LA RESONANCE MAGNETIQUE

Rappelons la relation fondamentale entre moment cinétique $\vec{J}$ et moment magnétique $\vec{\mu}$:

$$\vec{\mu} = \gamma \vec{J}$$

La détermination de la constante de proportionnalité (rapport gyromagnétique) est un enjeu pratique considérable. Pour des objets fondamentaux comme l'électron ou le proton, sa mesure **précise** constitue un test crucial des théories décrivant ces particules. Pour des noyaux plus complexes intervenant dans des molécules, la valeur de γ fournit des renseignements précieux sur l'environnement et les liaisons chimiques en jeu dans ces molécules.

Nous allons décrire ci-dessous comment effectuer une mesure précise de γ. Comme bien souvent en physique, il s'agit de tirer parti d'un phénomène de résonance. Nous reviendrons ensuite plus longuement sur les applications de cette résonance magnétique, électronique ou nucléaire suivant les cas.

1.- Précession de Larmor dans un champ magnétique fixe $\vec{B}_0$.

Choisissons l'axe z parallèle au champ $\vec{B}_0$. Si l'on ne se préoccupe pas des variables spatiales, le Hamiltonien s'écrit

$$H = -\vec{\mu}.\vec{B}_0 = -\vec{\mu}_0 B_0 \sigma_z \quad (1)$$

Posons : $-\dfrac{\mu_0 B_0}{\hbar} = \dfrac{\omega_0}{2}$ soit $\omega_0 = -\gamma B_0 \quad (2)$.

Les états propres de H sont les états propres $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ de σ_z.

Considérons un état quelconque $|\Psi(t)\rangle$ tel que $|\Psi(0)\rangle = \alpha|+\rangle + \beta|-\rangle$ avec $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

Son évolution au cours du temps est :

$$|\Psi(t)\rangle = \alpha e^{-i\frac{\omega_0 t}{2}}|+\rangle + \beta e^{i\frac{\omega_0 t}{2}}|-\rangle.$$

La valeur moyenne $\langle\vec{\mu}\rangle$ vaut :

$$\begin{cases} \langle\mu_x\rangle = 2\mu_0 \operatorname{Re}\left(\alpha^*\beta e^{i\omega_0 t}\right) = C\cos(\omega_0 t + \phi) \\ \langle\mu_y\rangle = 2\mu_0 \operatorname{Im}\left(\alpha^*\beta e^{i\omega_0 t}\right) = C\sin(\omega_0 t + \phi) \\ \langle\mu_z\rangle = \mu_0\left(|\alpha|^2 - |\beta|^2\right) \end{cases}$$

où C et ϕ sont respectivement le module et la phase du nombre complexe $\alpha^*\beta$. Nous retrouvons la précession de Larmor déjà rencontrée pour un moment cinétique quelconque.

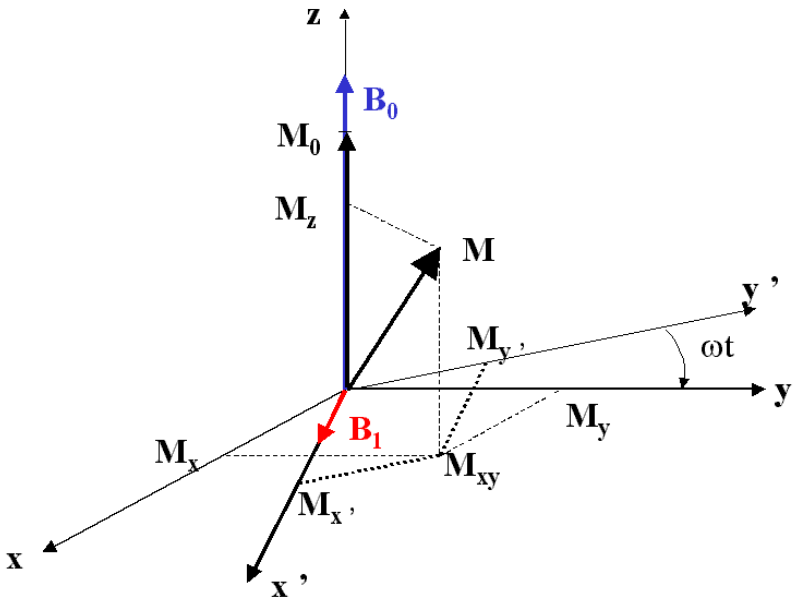
La projection $\langle\mu_z\rangle$ du moment magnétique sur l'axe du champ est indépendante du temps et la

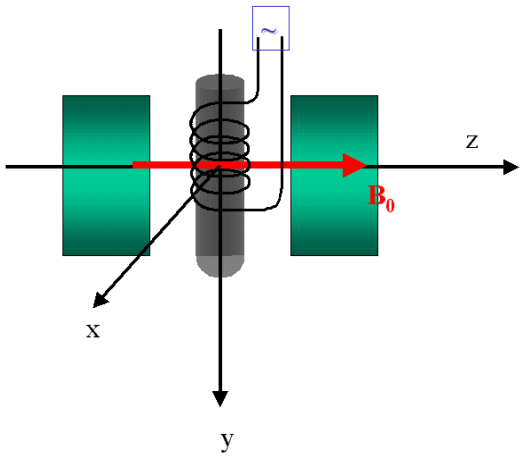
composante de $\langle\vec{\mu}\rangle$ perpendiculaire à $\vec{B}_0$ tourne à vitesse angulaire ω_0. Le fait que $\langle\mu_z\rangle$ soit une constante du mouvement est une conséquence de la relation de commutation $[H,\mu_z]=0$ et du théorème d'Ehrenfest.

On en déduit une méthode simple pour mesurer la pulsation ω_0. On place une bobine dans un plan parallèle à $\vec{B}_0$ et on prépare une assemblée macroscopique de spins tous dans le même état $|\Psi(0)\rangle$. La précession de $\langle\vec{\mu}\rangle$ à la pulsation ω_0 provoque une variation périodique de flux magnétique dans la bobine, donc un courant induit mesurable de même pulsation. Cette méthode est toutefois moins précise que la technique de résonance magnétique que nous allons maintenant présenter.

2.- Superposition d'un champ fixe et d'un champ tournant.

Une technique inventée par Rabi dans les années 1930 permet la **mesure très précise** de ω_0 grâce à un phénomène de résonance. Plaçons le moment magnétique dont on souhaite mesurer le rapport gyromagnétique γ dans un champ $\vec{B}_0$ connu et superposons un champ $\vec{b}_1$ faible, tournant dans le plan xOy à la vitesse angulaire ω ajustable. Un tel champ peut se construire au moyen de deux bobines placées le long de Ox et Oy, alimentées en courant





alternatif de pulsation ω et déphasé de $\frac{\pi}{2}$ (on travaille ici à des fréquences hertziennes). Nous voulons montrer qu'à résonance, c'est-à-dire pour $\omega = \omega_0$, le spin bascule entre les deux états $\{|+\rangle, |-\rangle\}$.

Notons que ce calcul caractéristique d'un système à deux états est tout à fait général et semblable à ceux déjà vus par ailleurs pour de tels systèmes.

Le Hamiltonien de spin a la forme suivante

$$H = -\vec{\mu}.\vec{B} = -\mu_0 B_0 \sigma_z - \mu_0 b_1 \left(\cos\omega t \sigma_x + \sin\omega t \sigma_y\right)$$

Posons : $|\Psi(t)\rangle = a_+(t)|+\rangle + a_-(t)|-\rangle$.

L'équation de Schrödinger, projetée sur $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ conduit pour les coefficients $a_\pm(t)$ au système différentiel

$$\begin{cases} i\dot{a}_+ = \frac{\omega_0}{2} a_+ + \frac{\omega_1}{2} e^{-i\omega t} a_- \\ i\dot{a}_- = \frac{\omega_1}{2} e^{i\omega t} a_+ - \frac{\omega_0}{2} a_- \end{cases}$$

où l'on a posé $\frac{\mu_0 B_0}{\hbar} = -\frac{\omega_0}{2}$ et $\frac{\mu_0 b_1}{\hbar} = -\frac{\omega_1}{2}$

Le changement de fonction $b_\pm(t) = e^{\pm i\omega t} a_\pm(t)$ (3) donne

$$\begin{cases} i\dot{b}_+ = -\frac{\omega - \omega_0}{2} b_+ + \frac{\omega_1}{2} b_- = -\frac{\delta}{2} b_+ + \frac{\omega_1}{2} b_- \\ i\dot{b}_- = \frac{\omega_1}{2} b_+ + \frac{\omega - \omega_0}{2} b_- = \frac{\omega_1}{2} b_+ + \frac{\delta}{2} b_- \end{cases} \quad (4)$$

où $\delta = \omega - \omega_0$ est le désaccord (detuning) spin-champ.

La transformation (3) est la forme quantique d'un changement de référentiel qui fait passer du référentiel du laboratoire au référentiel tournant à la vitesse angulaire ω autour de l'axe Oz. Nous avons donc choisi une base de l'espace de Hilbert qui dépend du temps.

Dans cette base, le Hamiltonien est **indépendant du temps.**

$$H = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} -\delta & \omega_1 \\ \omega_1 & \delta \end{pmatrix} = -\frac{\hbar}{2}\delta\sigma_z + \frac{\hbar}{2}\omega_1\sigma_x$$

On vérifiera que le système (4) entraîne $\ddot{b}_\pm + \left(\frac{\Omega}{2}\right)^2 b_\pm = 0$ avec $\Omega^2 = \delta^2 + \omega_1^2$ (pulsation de Rabi généralisée).

Supposons que le spin soit initialement dans l'état $|+\rangle$, soit $b_-(0) = 0$. On trouve alors :

$$\begin{cases} b_-(t) = -i\frac{\omega_1}{\Omega}\sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \\ b_+(t) = \cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) + i\frac{\delta}{\Omega}\sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \end{cases} \quad (\delta = \omega - \omega_0) \quad (5)$$

La probabilité qu'une mesure de S_z au temps t donne le résultat $-\frac{\hbar}{2}$ est

$$P_{+\to-}(t) = \left|\langle -|\Psi(t)\rangle\right|^2 = |a_-(t)|^2 = |b_-(t)|^2 = \left(\frac{\omega_1}{\Omega}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\Omega t}{2}\right)$$

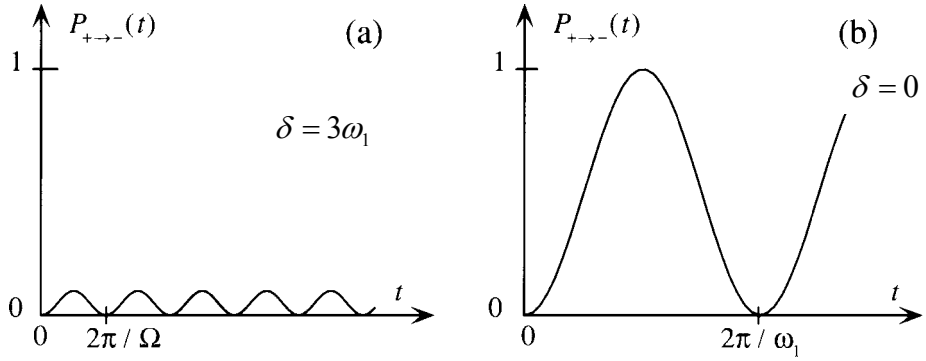
Cette formule, due à Rabi (prix Nobel 1944) met clairement en évidence le phénomène de résonance recherché.

• Si la fréquence ω du champ tournant est choisie notablement différente de la fréquence ω_0 que l'on souhaite mesurer (plus précisément si $|\omega-\omega_0| >> \omega_1$), alors la probabilité que « le spin bascule », c'est-à-dire que l'on mesure $S_z = -\frac{\hbar}{2}$ est très faible pour tout t.

• Si l'on choisit $\omega = \omega_0$, alors $\Omega = \omega_1$ et la probabilité de basculement du spin est égale à 1 aux temps $t_n = \frac{(2n+1)\pi}{\omega_1}$ (n entier), **même si l'amplitude du champ tournant $\vec{b}_1$ est très faible.**

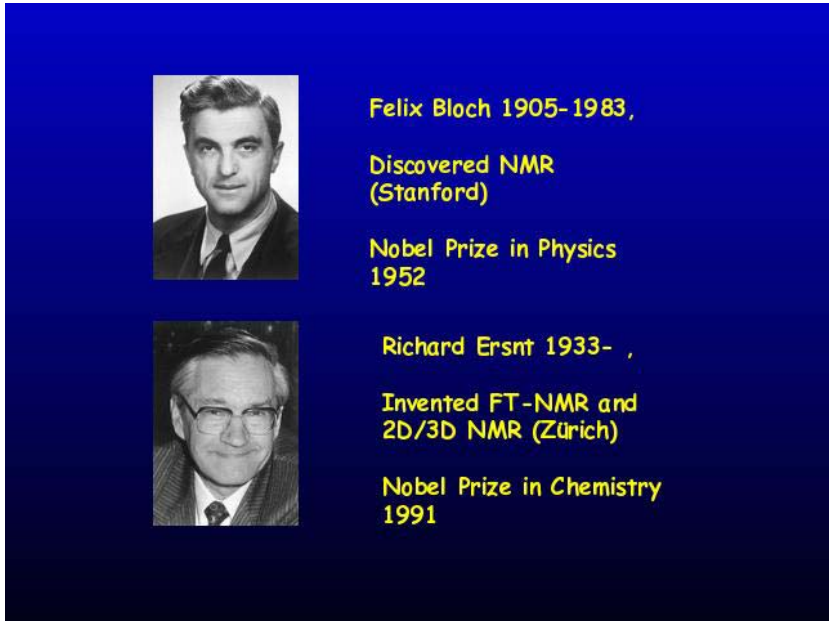
• Pour $|\omega-\omega_0| \sim \omega_1$, l'amplitude de probabilité oscille avec une amplitude maximale appréciable mais inférieure à 1.

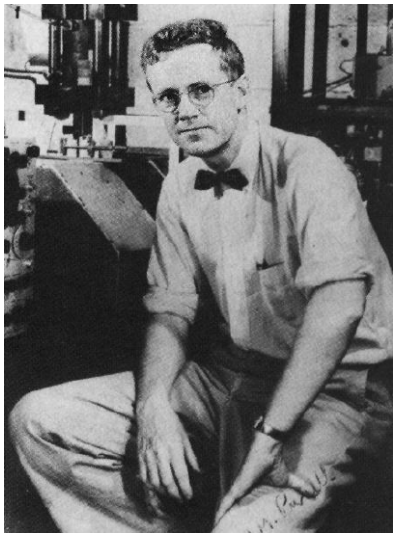
Nous avons tracé sur la figure ci-dessous l'oscillation temporelle de la probabilité $P_{+\to-}(t)$ en dehors de la résonance (a) et à résonance (b). Pour un champ magnétique de 1Tesla, la fréquence de résonance est $\frac{\omega_e}{2\pi} \sim 28\,\text{GHz}$ pour un électron et $\frac{\omega_N}{2\pi} \sim 42{,}5\,\text{MHz}$ pour un proton. Ces fréquences correspondent à des ondes centimétriques dans le cas électronique et décamétrique dans le cas nucléaire.



3.- Applications de la résonance magnétique.

La grande percée des applications de la RMN vint avec les travaux de Félix Bloch à Stanford et de Edward Purcell au MIT en 1945. Grâce à la maîtrise des techniques de radiofréquences due au développement du radar pendant la seconde guerre mondiale, Bloch et Purcell purent opérer non plus sur des jets moléculaires comme le faisait Rabi, mais directement sur la matière condensée. On dispose alors d'un nombre macroscopique de spins, les signaux sont beaucoup plus intenses, les expériences beaucoup plus maniables. La résonance





Edward Purcell

est observée en mesurant par exemple l'absorption de l'onde générant le champ tournant $\vec{b}_1$. La différence de population entre les deux états $|+\rangle$ et $|-\rangle$ nécessaire pour avoir un signal, résulte de l'équilibre thermodynamique. Dans un champ $B_0 = 1\ \mathrm{T}$, l 'énergie magnétique d'un proton est $\mu_N B_0 \sim 3\times10^{-8}\ \mathrm{eV}$ et la différence de population entre les deux états de spin due au facteur de Boltzmann à température ambiante est $\pi_+ - \pi_- \sim 10^{-6}$. Cette différence est petite, mais suffisante pour observer un signal raisonnable car on travaille avec des échantillons contenant un nombre macroscopique de spins (typiquement 10^{23}).

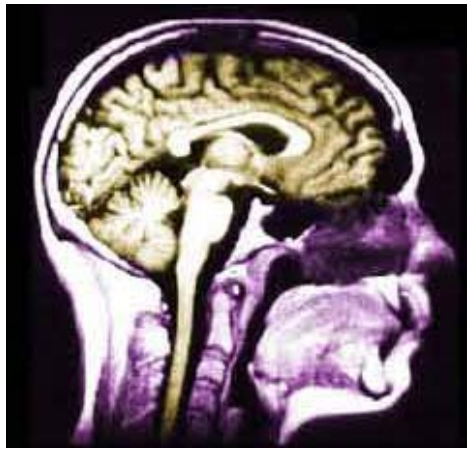
Les applications de la résonance magnétique sont innombrables dans les domaines aussi variés que la physique de l'état solide et des basses températures, la chimie la biologie ou la médecine. Par ses effets magnétiques, le spin joue le rôle de sonde locale au sein de la matière. La RMN a transformé l'analyse chimique et la détermination de la structure des molécules. Elle est devenue un outil de choix en biologie et a permis de faire des progrès considérables dans la connaissance des macromolécules, et, de façon générale, en biologie moléculaire. Depuis 1980, elle a également révolutionné le diagnostic médical et la physiologie. Elle permet de mesurer et de visualiser en trois dimensions et avec une précision spatiale inférieure

au millimètre la concentration en eau de la « matière molle » (muscles, cerveau…) qui, au contraire des os, est difficile à observer aux rayons X. On étudie de cette manière le métabolisme des tissus vivants, on spin nucléaire, objet de curiosité pour quelques physiciens illuminés des années 1940 et 1950 est devenu un des espoirs de la médecine d'aujourd'hui.

On peut désormais visualiser l'activité du cerveau vivant en temps réel. On parvient par exemple à localiser et à enregistrer la réponse du cortex cérébral visuel à une stimulation. Le pas suivant consiste, après avoir soumis un volontaire à une séquence de stimulations, à demander au sujet de *penser au signal.* La réponse du cerveau, enregistrée par RMN, est *la même* que celle obtenue par stimulation ! Cela constitue une des premières preuves directes que nous pensons (ce qui rassurant pour l'esprit…).

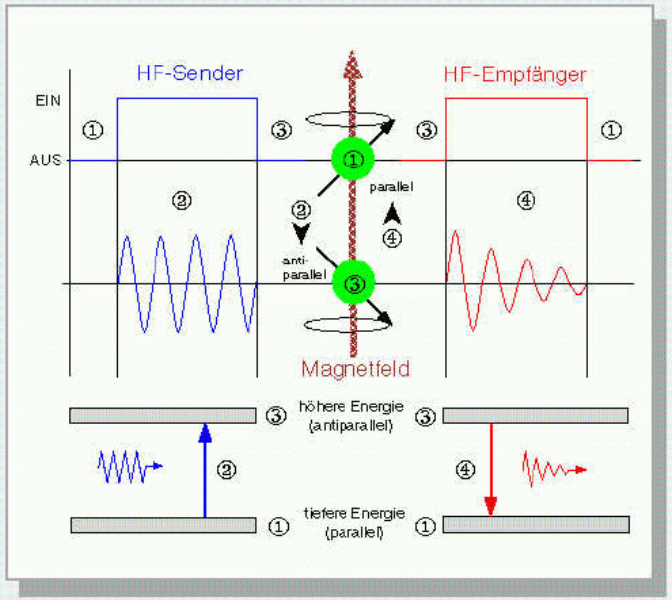
Spectromètre de R.M.N. et sa bobine supraconductrice au second plan.

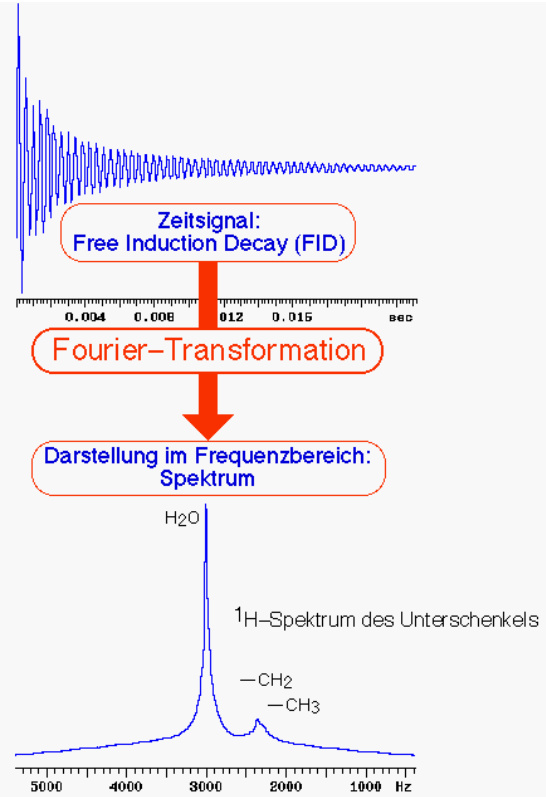
Résonance magnétique nucléaire



Images obtenues par IRM

- Prinzip:
  Resonanz-Anregung von Atomkernen durch Einstrahlung von Hochfrequenz (200 MHz bei 4.7 T)



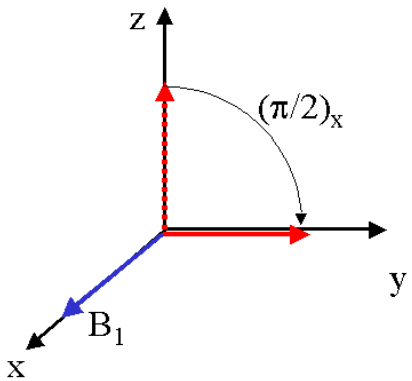


R.M.N. : Principe

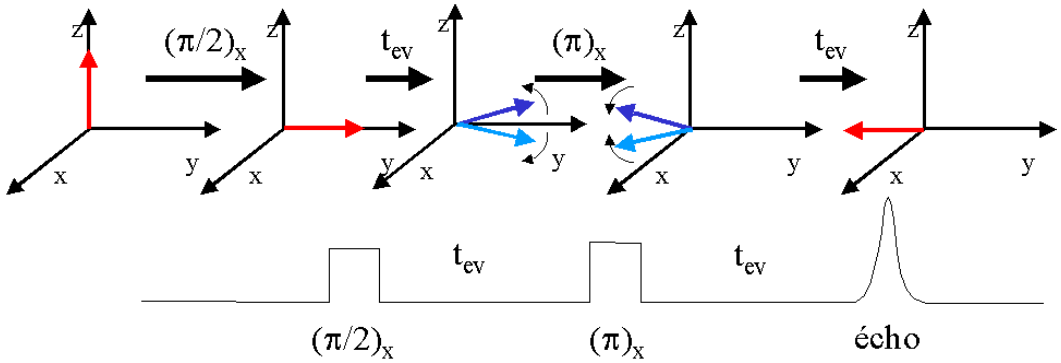
D. Marchand

4. Echo de spin

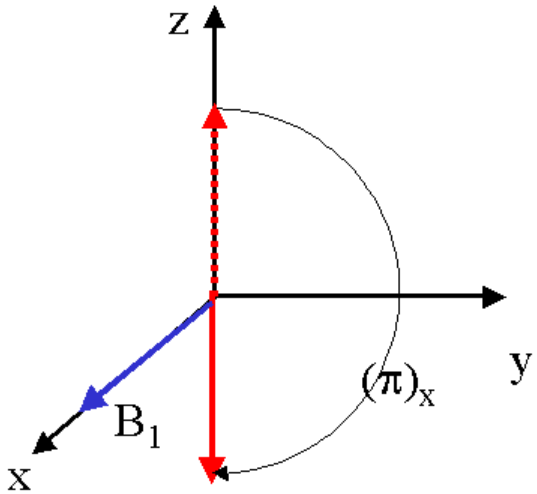
Il s'agit d'une technique de refocalisation de l'aimantation provenant de plusieurs noyaux (fréquences différentes) particulièrement utile pour l'imagerie par R.M.N. Deux impulsions sont utilisées l'une après l'autre, séparées par un intervalle de temps connu. Une première impulsion $\left(\frac{\pi}{2}\right)_x$



Bascule l'aimantation sur *Oy*. Les noyaux différents vont alors précesser autour de $\vec{B}_0$ avec leur fréquence propre, de telle façon qu'ils se distribuent autour de *Oy,* certains en retard d'autres en avance. Le dessin ci-dessous représente ce qui se passe pour deux noyaux différents



Après un temps t_{ev}, on envoi une impulsion $(\pi)_x$



Elle bascule les deux aimantations autour de - *Oy*, chacune gardant son sens de progression dans le référentiel tournant. Elles vont donc s'additionner de nouveau sur – *Oy* après un intervalle de temps t_{ev}, postérieur à la deuxième impulsion. Ceci produit alors un signal en écho facile à mesurer puisqu'il rassemble tous les noyaux de l'échantillon.