particules 1 et 2 sont disposées l'une près de l'autre ; soient q_1 et q_2 respectivement leur position, repérée par rapport à un point origine commun. Supposons que ces particules se déplacent et soient p_1 et p_2 leurs quantité de mouvement. Bien que le principe d'incertitude de Heisenberg exige que nous ne puissions mesurer simultanément p_1 et q_1, ou encore p_2 et q_2, rien ne nous empêche par contre de mesurer simultanément la *somme* des quantités de mouvement $p = p_1 + p_2$ et la *distance* séparant les particules $q = q_1 - q_2$ avec exactitude. Les deux particules sont en interaction et la particule 2 s'envole vers Londres alors que la particule 1 reste à New York. Ces deux villes sont si éloignées qu'il semble raisonnable de penser que ce que nous faisons à la particule 1, restée à New York, n'influence en aucune façon la particule 2, qui se trouve à présent à Londres, en conformité avec le principe de causalité locale. Par ailleurs, nous savons que la quantité de mouvement totale est conservée – elle est la même avant et après l'interaction. Si nous mesurons la quantité de mouvement p_1 de la particule restée à NY, nous pouvons soustraire la valeur obtenue à la quantité de mouvement totale p et connaître ainsi la quantité de mouvement p_2 de la particule qui se trouve à Londres : $p_2 = p - p_1$. De même, en mesurant exactement la position q_1 de la particule qui est à NY, nous pouvons en déduire la position de la particule 2, en soustrayant à q_1 la distance (connue) qui sépare les deux particules : $q_2 = q - q_1$. La mesure de la position q_1 de la particule 1 à NY va modifier notre précédente mesure de la quantité de mouvement p_1, mais ne devrait pas (si nous admettons le principe de causalité locale) modifier la quantité de mouvement p_2 que nous venons de calculer pour la particule qui se trouve à Londres. Ainsi, nous avons déduit à la fois la quantité de mouvement p_2 et la position q_2 de la particule de Londres et ce, sans que ces mesures soient entachées de la moindre incertitude. Or, le principe de Heisenberg nous dit qu'il est impossible de déterminer simultanément et sans la moindre incertitude la position et la quantité de mouvement d'une particule. Autrement dit, en admettant le principe de causalité locale, nous avons fait une chose qui, selon la théorie quantique, est impossible. Tout se passe comme si le fait de mesurer la particule 1 à NY avait influencé instantanément la particule 2 à Londres. Fort de cet argument, EPR concluent que, soit nous admettons que la théorie quantique est incomplète – il existe un moyen de mesurer simultanément la position et la quantité de mouvement. Rares sont les physiciens qui admettent l'éventualité de ces « moyens télépathiques » ; aussi devrions nous tous admettre que la théorie quantique est incomplète.

L'article EPR suscita une grande émotion parmi les philosophes et les physiciens. L'interprétation orthodoxe de la réalité quantique se trouvait ébranlée. Avant EPR, personne n'avait mis l'accent sur cette action à distance impliquée par la théorie quantique. Fallait-il en conclure, comme le faisaient EPR, que la théorie quantique ne représente pas l'ultime vision de la réalité ? Où se trouve donc la faille de leur raisonnement ? se demanda-t-on. Mais il n'y avait pas de faille. Cependant, l'une des hypothèses sur lesquelles repose cette « expérience par la pensée » nécessite d'être explicitée plus clairement. Selon EPR, les propriétés de la particule 2, telles que sa position et sa quantité de mouvement, possèdent une existence objective, alors qu'elles n'ont pas été effectivement mesurées. La position et la quantité de mouvement de la particule 2 ont été calculées à partir des mesures effectuées sur la particule 1. Ayant supposé que ces propriétés, ainsi déduites, avaient une existence objective, les auteurs de l'article EPR en ont conclu que, si la théorie quantique est exacte, elle implique une certaine forme d'action à distance.

Mais il existe une autre interprétation de cette même expérience – l'interprétation de Copenhague, qui nie l'objectivité du monde tant que l'on a pas effectué de mesure. L'initiateur de cette théorie, Bohr, dirait que la position et la quantité de mouvement de la particule 2 n'ont pas de signification objective tant qu'elles n'ont pas été directement mesurées et que, si l'on faisait effectivement ces mesures, on constaterait qu'elles obéissent à la relation d'incertitude de Heisenberg, en accord avec la théorie quantique. Ceci éviterait de conclure à une action à distance, c'est-à-dire à des interactions instantanées non locales. Contrairement à Bohr, Einstein, qui ne put jamais accepter l'idée d'une réalité créée par l'observateur, soutint que si la réalité est objective et la théorie quantique complète, alors il doit exister des effets non locaux. Mais comme par ailleurs il est impensable d'avoir à nier la causalité, Einstein en conclut que la théorie quantique était incomplète.

Les physiciens s'interrogèrent pendant plus de 30 ans sur les conclusions de l'article EPR. Peut-être une autre réalité se dissimulait-elle par-delà la réalité quantique ? C'est à cette question fondamentale que s'attaqua en 1965 John Bell, physicien irlandais travaillant au CERN. Ses recherches ne faisaient pas appel au formalisme de la théorie quantique, mais directement à l'expérience et, dans son article de 1965, Bell proposait non pas une « expérience par la pensée » (gedankenexperiment), mais une expérience véritable, démontrant que le type d'incomplétude de la théorie quantique soupçonné par EPR n'était pas possible. Il n'y avait que deux interprétations physiques de l'expérience de Bell : soit le monde était non objectif et n'existait pas dans un état défini, soit il y avait non-localité et action à distance instantanée.

L'article de Bell posait la question des **variables cachées.** Selon certains physiciens, la théorie quantique est d'une façon ou d'une autre incomplète et il existe une hypothétique théorie *subquantique* qui, sous la forme de variables cachées, contient des informations physiques supplémentaires sur l'état du monde. Si les physiciens connaissaient ces variables, ils pourraient prévoir le résultat d'une mesure donnée (au lieu de ne donner que des probabilités) et même déterminer simultanément la position et la quantité de mouvement des particules. Cette théorie subquantique permettrait un retour au déterminisme et à l'objectivité.

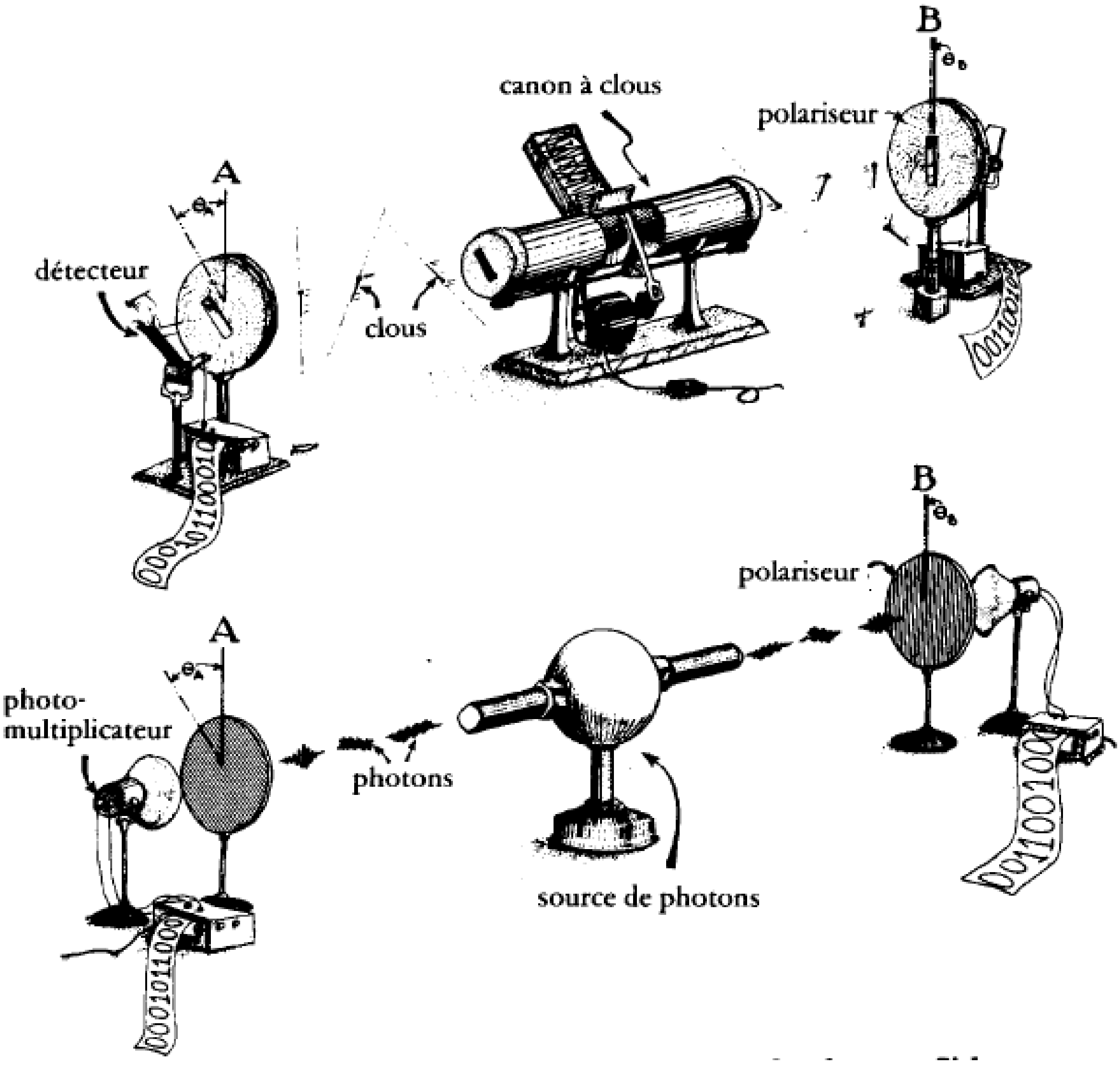
On pourrait croire que, puisque la théorie quantique est expérimentalement correcte, une théorie subquantique impliquant des variables et une réalité cachées n'a pas de sens. Le mathématicien von Neumann ayant par ailleurs démontré qu'il ne peut pas exister de telles variables dissimulées derrière le voile de la réalité quantique, plus personne ne songeait aux variables cachées. La démonstration de von Neumann était logiquement infaillible mais, comme l'indique Bell, l'une de ses hypothèses ne s'appliquait pas à la théorie quantique, si bien que sa démonstration n'était pas correcte. Le problème restait donc entier : la théorie quantique était-elle compatible avec l'existence de variables cachées et d'une réalité causale ? Bell se chargea d'y apporter une solution.

Bell se posa la question de savoir à quoi ressemblerait le monde quantique si les variables cachées locales existaient vraiment – le mot « locales » est ici d'une importance extrême. On appelle variables cachées locales des quantités physiques qui déterminent localement l'état d'un objet à l'intérieur d'une surface imaginaire, alors que des variables cachées non locales pourraient être instantanément modifiées par des événements survenus à l'autre bout de l'univers. Supposer des variables cachées « locales », c'est affirmer l'existence de la causalité locale. A partir de là, Bell établit une formule mathématique, une inégalité, susceptible d'être vérifiée expérimentalement. L'expérience a été répétée au moins une demi-douzaine de fois depuis et, jamais l'inégalité de Bell, qui implique la causalité locale, n'a été vérifiée. Le monde, semble-t-il ne connaît pas la causalité locale !

L'inégalité de Bell s'applique à une vaste catégorie d'expériences quantiques. Avant d'appliquer cette inégalité au monde quantique, il est utile de commencer par déduire cette inégalité dans le cas d'une expérience purement classique, visualisable. L'étrangeté quantique n'y aura pas sa place. Dans ce cas, toutes les hypothèses nécessaires à la démonstration sont explicites, il n'y a aucune variable « cachée ».

Imaginons un canon à clous, qui tire simultanément deux clous dans deux directions opposées. Imaginons qu'au lieu de partir pointe en avant, les clous qui sortent du canon aient leur tige perpendiculaire à l'axe de tir. Nous supposerons de plus que deux clous d'une même paire ont leurs tiges parallèles, **mais les différentes paires possèdent des orientations parfaitement aléatoires les unes par rapport aux autres**. On mitraille deux plaques de métal, A et B, percées chacune d'une fente. Ces fentes se comportent comme de véritables polariseurs parce qu'elles ne laissent passer que les clous dont l'orientation est parallèle à la leur et arrêtent tous les autres. Nous supposerons qu'il est possible de modifier l'orientation des polariseurs au cours de l'expérience. On place près des plaques deux observateurs qui comptent les clous passant ou ne passant pas la fente. Le passage d'un clou est marqué par un 1, le non-passage par un 0.

Au début, les deux polariseurs sont orientés dans la même direction. Comme les deux clous d'une même paire ont exactement la même orientation et que les polariseurs A et B sont alignés, chacun des clous ou bien passe par la fente ou bien « rate son coup ». Les succès et



L'expérience de Bell : *le canon à clous et la source de photons. Si les clous ou les photons sont convenablement orientés, ils passent par les polariseurs* A et B *et sont détectés. Les coups « gagnants » sont notés par 1, les échecs par 0. L'angle* $\theta = \theta_A - \theta_B$ *est l'angle relatif des polariseurs* A et B.

les échecs sont en parfaite corrélation en A et B. Le résultat de l'expérience enregistré par les observateurs A et B a alors l'allure suivante :

$$
\begin{array}{|l|}
\hline
A : 0100011001000010110100110010110001000100\cdots \\
\\
B : 0100011001000010110100110010110001000100\cdots \\
\hline
\end{array}
$$

Chaque séquence de 0 et de1 est aléatoire parce que le canon tire chaque paire dans toutes les directions. Remarquons que ces deux séquences aléatoires sont **exactement corrélées**.

A présent, modifions l'angle relatif des deux polariseurs en faisant pivoter dans le sens des aiguilles d'une montre la fente de la plaque A ; elle forme alors un angle θ avec la fente de la plaque B. Avec une telle géométrie, il est possible q'un clou d'une paire passe par la fente A et que l'autre rate la fente B, ou l'inverse. De plus, comme les fentes sont assez larges, il est encore possible que les deux clous passent en A et B. Les succès et les échecs en A et B ne seront plus exactement corrélés. L'enregistrement des résultats aura alors une allure du genre :

$$
\begin{array}{|l|}
\hline
A : 0001011000101011100011110010110010100100\cdots \\
\qquad \updownarrow \;\; \updownarrow \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \updownarrow \qquad \updownarrow \\
B : 0011001000101011100011010010010010100100\cdots \\
\hline
\end{array}
$$

où l'on a indiqué par une flèche les « erreurs » de corrélation. Le nom d' « erreurs » convient parce qu'on peut considérer qu 'il s'agit d'erreurs dans le résultat de A par rapport à celui de B, que nous prendrons comme référence. Dans l'exemple ci-dessus, il y a 4 erreurs sur 40 tirs, de sorte que le taux d'erreur $E(\theta)$ est égal à 10%.

Supposons maintenant que nous ne touchions pas au polariseur A et que nous fassions pivoter le polariseur B d'un angle θ, mais cette fois-ci dans le sens contraire des aiguille d'une montre. Nous pouvons dire que les erreurs se trouvent dans le résultat obtenu en B, par rapport à A pris comme référence. Le taux d'erreur sera le même que précédemment, $E(\theta)=10\%$, puisque la géométrie est la même.

Enfin, faisons tourner le polariseur A d'un angle θ dans le sens des aiguilles d'une montre et le polariseur B également d'un angle θ, mais dans le sens contraire. L'angle relatif des deus polariseurs est maintenant de 2θ. Quel est le taux d'erreurs dans cette configuration ? Il est facile de répondre à cette question si nous supposons que les erreurs en A sont indépendantes de ce qui se passe en B, et vice-versa. Ce faisant, nous faisons l'hypothèse de **causalité locale**. Après tout, il n'y a aucune raison pour que la situation en B ait un quelconque effet sur le passage du clou dans la fente A. Puisque les erreurs en B étaient précédemment de $E(\theta)$, nous devons leur ajouter les erreurs provoquées par la rotation du polariseur A, c'est-à-dire, là encore, $E(\theta)$. Il semble donc que le nouveau taux d'erreur doive être égal à la somme des deux taux d'erreur mutuellement exclusifs, soit $E(\theta)+E(\theta)=2E(\theta)$. Mais attention : en faisant pivoter A d'un petit angle θ, nous avons perdu ce qui nous servait de référence pour le résultat enregistré en B ; de même, en faisant pivoter B, nous avons perdu ce qui nous servait de référence pour le résultat en A. Cela signifie que, lorsque de temps en temps, se produira une double erreur – c'est-à-dire une erreur à la fois en A et B - cette double erreur sera enregistrée comme « pas d'erreur ». Par exemple, supposons qu'une paire de clous donne les résultats 1 en A et 1 en B lorsque les polariseurs sont parfaitement alignés. Si le polariseur A est légèrement tourné, le clou rate la fente et l'observateur note 0. On a donc une erreur de corrélation. Mais puisque le polariseur en B a également été tourné, il est possible que le clou arrivant en B manque aussi la fente. On a alors affaire à une double erreur, au cours de laquelle deux 1 (1 en A et 1 en B) ont été transformés en deux zéros (0 en A et 0 en B). Comme ces deux zéros ne produisent aucune erreur de corrélation, la double erreur passe inaperçue, si bien que le taux d'erreur pour un angle 2θ entre les polariseurs, $E(2\theta)$, est nécessairement inférieur à la somme des taux d'erreurs enregistrés précédemment de façon séparée. C'est ce qu'exprime mathématiquement la formule :

$$E(2\theta) \leq 2E(\theta)$$

qui porte le nom d'**inégalité de Bell**.

Il ne fait aucun doute que si cette étrange expérience portant sur des clous était effectuée, on obtiendrait l'inégalité de Bell. Par exemple, pour un angle 2θ, le résultat enregistré pourrait avoir l'allure :

$$\boxed{\begin{array}{l} A: 0010110011111000101010100111101011101000\cdots \\ \qquad\quad\;\updownarrow \quad\;\; \updownarrow \;\; \updownarrow \qquad\qquad\qquad\;\; \updownarrow \qquad\;\; \updownarrow \;\; \updownarrow \\ B: 0010100011011100101010100110101011001100\cdots \end{array}}$$

où l'on remarque 6 erreurs sur 40 tirs, de sorte que $E(2\theta) = 15\% \leq 2 \times 10\%$. L'inégalité de Bell est bien satisfaite pour cette expérience de physique classique.

Examinons de près le hypothèses fondamentales qui nous ont permis d'aboutir à l'inégalité de Bell. Nous avons supposé que les clous étaient des objets réels se déplaçant dans l'espace et tels que deux clous d'une même paire aient une orientation identique. Bien que nous n'ayons pas réellement observé l'orientation des clous (ceux-ci se déplacent trop rapidement), cette hypothèse ne semble pas absurde s'agissant de clous. Mais nous avons fait plus : nous nous sommes permis de supposer (c'est **l'hypothèse d'objectivité**) que ces clous à orientation bien définie existent au même titre que les objets ordinaires, les tables, les pierres, les chaises. Or pour l'observateur placé en A, cela revient à supposer qu'un clou se dirigeant vers B garde une orientation définie même si B se trouve sur la Lune. Cette idée que les choses puissent exister dans un état défini, même lorsque nous ne les observons pas, hypothèse d'objectivité , est l'hypothèse de base de la physique classique.

Pour obtenir l'inégalité de Bell, nous avons également supposé que les erreurs produites en A et en B étaient totalement **indépendantes** les unes des autres, et donc que le fait de tourner le polariseur placé en A n'avait aucune influence sur la situation physique en B (ou vice-versa). Cela revient à faire l'hypothèse de **causalité locale**.

Ces deux hypothèses – **objectivité** et **causalité locale** – sont essentielles à la démonstration de l'inégalité de Bell. Que se passe-t-il si maintenant nous remplaçons les clous par des photons ?

Au lieu d'un canon à clous, nous allons utiliser comme source de particules des positroniums. Un positronium est un « atome » constitué d'un seul électron lié à un positron (ou anti-électron) ; cet « atome » se décompose, de façon totalement aléatoire, en deux photons émis dans des directions opposées, et (c'est là le point crucial), dont les polarisations relatives sont **exactement corrélées** - tout comme celles des clous. La désintégration du positronium est telle que si l'un des photons a une polarisation le long d'une certaine direction, l'autre photon, celui qui part dans la direction opposée, a la même polarisation. La direction absolue de la polarisation des deux photons change de manière aléatoire d'une désintégration à l'autre, mais leur polarisation relative reste la même. C'est là une caractéristique importante de la source – qui fait qu'elle ressemble au canon à clous.

Les photons partent dans des directions opposées et passent au travers de polariseurs très éloignés l'un de l'autre – placés en A et B. Quant aux observateurs, ce sont des tubes photomultiplicateurs placés derrière chacun des polariseurs et capables de détecter des photons uniques. Si un photomultiplicateur détecte un photon, l'événement est signalé par un 1 ; si aucun photon n'est détecté, l'appareil marque un 0. Dans la configuration initiale, les deux polariseurs A et B sont parfaitement alignés l'un par rapport à l'autre. Faisons en sorte que le polariseur B soit fixe et que A puisse tourner sur lui-même ; soit θ l'angle relatif des deux polariseurs. Dans la configuration initiale, donc, $\theta = 0$.

Si un photon touche le polariseur, il a une certaine probabilité de passer à travers et d'être détecté. Si un photon a une polarisation parallèle à la direction de passage du polariseur, il parvient jusqu'au détecteur et on enregistre un 1. Si la polarisation du photon est perpendiculaire à la direction du polariseur, le photon ne passe pas et on enregistre un 0. Pour toute orientation, il existe une certaine probabilité comprise entre 0 et 1 que le photon passe à travers.

La polarisation absolue des photons a une direction totalement aléatoire, par rapport à celle du polariseur, de sorte que dans la configuration originale $(\theta = 0)$, chaque détecteur enregistre une série de 0 et de 1. Supposons que les séries se présentent de la façon suivante ;

$$\boxed{\begin{array}{l} A:011010110000101101110011000101110\cdots \\ \\ B:011010110000101101110011000101110\cdots \end{array}}$$

C'est exactement la même chose que dans le cas du canon à clous. Les séries sont identiques, parce que les deux photons d'une même paire possèdent une polarisation identique et que l'angle entre les polariseurs est égal à 0. De plus, chaque série comporte un nombre égal de 0 et de 1, puisqu'un photon a autant de chance d'atteindre le détecteur que de ne pas y parvenir.

A présent, faisons pivoter le polariseur A d'un angle $\theta = 25°$. Du coup, les deux photons d'une même paire n'ont plus tous les deux exactement la même probabilité d'atteindre les polariseurs et d'être détectés. Les séries ne sont donc plus entièrement identiques, elles présentent de temps en temps des « erreurs » de corrélation. Cependant, en moyenne, les séries A ou B comportent le même nombre de 0 et de 1, parce que la probabilité de passage dans le polariseur est indépendante de son orientation. On a maintenant le résultat :

$$\boxed{\begin{array}{l} A:00101111011000111110110100111000101011100\cdots \\ \qquad \updownarrow\ \ \updownarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \updownarrow \qquad\qquad\qquad \updownarrow \\ B:01100111011000111010110100110000101011100\cdots \end{array}}$$

Nous avons signalé d'une flèche le « erreurs » de corrélation. Dans l'exemple ci-dessus, il y a 4 erreurs sur 40 événements, de sorte que le taux d'erreur est $E(\theta) = 10\%$.

Pour l'instant, l'expérience des photons ressemble à celle du canon à clous. Les photons se comportent comme des clous, comme des objets visualisables. Si nous supposons que l'état de polarisation des photons en A et B est objectif – **hypothèse d'objectivité** – et qu'une mesure en A n'affecte pas les événements en B - **hypothèse de causalité locale** - , cette expérience doit satisfaire à l'inégalité de Bell $E(2\theta) \le 2E(\theta)$. Or, si nous doublons l'angle pour avoir $2\theta = 50°$, nous obtenons le résultat suivant :

$$\boxed{\begin{array}{l} A:10001110011001101\ \ 11001\ \ 111110110101\,000\,1\,00\cdots \\ \quad\ \updownarrow\updownarrow\quad\ \ \updownarrow\ \ \updownarrow\quad\ \ \updownarrow\updownarrow\updownarrow\qquad\ \ \updownarrow\qquad\qquad\qquad\ \ \updownarrow\updownarrow\updownarrow\updownarrow \\ B:11101111010001110\,01001100110110101\ \ \ 101\,010\cdots \end{array}}$$

soit 12 erreurs sur 40 événements et donc $E(2\theta)=30\%$. Mais nous avions $E(\theta)=10\%$ et donc $2E(\theta)=20\%$. L'inégalité de Bell $E(2\theta)\leq 2E(\theta)$ n'est donc pas vérifiée. L'inégalité de Bell est donc contredite par cette expérience portant sur des photons. Conclusion :

- ou **l'hypothèse d'objectivité** est fausse pour les photons
- ou bien c'est celle de **causalité locale**
- ou encore les deux à la fois.

Voilà qui est très remarquable !

Originellement, John Bell cherchait un moyen de tester **l'hypothèse de variables cachées** dans le monde quotidien, celui des tables, des chaises, des cailloux. Cela le conduisit à montrer que le fait que son inégalité soit violée par la théorie quantique n'excluait pas forcément l'idée d'un monde objectif décrit par des variables cachées, à condition toutefois que la réalité décrite par ces variables soit **non-locale**. Rien ne s'oppose à ce qu'existe, par-delà la réalité quantique, une autre réalité, décrite par des variables cachées, dans laquelle les influences s'exerceraient instantanément et sur n'importe quelle distance, sans médiation évidente. Certes, il est possible de croire que le monde quantique est objectif – ce que souhaitait Einstein – mais alors il faut accepter les influences non-locales – à quoi Einstein et la plupart des physiciens se refusent.

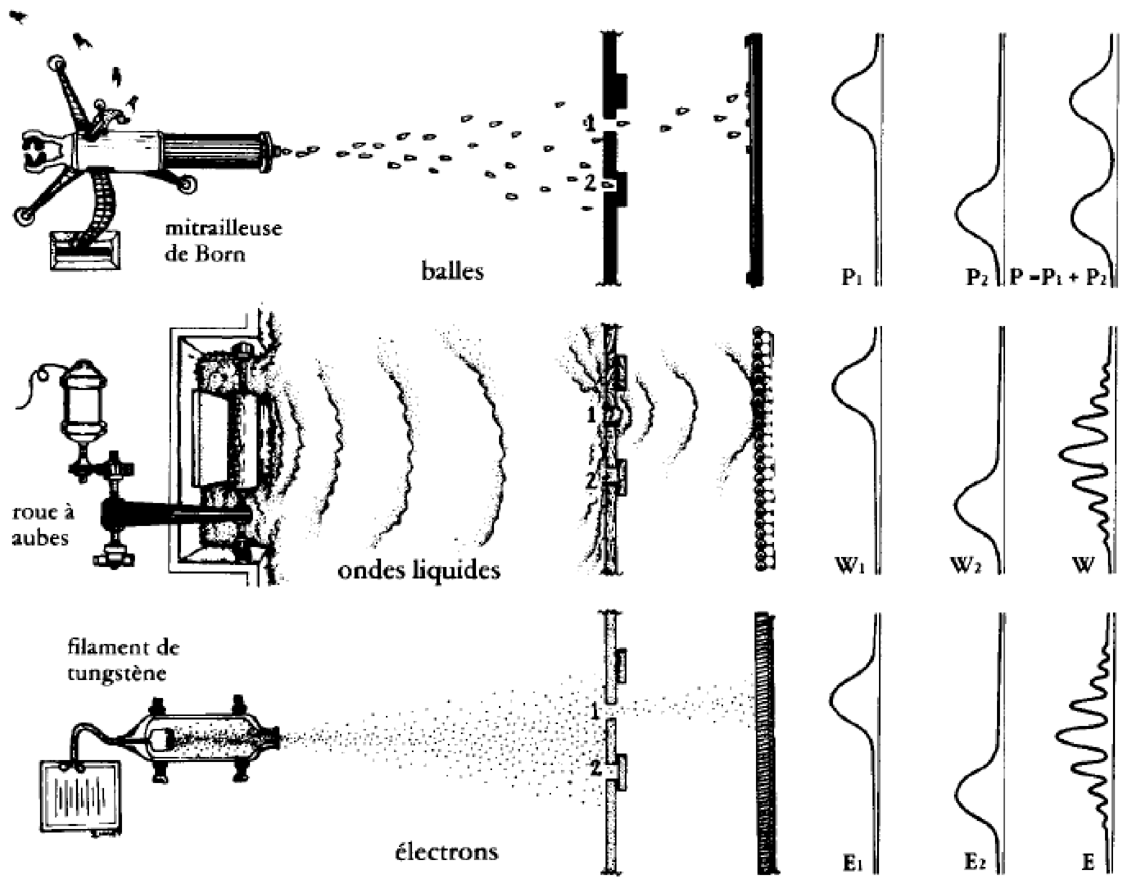
Pour comprendre de manière intuitive comment l'objectivité implique la non-localité, comparons les résultats obtenus avec $\theta=25°$ et θ=$50°$. Il y a beaucoup plus d'erreurs lorsque $\theta=50°$ que lorsque $\theta=25°$ - 12 contre 4. On dirait que le fait d'avoir tourné le polariseur A a influencé la polarisation des photons qui doivent être détectés par B, produisant ainsi toutes ces erreurs « supplémentaires », responsables du fait que l'inégalité de Bell est contredite. Imaginons que l'observateur B se trouve sur Terre et l'observateur A sur une galaxie lointaine à des années-lumière de là. Tout se passe comme si en faisant pivoter le polariseur A, on avait émis un signal plus rapide que la lumière, capable de modifier instantanément le résultat de B.

Au point où nous en sommes (la fin de la localité !), il nous faut aller plus avant, car aucun des termes de l'alternative – une réalité non objective ou une réalité non-locale – n'est **acceptable**. Certains vulgarisateurs des travaux de Bell confrontés à cette alternative n'ont pas hésité à proclamer qu'il s'agissait d'une vérification de la télépathie et que toutes les parties de l'univers étaient instantanément liées les unes aux autres. D'autres en ont conclu qu'il existait un mode de communication plus rapide que la lumière. **Tout cela n'a pas de sens** ; la théorie quantique et l'inégalité de Bell n'impliquent rien de tel. Ces commentateurs ont simplement pris leurs désirs pour des réalités.

Pour en arriver à la conclusion que les photons sont soumis à des influences non-locales, nous nous sommes une fois de plus laissés aller à les imaginer dans un état bien défini. Ce n'est que si nous pouvons montrer que les photons existent bel et bien dans un état défini de polarisation, sans pour autant modifier cet état, que nous pourrons dire que l'expérience de Bell manifeste l'existence d'influences non-locales.

La vérification est aisée, lorsqu'il s'agit de clous – il suffit d'installer une caméra à défilement très rapide et de filmer les clous lorsqu'ils arrivent près des polariseurs. Cela ne troublera en rien leur état. Le problème, c'est que l'expérience du canon à clous ne contredisait pas l'inégalité de Bell, ce qui n'est pas le cas avec l'expérience des photons.

Si nous essayons à présent de vérifier l'état de polarisation d'un photon, nous voyons que ce n'est pas possible sans du même coup modifier les conditions initiales de l'expérience, à savoir que deux photons d'une même paire doivent avoir des polarisations identiques. Lorsque nous mesurons la polarisation d'un photon, nous le plaçons dans un état défini, ce qui change les conditions initiales de l'expérience. C'est exactement la même chose que dans l'expérience des deux trous de Young : en observant grâce à une source lumineuse placée derrière le trou par quel trou l'électron est passé, nous avions là aussi modifié la figure observée sur l'écran.



Sous ses trois formes, l'expérience des deux trous d'Young

• La mitrailleuse de Max Born – les ondes liquides et les électrons.
Autant il nous est possible de représenter comment les balles et les ondes liquides (objets relevant de la physique classique) produisent les résultats observés sur les écrans de détection, autant il nous est impossible de représenter ce qui advient aux électrons (particules quantiques) au niveau des deux trous.

De même ici le fait de déterminer l'état objectif du photon modifie les conditions dans lesquelles a été établie l'inégalité de Bell. Toute tentative pour vérifier expérimentalement l'hypothèse d'objectivité entraîne une modification des conditions expérimentales telle que nous ne pouvons plus nous servir de la violation de l'inégalité de Bell pour conclure à l'existence d'influences non-locales.

Supposons donc que nous ne tentions pas de vérifier l'état des photons. Après tout, nous connaissons les résultats de l'expérience en A et en B et ces renseignements qui font partie du monde macroscopique au même titre que les tables, les chaises et les chats sont certainement objectifs. L'observateur placé en B ne peut-il lire le résultat, voir que l'inégalité de Bell est contredite et en conclure que la causalité locale est également contredite ? Eh bien,

non car souvenons-nous que la source émet des photons par paires, avec une polarisation aléatoire. Cela signifie que **les enregistrements effectués en** A et en B **constituent des séquences totalement aléatoires de 0 et de 1, quel que soit l'angle choisi.**

A première vue, nous pourrions croire qu'en modifiant le polariseur en A, nous avons directement influé sur le nombre d'erreurs enregistrées en B. Mais alors, rien qu'en modifiant de diverses façons le polariseur en A et en étudiant les modifications du nombre d'erreurs enregistrées en B, l'observateur en B pourrait décrypter un message envoyé par A. On obtiendrait ainsi un télégraphe contraire à la notion de causalité. Mais en réalité, aucune information de ce type ne peut être transmise de A à B à l'aide d'un tel système, car avec un seul et unique enregistrement d'événements, soit en A, soit en B, nous ne sommes guère plus avancés que si nous possédions un message ultra secret rédigé dans un code aléatoire – un tel message est impossible à déchiffrer. Ainsi donc, du fait que les séquences enregistrées en A et en B sont totalement aléatoires, il n'est pas possible de communiquer entre A et B. Il n'y a donc pas de non-localité.

Deux séquences aléatoires peuvent fournir une information non aléatoire lorsqu'elle sont comparées l'une à l'autre. L'information se trouve dans la corrélation née de la comparaison. Il en va de même avec les enregistrements effectués en A et en B - l'information concernant l'angle relatif des polariseurs est inscrite dans la corrélation des deux enregistrements, mais pas dans chaque enregistrement pris individuellement.. Lorsqu'on modifie l'angle du polariseur, une séquence aléatoire est transformée en une autre séquence aléatoire et il est impossible de dire ce qui se passe en n'étudiant qu'un seul enregistrement. Ce type de processus aléatoire se déroule effectivement dans la nature, et c'est pour cela que nous rejetons l'idée d'une véritable non-localité.

Modifiée de manière aléatoire, une séquence aléatoire reste une séquence aléatoire ! – le désordre reste désordonné. C'est précisément ce qui se passe dans le cas des séquences aléatoires enregistrées en A et B. Par contre, **la comparaison des séquences** permet de savoir que les conditions expérimentales ont été modifiées du fait des mouvements des polariseurs – **l'information réside dans la corrélation, pas dans les enregistrements individuels**. Cette corrélation est entièrement prévue par la théorie quantique.

En conclusion, l'expérience de Bell n'implique pas l'existence de véritables influences non-locales, même si nous acceptons l'objectivité du monde microscopique. Elle implique simplement que l'on peut modifier instantanément la corrélation de deux séquences aléatoires d'événements survenus aux deux extrémités de la galaxie. Mais la corrélation de deux ensembles d'événements très éloignés les uns des autres ne constitue pas un objet local et l'information qu'elle peut contenir ne peut servir à contredire le principe de causalité locale.

Avec l'inégalité de Bell et l'expérience d'EPR, nous avons pénétré au cœur même de « l'étrangeté quantique ».

EXERCICE DE COMPREHENSION :

Pour être théoricien, il faut à la fois avoir étudié les mathématiques et posséder beaucoup d'intuition. On ne saurait sous-estimer le rôle de l'intuition et de l'imagination dans les sciences. Les étudiants qui réussissent à tous les examens ne sont pas nécessairement les chercheurs les plus créatifs. Lors d'un examen, il faut résoudre un problème spécifique mais, dans le monde de la recherche théorique, le véritable problème consiste à découvrir quel est le problème. Alors seulement peut-on le formuler de manière précise et le résoudre grâce à des techniques mathématiques appropriées. Poser la bonne question requiert beaucoup d'imagination.

Heinz R. Pagels : « The Cosmic Code » (Simon and Schuster Ed New York (1982)

Référence bibliographique : J.S.BELL : « On the Problem of Hidden Variables in Quantum Mechanics » *Rev.Mod.Phys* ***38****, 447, (1966).*

Soit une paire de particules de spin $\frac{1}{2}$ ayant un spin total égal à 0 ; chaque particule à un moment cinétique orbital nul. (*De telles paires peuvent être créées par diffusion d'un faisceau de protons de faible énergie par un gaz d'hydrogène*). Lorsque les particules sont éloignées l'une de l'autre, on mesure, par exemple, la composante z du spin de la première particule, S_{z1} et par la suite, la même composante de la seconde particule, S_{z2}. Puisque le spin total est nul, les deux composantes doivent être opposées, c'est-à-dire si la première mesure donne $+\frac{\hbar}{2}$, la seconde donnera nécessairement $-\frac{\hbar}{2}$. Donc la mesure du spin de la première particule influence le résultat de la mesure du spin de la seconde particule, bien que les deux particules soient loin l'une de l'autre et n'interagissent pas entre elles. Autrement dit, d'après la mécanique quantique, les deux particules ne sont pas indépendantes ; l'indépendance implique une théorie à variables cachées.

1.- Quelles sont les prédictions de la mécanique quantique pour la mesure de la composante $S_{\phi 2}$ du spin de la seconde particule à un angle ϕ par rapport à l'axe z, ayant auparavant déterminé la composante S_{z1} du spin de la première particule ?

2.- En déduire la valeur moyenne du produit $S_{z1}\ S_{\phi 2}$: $E_Q(\phi)=\langle S_{z1}S_{\phi 2}\rangle$.

3.- Supposons qu'une théorie locale à variable cachée soit valide. On note λ la variable cachée et $p(\lambda)d\lambda$ la probabilité pour que lors d'une expérience une valeur de l'intervalle $[\lambda,\lambda+d\lambda]$ soit réalisée. Le résultat de la mesure de la composante z du spin de la première particule est désigné par $S_{z1}(\lambda)$ où les seules valeurs autorisées sont $\pm\frac{\hbar}{2}$. De même, le résultat de la mesure de la composante ϕ du spin de la seconde particule est noté $S_{\phi 2}(\lambda)$. La valeur moyenne du produit $S_{z1}(\lambda)S_{\phi 2}(\lambda)$ est :

$$E_{loc}(\phi)=\int S_{z1}(\lambda)S_{\phi 2}(\lambda)\,p(\lambda)d\lambda$$

Considérons une seconde expérience qui mesure comme précédemment la composante z du spin de la première particule mais où le deuxième appareil de mesure est placé à un angle θ par rapport à l'axe z :

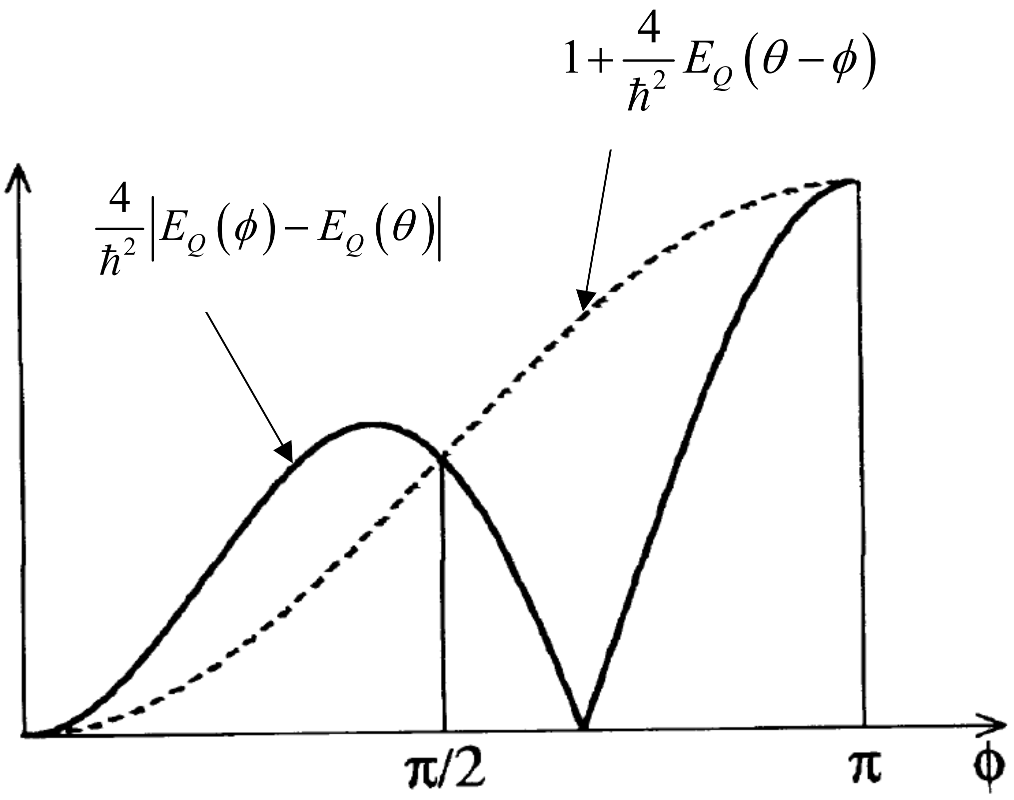
$$E_{loc}(\phi)=\int S_{z1}(\lambda)S_{\theta 2}(\lambda)\,p(\lambda)d\lambda$$

Supposons les directions z,θ et ϕ coplanaires, démontrer le *théorème de Bell* :

$$\left|E_{loc}(\phi)-E_{loc}(\theta)\right|\leq\frac{\hbar^2}{4}+E_{loc}(\theta-\phi)$$

4.- Application :

Vérifier que les graphes $\frac{4}{\hbar^2}\left|E_Q(\phi)-E_Q(\theta)\right|$ (courbe en trait plein) et $1+\frac{4}{\hbar^2}E_Q(\theta-\phi)$ (courbe en pointillés) pour $\theta=2\phi$ ont la forme indiquée sur la figure ci-dessous.
Conclusion ?

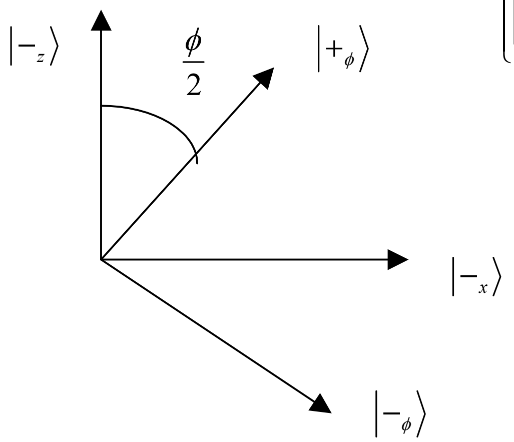


$1+\frac{4}{\hbar^2}E_Q(\theta-\phi)$
$\frac{4}{\hbar^2}\left|E_Q(\phi)-E_Q(\theta)\right|$
π/2
π
ϕ

Corrigé

1.) On se place dans l'espace des spins.

Pour calculer la probabilité que la mesure de $S_{\phi 2}$ donne $+\frac{\hbar}{2}$ (respectivement $-\frac{\hbar}{2}$), il est préférable d'utiliser les vecteurs propres de $\hat{S}_\phi$: $\begin{cases} \left|+_\phi\right\rangle = \cos\left(\frac{\phi}{2}\right)\left|+_z\right\rangle + \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)\left|-_z\right\rangle \\ \left|-_\phi\right\rangle = -\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)\left|+_z\right\rangle + \cos\left(\frac{\phi}{2}\right)\left|-_z\right\rangle \end{cases}$



Supposons que la première mesure, celle de la composante z du spin de la première particule, donne le résultat $+\frac{\hbar}{2}$. Alors la seconde particule est dans l'état $\left|2:-_z\right\rangle$:

$$\left|2:-_z\right\rangle = \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)\left|2:+_\phi\right\rangle + \cos\left(\frac{\phi}{2}\right)\left|2:-_\phi\right\rangle \quad (1)$$

Soit $P_{++}(\phi)$ la probabilité que la seconde mesure donne $+\frac{\hbar}{2}$ et $P_{+-}(\phi)$ celle de trouver $-\frac{\hbar}{2}$.
Les expressions de ces probabilités se déduisent de l'équation (1) :

$$P_{++}(\phi) = \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right) \quad , \quad P_{+-}(\phi) = \cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right)$$

Si le résultat de la première mesure est $-\frac{\hbar}{2}$, on obtient de manière analogue :

$$P_{-+}(\phi) = \cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right) \quad , \quad P_{--}(\phi) = \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)$$

On a bien $P_{++}(\phi) + P_{+-}(\phi) = P_{-+}(\phi) + P_{--}(\phi) = 1$.

Remarque : *Si le résultat de la première mesure n'est pas connu avant la seconde mesure, alors les 4 probabilités déterminées précédemment doivent être multipliées par* $\frac{1}{2}$. *En effet, le vecteur d'état (normé à l'unité) du système des deux particules a pour expression (état singulet antisymétrique de deux spins* $\frac{1}{2}$ *) :*

$$\left|\psi\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left|1:+_z\right\rangle \otimes \left|2:-_z\right\rangle - \left|1:-_z\right\rangle \otimes \left|2:+_z\right\rangle\right]$$

Dans ce cas, c'est la somme des 4 probabilités qui doit être égale à 1.

2.) Si l'on suppose que la particule 1 est dans l'état $\left|+_z\right\rangle$, la valeur moyenne de $\hat{S}_{z1}\hat{S}_{\phi 2}$ a pour expression :

$$E_Q(\phi)=\left(+\frac{\hbar}{2}\right)\left(+\frac{\hbar}{2}\right)P_{++}(\phi)+\left(+\frac{\hbar}{2}\right)\left(-\frac{\hbar}{2}\right)P_{+-}(\phi)=-\frac{\hbar^2}{4}\cos\phi$$

On doit retrouver la même expression si la particule 1 est dans l'état $\left|-_z\right\rangle$. En effet :

$$E_Q(\phi)=\left(-\frac{\hbar}{2}\right)\left(+\frac{\hbar}{2}\right)P_{-+}(\phi)+\left(-\frac{\hbar}{2}\right)\left(-\frac{\hbar}{2}\right)P_{--}(\phi)=-\frac{\hbar^2}{4}\cos\phi$$

On retrouve également la même expression si l'on ne sait pas, avant la seconde mesure, dans quel état est la première particule :

$$E_Q(\phi)=\left(+\frac{\hbar}{2}\right)\left(+\frac{\hbar}{2}\right)\frac{P_{++}(\phi)}{2}+\left(+\frac{\hbar}{2}\right)\left(-\frac{\hbar}{2}\right)\frac{P_{+-}(\phi)}{2}+\cdots$$

$$\cdots\left(-\frac{\hbar}{2}\right)\left(+\frac{\hbar}{2}\right)\frac{P_{-+}(\phi)}{2}+\left(-\frac{\hbar}{2}\right)\left(-\frac{\hbar}{2}\right)\frac{P_{--}(\phi)}{2}=-\frac{\hbar^2}{4}\cos\phi$$

3.) Par définition on a :

$$E_{loc}(\phi)-E_{loc}(\theta)=\int\left[S_{z1}(\lambda)S_{\phi 2}(\lambda)-S_{z1}(\lambda)S_{\theta 2}(\lambda)\right]p(\lambda)d\lambda$$

Les composantes des spins des deux particules sont opposées :

$$S_{\phi 1}(\lambda)=-S_{\phi 2}(\lambda) \text{ et } S_{\theta 1}(\lambda)=-S_{\theta 2}(\lambda)$$

On en déduit que :

$$E_{loc}(\phi)-E_{loc}(\theta)=-\int S_{z1}(\lambda)\left[S_{\phi 1}(\lambda)-S_{\theta 1}(\lambda)\right]p(\lambda)d\lambda$$

$$E_{loc}(\phi)-E_{loc}(\theta)=-\int S_{z1}(\lambda)S_{\phi 1}(\lambda)\left[1-\frac{4}{\hbar^2}S_{\phi 1}(\lambda)S_{\theta 1}(\lambda)\right]p(\lambda)d\lambda$$

où l'on utilisé l'égalité $\left(S_{\phi 1}(\lambda)\right)^2=\frac{\hbar^2}{4}$.

$$\Rightarrow\left|E_{loc}(\phi)-E_{loc}(\theta)\right|\le\int\left|S_{z1}(\lambda)S_{\phi 1}(\lambda)\left[1-\frac{4}{\hbar^2}S_{\phi 1}(\lambda)S_{\theta 1}(\lambda)\right]p(\lambda d\lambda)\right|$$

Remarquant que $p(\lambda)$ est toujours positif et que $\left|S_{z1}(\lambda)S_{\phi 1}(\lambda)\right|=\frac{\hbar^2}{4}$ on obtient :

$$\left|E_{loc}(\phi)-E_{loc}(\theta)\right|\le\int\frac{\hbar^2}{4}\left[1-\frac{4}{\hbar^2}S_{\phi 1}(\lambda)S_{\theta 1}(\lambda)\right]p(\lambda)d\lambda=\frac{\hbar^2}{4}+\int S_{\phi 1}(\lambda)S_{\theta 2}(\lambda)p(\lambda)d\lambda$$

ce qui démontre le théorème de Bell :

$$\left|E_{loc}(\phi)-E_{loc}(\theta)\right|\le\frac{\hbar^2}{4}+E_{loc}(\theta-\phi)$$

4.) *On en conclut que l'inégalité de Bell est violée pour* $0<\theta<\frac{\pi}{2}$.