

SAUTS QUANTIQUES

Avertissement : Ce texte est un peu « technique » et nécessite un minimum de prérequis pour suivre le déroulement des calculs théoriques. Dans une première lecture, on pourra se contenter de retenir l'exposé des idées développées.

La notion de saut quantique remonte à la préhistoire de la mécanique quantique. A la suite de l'introduction du photon par Einstein (effet photoélectrique, 1905), Bohr suggéra en 1913 que l'interaction entre un atome et le rayonnement procède par absorption ou émission de photons, l'électron atomique effectuant des sauts d'une orbite à une autre. A titre d'exemple, le processus d'émission suit la règle des fréquences de Bohr, qui n'est rien d'autre que l'expression de la conservation de l'énergie.

(on suppose que l'atome est infiniment massif. Dans le cas contraire, il faut prendre en compte l'énergie de recul de l'atome)

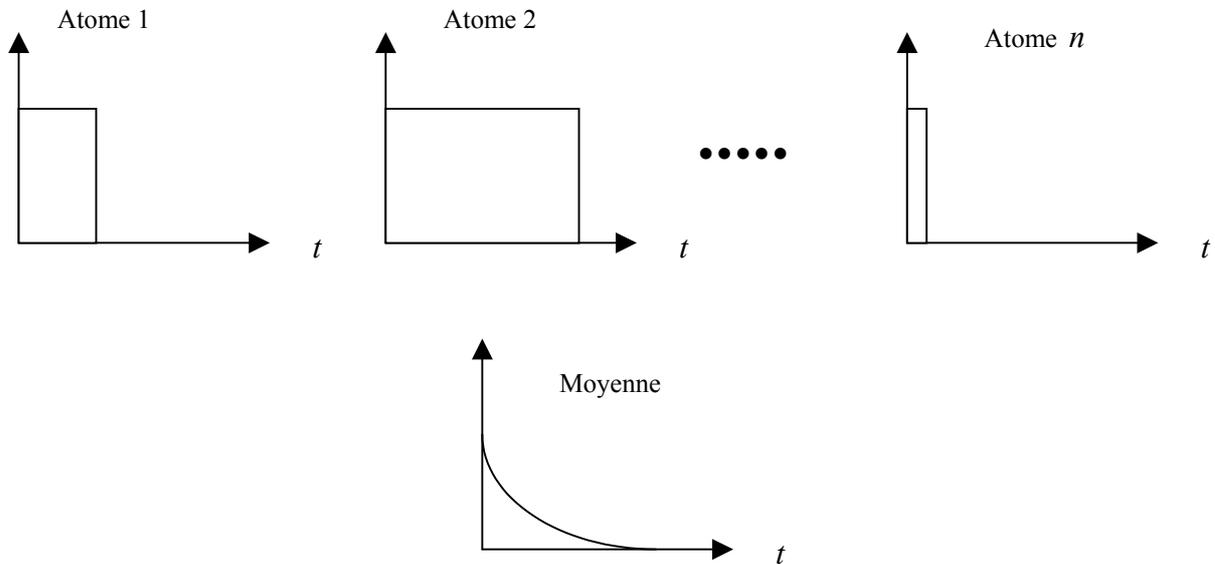
$$E_i = E_f + h\nu \quad (1)$$

E_i et E_f sont les énergies initiale et finale de l'atome, ν est la fréquence du photon reçu par le milieu extérieur à l'atome. En passant de l'état i à l'état f , l'atome effectue une transition, que l'on peut convenir d'appeler « **saut quantique** ».

Pendant des décennies, ce mécanisme primaire a été inobservable en tant que tel. En effet, une raie d'émission étant choisie pour un atome donné, son observation s'est faite usuellement sur une vapeur atomique contenant un très grand nombre d'atomes. De ce fait, les transitions individuelles, noyées dans la masse et survenant à des instants aléatoires décorrélés, construisent au total une intensité de fluorescence macroscopique dont les fluctuations sont imperceptibles au point de confondre l'intensité aléatoire avec sa valeur *moyenne*. La mesure de cette intensité dans une vapeur où une fraction notable d'atomes est portée, à $t = 0$, à l'état excité, révèle un déclin essentiellement exponentiel, permettant de définir un temps caractéristique $\tau_e = \Gamma_e^{-1}$; τ_e n'est autre que la durée de vie *moyenne* d'un atome à l'état excité. En réalité, certains atomes se désexcitent bien avant τ_e , d'autres bien après et c'est seulement quand on fait la moyenne des temps de mort individuels que l'on retrouve la durée de vie moyenne.

(Il en va exactement de même pour la décroissance radioactive. Au début (beaucoup de noyaux actifs), l'énormité du nombre de noyaux présents dans une source macroscopique engendre un déclin exponentiel ne présentant aucune anomalie, aucune marche n'étant visible à la sensibilité affichée (pendant l'intervalle élémentaire de comptage, δt , il se produit un nombre faramineux de désintégrations); pendant cette première phase, il est licite de confondre la valeur de la variable aléatoire N (nombre de noyaux actifs à l'instant considéré) avec sa valeur *moyenne*. Au contraire, au bout d'un temps très long devant la période radioactive, des fluctuations toujours présentes deviennent visibles (puisque'il reste alors un petit nombre de noyaux encore excités) et l'exponentielle, mesurée pour une source donnée, devient « bruitée ». Analysant le déclin radioactif comme il doit l'être (un processus *aléatoire*), on trouve d'ailleurs que les fluctuations relatives $\frac{\Delta N}{N}$ *divergent* quand $t \rightarrow \infty$.)

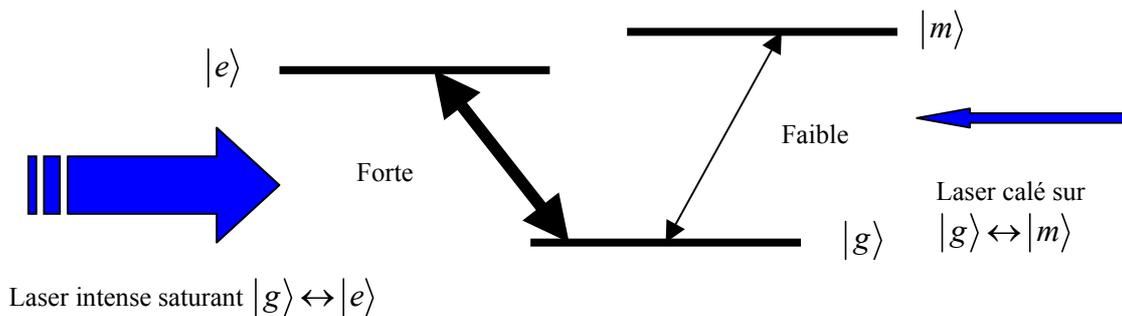
Pour espérer voir les sauts quantiques, il faut donc travailler avec un petit nombre de sources (atomes, ions), mais encore faut-il que le signal soit assez intense pour pouvoir être observé et mesuré.



Emissions individuelles et intensité moyenne de fluorescence.

Assez récemment (au début des années 80), il est devenu possible de piéger quelques ions et de les refroidir à l'aide de lasers, de façon à les observer dans des conditions quasi-idéales. C'est alors qu'une proposition d'expérience de double résonance optique due à Dehmelt [H.G. Dehmelt, Bull. Am. Phys. Soc. , 20, 60 (1975)] a pu être mise en œuvre ; l'idée est la suivante :

On considère un atome à trois niveaux (voir figure ci-dessous).



Atomes à trois niveaux pour l'expérience de double résonance optique.

Les deux niveaux $|m\rangle$ et $|e\rangle$ sont supposés avoir des énergies voisines, les deux différences $E_m - E_g$ et $E_e - E_g$ sont dans le domaine optique ou UV – ce qui distingue l'état métastable considéré ici.

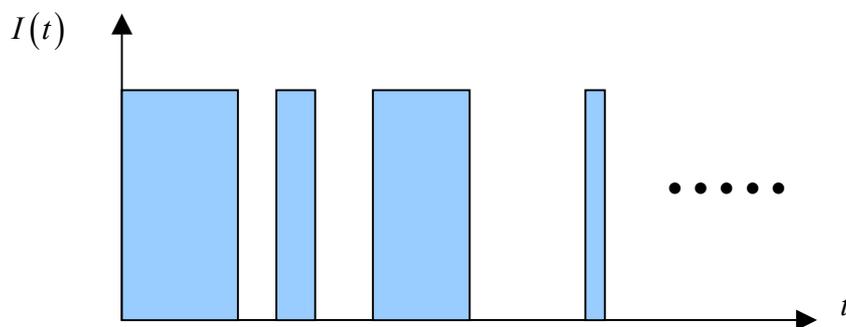
(L'aller-retour entre $|g\rangle$ et $|m\rangle$ n'est pas une oscillation de Rabi : c'est simplement le mécanisme ordinaire d'absorption et d'émission (essentiellement spontanée) entre deux états couplés par un champ

électromagnétique. **Dans le domaine des micro-ondes, l'émission induite l'emporte sur l'émission spontanée, c'est le contraire dans le domaine optique ou UV)**

Typiquement, la durée de vie de $|e\rangle$ est de l'ordre de 10^{-8} s, celle de $|m\rangle$ est de l'ordre de la seconde. Ces deux ordres de grandeurs, très différents, indiquent que les probabilités de transitions sont elles-mêmes très différentes : la transition $|g\rangle \leftrightarrow |m\rangle$ est très rare, comparée à $|g\rangle \leftrightarrow |e\rangle$. Par ailleurs, l'atome est soumis à deux lasers ; le premier, très intense, sature la transition $|g\rangle \leftrightarrow |e\rangle$, tandis que le second est calé sur la transition rare $|g\rangle \leftrightarrow |m\rangle$.

Si l'état de l'ion est le fondamental $|g\rangle$ ou l'état excité $|e\rangle$, le laser intense induit un mouvement de va-et-vient rapide entre ces deux états ; cette « oscillation » est rapide puisque la transition est permise et que la durée de vie de $|e\rangle$ est courte ; elle produit une fluorescence intense, facilement observable. Cependant, l'autre laser peut à un certain instant porter l'atome à l'état $|m\rangle$; il faut du temps pour cela, puisque la transition rare – mais elle finit bien par se produire – Dès lors, la fluorescence s'arrête et reste « noire » tant que l'atome n'est pas redescendu en $|g\rangle$ à partir de $|m\rangle$. Quand ceci se produit, la fluorescence recommence, et ainsi de suite. Au total, dans l'expérience proposée par Dehmelt, on doit assister à une fluorescence intermittente illustrée sur la figure ci-dessous.

(La transition faible survient à des instants aléatoires ; si ces derniers sont décorrélés, ce processus binaire (prenant deux valeurs) est connu sous le nom de **processus des télégraphistes**).



Fluorescence intermittente d'un atome unique

Par ailleurs, on peut affirmer que quand la fluorescence est absente, l'ion est dans l'état $|m\rangle$ et que quand elle se produit, il est dans le sous-espace $\{|g\rangle, |e\rangle\}$. En un sens, l'intermittence de la fluorescence est une succession de réductions de paquets d'ondes ou, dit autrement, l'observation de l'état de fluorescence constitue une observation directe des sauts quantiques impliquant l'état $|m\rangle$.

(Le signal observé est la fluorescence induite par le premier laser, dont la puissance spectrale détermine l'intensité de la fluorescence ; la question n'est pas de pouvoir observer le *photon unique* émis lors de la transition $|m\rangle \leftrightarrow |g\rangle$).

Le premier traitement théorique a été donné par Cook et Kimble [R.J.Cook & H.J.Kimble : « *Possibility of Direct Observation of Quantum Jumps* ». Phys. Rev. Let. **54**, 1023 (1985)] et repose sur des équations *cinétiques* pour les populations des états atomiques. En introduisant les coefficients d'Einstein A_a et B_{bc} (voir polycopié T1 p25-27 et TIII p190-193) et les densités spectrales W_i des lasers, ces équations s'écrivent :

$$\begin{cases} \dot{P}_g = -(B_{eg}W_1 + B_{mg}W_2)P_g + (A_e + B_{eg}W_1)P_e + (A_m + B_{mg}W_2)P_m & (2) \\ \dot{P}_e = -(A_e + B_{eg}W_1)P_e + B_{eg}W_1P_g & (3) \\ \dot{P}_m = -(A_m + B_{mg}W_2)P_m + B_{mg}W_2P_g & (4) \end{cases}$$

ce que l'on peut traduire matriciellement :

$$|\dot{P}\rangle = \Gamma |P\rangle \quad (5)$$

On vérifie que $\sum \dot{P}_a = 0$, ce qui traduit la conservation de la somme $P_g + P_e + P_m = 1$ (la somme des éléments d'une colonne de Γ est nulle, d'où une valeur propre nulle pour Γ) ; par hypothèse $A_m \ll A_e$.

Avec W_2 strictement nul (deuxième laser coupé) et $P_g(t=0) = 1$, on obtient la quasi égalité $P_g(t=0) \simeq P_e = \frac{1}{2}$ après un temps de l'ordre de $(A_e + B_{eg}W_1)^{-1}$; on dit alors que la transition (forte) $e \leftrightarrow g$ est saturée. Avec W_2 non nul (mais $B_{mg}W_2 \ll B_{eg}W_1$) la transition forte reste saturée – ce que l'on obtient quand W_1 est très grand (notamment si $B_{eg}W_1 \gg A_e$) – les populations P_e et P_g sont à peu près égales ; on se retrouve de fait avec une sorte de système à deux niveaux : l'atome est soit dans $\{|g\rangle, |e\rangle\}$ avec des populations égales, soit dans l'état $|m\rangle$; il suffit dès lors de déterminer les deux populations P_{\pm} :

$$P_+ = P_m \quad P_- = P_g + P_e \quad (6)$$

sachant que, dans ce régime, on a :

$$P_g \simeq P_e \simeq \frac{1}{2}P_- \quad (7)$$

(Les deux populations P_e et P_g sont presque égales, mais différentes de $\frac{1}{2}$. Sur une échelle de temps courte par rapport à $(B_{mg}W_2)^{-1}$ tout se passe comme si le niveau métastable était absent et ces deux populations valent à peu près $\frac{1}{2}$. En revanche, aux temps longs, bien après que le niveau $|m\rangle$ ait eu le temps de jouer son rôle et toujours dans l'hypothèse où la transition forte reste saturée, toutes les populations tendent vers $\frac{1}{3}$ quand l'état $|m\rangle$ a une très longue durée de vie. En définitive, avec les hypothèses en vigueur, le système se comporte d'abord comme un atome à deux niveaux, puis comme un atome à trois niveaux).

En reportant les nouvelles variables P_{\pm} dans (3), il vient compte tenu de (7) :

$$\dot{P}_+ = -(A_m + B_{mg}W_2)P_+ + \frac{1}{2}B_{mg}W_2P_- \quad (8)$$

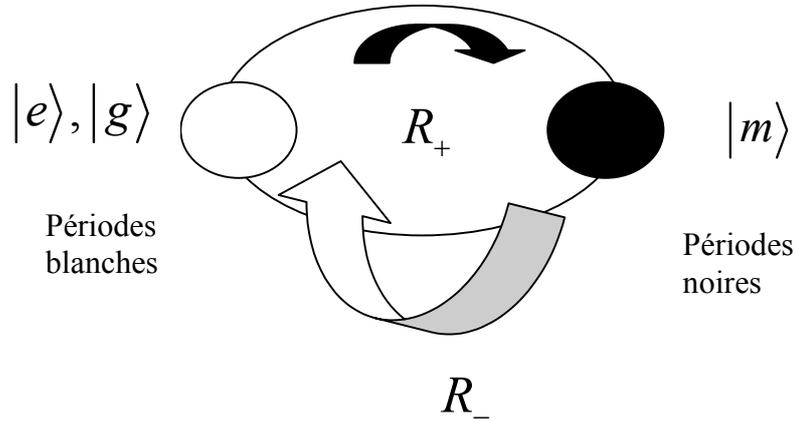
soit :

$$\dot{P}_+ = -R_- P_+ + R_+ P_- \quad (9)$$

où $R_+ = \frac{1}{2} B_{mg} W_2$ et $R_- = A_m + B_{mg} W_2$. Comme $P_+ + P_- = 1$, on en déduit que l'on a aussi :

$$\dot{P}_- = -R_+ P_- + R_- P_+ \quad (10)$$

L'inspection de ces équations révèle que R_- allume la fluorescence, alors que R_+ l'éteint.



R_+ éteint la fluorescence, R_- la rallume.

L'état d'équilibre des équations (9) et (10) est :

$$P_{+eq} = \frac{R_-}{R_+ + R_-} \quad P_{-eq} = \frac{R_+}{R_+ + R_-} \quad (11)$$

Ces probabilités donnent la *moyenne* temporelle du signal de fluorescence, une fois les transitions éteintes ; si I_0 désigne l'intensité (constante) d'une période allumée (blanche) :

$$\bar{I} = P_{+eq} \times 0 + P_{-eq} \times I_0 = I_0 P_{-eq} = \frac{R_+}{R_+ + R_-} I_0 \quad (12)$$

En revanche, les probabilités stationnaires (11) ne disent évidemment rien sur les *fluctuations* de ce signal. Celles-ci ne peuvent être obtenues que comme sous-produits d'une description plus fine du processus stochastique, que l'on suppose stationnaire (toutes les probabilités à deux temps ne dépendent que de la différence des temps, toutes les probabilités à un temps sont indépendantes du temps).

Désignons par $P_{n\pm}(t)$ la probabilité qu'il y ait entre les instants t_0 et $t_0 + t$, n transitions d'un secteur à l'autre *et* que l'état final (à l'instant t) soit \pm ; par construction, les valeurs de ces probabilités à $t = 0$ sont 0 et 1, suivant l'état à $t = 0$ (aucune transition ne peut se produire sur un intervalle de temps nul). Par l'hypothèse de stationnarité, ces probabilités ne dépendent que de t . Pour obtenir leur équation d'évolution, il suffit de faire un bilan classique de probabilité entre deux instants très proches t et $t + \Delta t$, et de prendre la limite $\Delta t \rightarrow 0$. Par exemple, entre t et $t + \Delta t$, P_{n+} peut, par un seul *flip* au plus, évoluer de deux façons :

- il ne se passe rien, probabilité $= (1 - R_- \Delta t)$ (13)

- il y a eu $n-1$ transitions jusqu'à t , qui ont conduit le système dans l'état $-$ et l'une se produit entre t et $t + \Delta t$, probabilité $= R_+ \Delta t$ (14)

Evidemment, il y a bien d'autres processus possibles, mais comme ils impliquent plus d'un *flip*, leurs probabilités sont de ce fait en $\Delta t^{k \geq 2}$: ils ne contribuent donc pas, dans la limite $\Delta t \rightarrow 0$, à l'histoire de P_{n+} entre t et $t + \Delta t$. Au total, pour P_{n+} , le bilan de probabilité s'exprime comme :

$$P_{n+}(t + \Delta t) = (1 - R_- \Delta t) P_{n+}(t) + R_+ \Delta t P_{n-1-}(t) + O(\Delta t^{k \geq 2}) \quad (15)$$

De même pour P_{n-} on obtient :

$$P_{n-}(t + \Delta t) = (1 - R_+ \Delta t) P_{n-}(t) + R_- \Delta t P_{n-1+}(t) + O(\Delta t^{k \geq 2}) \quad (16)$$

Dans la limite $\Delta t \rightarrow 0$, ces équations deviennent ($n = 0, 1, 2, \dots$) :

$$\dot{P}_{n+}(t) = -R_- P_{n+} + R_+ P_{n-1-} \quad (17)$$

$$\dot{P}_{n-}(t) = -R_+ P_{n-} + R_- P_{n-1+} \quad (18)$$

En particulier, comme $P_{-1\pm} = 0$:

$$\dot{P}_{0\pm}(t) = -R_{\mp} P_{0\pm}(t) \Leftrightarrow P_{0\pm}(t) = e^{-R_{\mp} t} \quad (19)$$

Supposons que le signal de fluorescence s'éteigne à l'instant t_0 ; ceci signifie que l'atome vient d'arriver dans l'état métastable ; la probabilité qu'il n'y ait eu aucune transition entre $t = t_0$ et que l'atome soit dans l'état $+$ est donc égale à 1, d'où $P_{0+}(0) = 1$ et :

$$P_{0+}(t) = e^{-R_- t} \quad (20)$$

Ce dernier résultat peut d'ailleurs se retrouver immédiatement comme suit. $P_{0+}(t)$ est finalement la probabilité pour que le système étant parti de $|+\rangle \equiv |m\rangle$ à l'instant zéro, soit en t dans le même état *sans jamais avoir transité*, autrement dit la probabilité pour que l'atome ait été en permanence dans $|+\rangle$ entre 0 et t . La probabilité de transition par unité de temps pour le passage $|m\rangle \rightarrow |g\rangle$ est R_- ; on peut donc écrire de façon évidente :

$$P_{0+}(t + \Delta t) = (1 - R_- \Delta t) P_{0+}(t) + O(\Delta t^{k \geq 2}) \quad (21)$$

d'où l'on déduit par passage à la limite :

$$\dot{P}_{0+}(t) = -R_- P_{0+}(t) \Leftrightarrow P_{0+}(t) = e^{-R_- t} \quad (22)$$

Cette expression donne donc la probabilité pour que le signal de fluorescence soit encore éteint à l'instant $t + t_0$ quand il l'était à $t = t_0$ - quel que soit l'instant t_0 puisque l'on est en régime permanent - sans s'être jamais allumé dans l'intervalle ; évidemment, plus le temps passe, plus cette probabilité est petite. Si T désigne la variable aléatoire : durée de la période noire, on a donc :

$$\text{Prob}(T > t) = e^{-R_- t} \quad (23)$$

De cette fonction de répartition, on déduit la densité de probabilité de la durée des périodes noires :

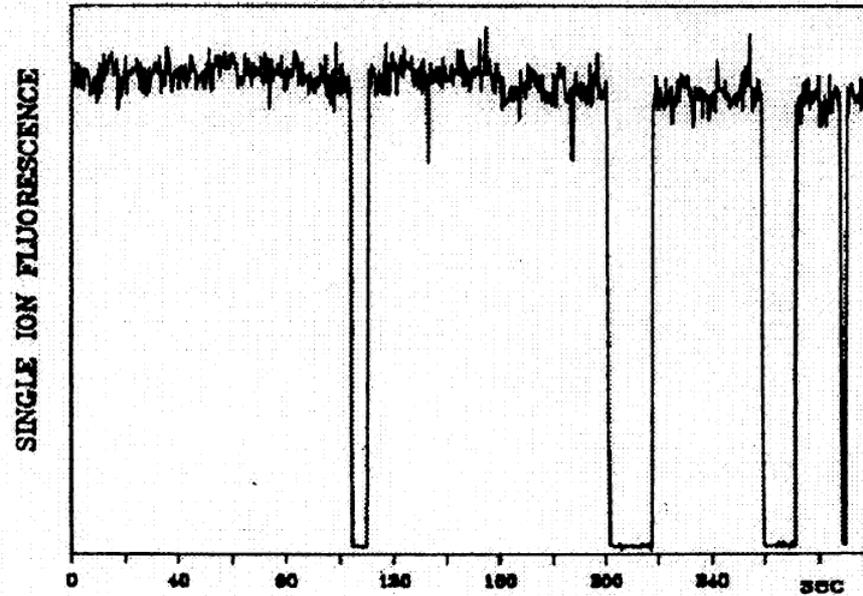
$$\text{Prob}[t < T < t + dt] = R_- e^{-R_- t} \quad (24)$$

Les temps de résidences dans l'état métastable (on appelle *shelving* le phénomène de piégeage dans cet état) sont donc théoriquement distribués suivant une loi exponentielle, qui est bien vérifiée expérimentalement [W. Nagourney, J. Sandberg & H. Dehmelt : « *Shelved Optical Electron Amplifier : Observation of Quantum Jumps* » Phys. Rev. Let. **56**, 2797 (1986)] moyennant quelques corrections

venant affiner après coup le modèle théorique de Cook & Kimble. La connaissance de la loi (24) permet notamment d'obtenir la durée moyenne des périodes sans signal :

$$\langle T \rangle = \int_0^{\infty} dt R_- e^{-R_- t} = \frac{1}{R_-} \quad (25)$$

Des arguments analogues montrent que la durée des périodes « blanches » est distribuée selon la densité $R_+ e^{-R_+ t}$ et que sa moyenne est $\frac{1}{R_+}$. La durée des périodes noires est donc distribuée selon une loi exponentielle donnée par (24), ce qui est assez bien vérifié expérimentalement.



Signal de fluorescence intermittente d'un ion Ba^+

[Figure extraite de : Th. Sauter, W. Neuhauser, R. Blatt & P.E. Toschek « *Observation of quantum Jumps* » Phys. Rev. Let **57**, 1696 (1986)]

Il est également possible de calculer (et de mesurer) la fonction d'autocorrélation (centrée) de l'intensité, qui donne des renseignements plus fins sur le processus aléatoire. Elle est définie comme :

$$C(t) = \langle I(t_0)I(t_0+t) \rangle - \langle I(t_0) \rangle \langle I(t_0+t) \rangle = \langle I(t_0)I(t_0+t) \rangle - I_0^2 \quad (26)$$

comme la variable aléatoire I vaut 0 ou I_0 , le produit $I(t)I(t')$ peut prendre deux valeurs, 0 ou I_0^2 - cette dernière valeur étant obtenue si le signal existe à l'instant t et à l'instant t' . L'espérance mathématique du produit contient donc un seul terme :

$$\langle I(t)I(t') \rangle = I_0^2 I(t_0+t) P_{on\ on}(t, t') \quad (27)$$

où $P_{on\ on}(t, t')$ est la probabilité pour que le signal soit « on » à l'instant t et à l'instant t' . Grâce à la stationnarité, il suffit de trouver $P_{on\ on}(t)$, probabilité pour que l'on soit dans une période blanche à l'instant t et à l'instant 0, quel que soit le nombre de transitions intervenues entre 0 et t .

Pour trouver cette probabilité, il suffit de faire à nouveau le bilan des probabilités entre t et $t + \Delta t$. C'est R_+ qui éteint la fluorescence, donc $1 - R_+ \Delta t$ donne la probabilité pour que la

fluorescence reste allumée Δt plus tard. Il y a un autre terme dans le bilan, introduisant la probabilité $P_{on\ off}$ pour que le système soit « on » à t et « off » à 0. En effet, *via* R_- - qui allume la fluorescence - il y a un autre chemin contribuant à $P_{on\ on}(t)$: c'est celui où le système est allumé en 0, éteint à t et bascule entre t et $t + \Delta t$. Le bilan est donc :

$$P_{on\ on}(t + \Delta t) = (1 - R_+\Delta t)P_{on\ on}(t) + R_-P_{on\ off}(t) \quad (28)$$

Il faut donc aussi connaître $P_{on\ off}(t)$; des arguments analogues montrent que cette probabilité satisfait :

$$P_{on\ off}(t + \Delta t) = (1 - R_-\Delta t)P_{on\ off}(t) + R_+P_{on\ on}(t) \quad (29)$$

ans la limite $\Delta t \rightarrow 0$, on obtient :

$$P_{on\ on}(t) = -R_+P_{on\ on} + R_-P_{on\ off} \quad (30)$$

$$P_{on\ off}(t) = -R_-P_{on\ off} + R_+P_{on\ on} \quad (31)$$

Lorsque le processus a atteint sa phase stationnaire (où notamment, toutes les fonctions de corrélation $\langle A(t)A(t') \rangle$ ne dépendent que de la *différence* des temps), $P_{on\ on}(t=0) = P_{-eq} = \frac{R_-}{R_+ + R_-}$: par

ailleurs, $P_{on\ off}(t=0) = 0$. La solution du système (30,31) avec ces conditions initiales est :

$$P_{on\ on}(t) = \frac{R_-^2}{(R_+ + R_-)^2} + \frac{R_+R_-}{(R_+ + R_-)^2} e^{-(R_+ + R_-)t} \quad (32)$$

Le report de cette expression dans (26) donne :

$$C(t) = \sigma_I^2 e^{-(R_+ + R_-)t} \quad (t > 0) \quad (33)$$

avec :

$$\langle I \rangle = \frac{R_-}{R_+ + R_-} I_0 \quad ; \quad \sigma_I^2 = \langle I^2 \rangle - \langle I \rangle^2 = \frac{R_+R_-}{(R_+ + R_-)^2} I_0^2 \quad (34)$$

Lorsqu'un processus aléatoire est stationnaire, toutes les fonctions d'autocorrélation sont paires ; l'expression (33) est donc vraie $\forall t$ à condition d'y remplacer t par $|t|$. Dans ces conditions, le spectre $S(\omega)$ des fluctuations d'intensité est une fonction à valeurs réelles :

$$S(\omega) \equiv \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dt C(t) e^{i\omega t} = \int_0^{\infty} dt C(t) \cos \omega t = \frac{\sigma_I^2 (R_+ + R_-)}{\omega^2 + (R_+ + R_-)^2} \quad (35)$$

c'est une lorentzienne de largeur $\Delta\omega = R_+ + R_-$.

La possibilité d'observer un très petit nombre d'atomes ou ions a ainsi permis de mettre à jour les mécanismes élémentaires imaginés par Bohr. En outre, notamment pour des raisons méthodologiques, elle a ouvert une nouvelle voie théorique construite sur la notion de fonction d'onde stochastique [J. Dalibard, Y. Castain & K. Mølmer : « *Wave-Function Approach to Dissipative Process in Quantum Optics* » Phys.Rev.Let. **68**, 580 (1992)]. En effet, la description usuelle des processus optiques dissipatifs consiste à écrire une équation maîtresse (équations de Bloch optiques) pour l'opérateur densité relatif à un ensemble statistique d'atomes, bien approché en pratique par une vapeur contenant un très grand nombre d'entités élémentaires *indépendantes*. En dehors des difficultés techniques à surmonter pour obtenir la solution d'une telle équation (Pour un système à N niveaux, l'opérateur densité est représenté par une matrice $N \times N$: il faut donc calculer et engranger environ N^2 quantités réelles), il est bien clair que ce formalisme est très mal adapté au cas des petits amas et, à la limite, au cas de l'atome unique - on commence par calculer des

propriétés d'ensemble pour essayer d'en déduire des comportements individuels -.Un traitement plus direct est donc visiblement souhaitable.

Le choix de se cantonner à un formalisme « purement mécanique » pose le problème de la description de l'irréversibilité (dissipation). Celle-ci apparaît naturellement quand on couple un petit système à un grand système, et est *a contrario* exclue dans un formalisme hamiltonien standard concernant un petit nombre de degrés de liberté. S'en tenir à une description en terme de fonction d'onde passe donc par la réconciliation entre deux concepts antagonistes, en forçant la mécanique à être irréversible. Une façon d'induire l'irréversibilité est de ponctuer la dynamique par des opérations de réduction du paquet d'ondes, c'est-à-dire d'effectuer par la pensée des mesures idéales entrant dans la catégorie des *gedanken experiments* (les fameuses « expériences de pensée »).

Illustrons ces idées dans le cas d'un atome à deux niveaux piloté par un mode monochromatique de pulsation ω_L , représenté classiquement par $\mathcal{E}_o \cos \omega_L t$ et couplé au champ électromagnétique. Pour simplifier, on supposera que celui-ci peut être soit dans l'état fondamental $|0\rangle$ (vide de photons), soit dans un état à un photon d'impulsion $\hbar \vec{k}$ et de polarisation ε , état noté $|\vec{k}, \varepsilon\rangle$. Les deux états atomiques « nus » sont notés $|g\rangle$ et $|e\rangle$ et ont pour énergies E_g et $E_e = E_g + \hbar \omega_p$. Le champ classique fait osciller l'atome à *la* Rabi : quand l'atome est en $|g\rangle$, le système (atome + champ classique) a l'énergie $E_g + \hbar \omega_L$, quand l'atome est en $|e\rangle$, ce système a l'énergie E_e . En redéfinissant le zéro d'énergie à la valeur $E_g + \hbar \omega_L$, le Hamiltonien décrivant l'oscillation de Rabi est :

$$\hat{H}_{\text{Rabi}} = \hbar(\omega_p - \omega_L)|e\rangle\langle e| + \frac{\hbar\Omega}{2}(|e\rangle\langle g| + |g\rangle\langle e|) \quad (36)$$

(On s'en tient à l'approximation de l'onde tournante (*Rotating Wave Approximation*, acronyme RWA), où les termes antirésonnants en $e^{\pm 2i\omega_L t}$ sont négligés)

où $\Omega = -d\mathcal{E}_o$, d étant le moment dipolaire électrique de l'atome ; $\delta = \omega_L - \omega_p$ est le désaccord (detuning) entre le laser et la pulsation atomique.

Supposons qu'à l'instant t , le système complet (atome + champ quantifié) est dans l'état factorisé :

$$|\Psi(t)\rangle = (a_g |g\rangle + a_e |e\rangle) \otimes |0\rangle \equiv |\Phi(t)\rangle \otimes |0\rangle \quad (37)$$

Maintenant, entre t et $t + \delta t$ (δt est supposé très petit devant Γ^{-1} , durée de vie de l'état excité, δ^{-1} et Ω^{-1}), il y a possibilité d'émission spontanée de photons. L'état à l'instant $t + \delta t$ peut se décomposer en la somme de deux termes, chacun d'entre eux correspondant à un nombre donné de photons du champ quantifié :

$$|\Psi(t + \delta t)\rangle = |\Psi^{(0)}(t + \delta t)\rangle + |\Psi^{(1)}(t + \delta t)\rangle \quad (38)$$

avec :

$$|\Psi^{(0)}(t + \delta t)\rangle = (a'_g |g\rangle + a'_e |e\rangle) \otimes |0\rangle \quad ; \quad |\Psi^{(1)}(t + \delta t)\rangle = |g\rangle \otimes \sum_{\vec{k}, \varepsilon} \beta_{\vec{k}, \varepsilon} |\vec{k}, \varepsilon\rangle \quad (39)$$

(Quand il y a zéro photon, l'atome peut être soit en $|g\rangle$ soit en $|e\rangle$ (transitions virtuelles sans évacuation du photon). Quand il y a un photon, l'atome est dans l'état fondamental, puisqu'un photon a été émis vers l'extérieur. Par ailleurs, la désexcitation suivie d'une réexcitation pendant δt est un processus à deux étapes qui est d'ordre δt^2).

Les expressions précises de ces états peuvent être obtenues de diverses façons (à la Wigner-Weisskopf, résolvante dans l'approximation du pôle, Hamiltonien effectif non-hermitique, *etc.*). Le carré de la norme de $|\psi^{(1)}\rangle$ est la probabilité δp d'émission d'un photon entre t et $t+\delta t$, soit $\delta p = \Gamma |a_e|^2 \delta t$. Il en résulte que $\langle \psi(0) | \psi(0) \rangle = 1 - \delta p$. Par ailleurs a'_g et a'_e s'obtiennent en faisant évoluer l'atome avec $\hat{H} \equiv \hat{H}_{\text{Rabi}} - i\hbar \frac{\Gamma}{2} |e\rangle\langle e|$; enfin, $\beta_{\vec{k},\varepsilon}$ est l'amplitude de probabilité d'émission d'un photon d'impulsion $\hbar\vec{k}$ et de polarisation ε . Notons que au total, l'évolution du système est unitaire (la norme de $|\psi(t+\delta t)\rangle$ est la même, par construction, que celle de $|\psi(t)\rangle$), l'irréversibilité n'apparaissant que si l'on se concentre sur une composante de $|\psi(t)\rangle$, a_e par exemple.

C'est maintenant que s'introduit l'irréversibilité induite par « l'observation ». On suppose que tous les photons spontanés sont détectés avec un compteur parfait, qui mesure le nombre de photons dans le champ à l'instant $t+\delta t$; tout photon ainsi mesuré est absorbé par le compteur et disparaît donc du champ électromagnétique. Conformément au postulat de réduction du paquet d'ondes, si le résultat est 0, on doit projeter l'état juste avant la mesure, $|\psi(t+\delta t)\rangle$ sur $|\psi^{(0)}(t+\delta t)\rangle$, si au contraire on trouve 1, on projette $|\psi^{(1)}(t+\delta t)\rangle$; dans tous les cas, il faut renormaliser l'état ainsi obtenu puisqu'une deuxième mesure effectuée immédiatement après la première doit donner le même résultat avec la probabilité 1.

Dans un schéma numérique, le caractère aléatoire de l'émission spontanée pendant le petit intervalle δt est très facile à simuler : on se fixe un seuil $\eta \ll 1$ et on tire une suite de nombres au hasard r_i répartis uniformément, entre 0 et 1 par exemple. $0 \leq r_i \leq \eta$ correspond à l'émission d'un photon, alors que $\eta \leq r_i \leq 1$ correspond à la non-émission. Au total, après cette mesure de pensée, on a soit :

$$r_i < \eta \quad : \quad |\psi(t+\delta t)\rangle = |g\rangle \otimes |0\rangle \quad (40)$$

soit :

$$r_i > \eta \quad : \quad |\psi(t+\delta t)\rangle = \mu (a'_g |g\rangle + a'_e |e\rangle) \otimes |0\rangle = \mu (\hat{1} - i\hbar \hat{H} \delta t) |\psi(t)\rangle \otimes |0\rangle \quad (41)$$

(Après mesure, le photon émis a été extrait du système par le compteur et le champ est bien à nouveau dans l'état vide)

avec $\mu = \frac{1}{\sqrt{1-\delta p}}$. En tout cas, à l'issue de chaque mesure, on en revient à un état factorisé

de la forme (37), où le champ est dans l'état vide, et le cycle peut être recommencé. Dans ce schéma, l'évolution de la fonction d'onde est une marche au hasard dans l'espace des états atomiques, d'où le nom de fonction d'onde stochastique.

La question se pose de l'équivalence entre l'approche stochastique et la description conventionnelle à l'aide des équations de Bloch optiques. Dalibard *et al.* ont également montré que la moyenne d'ensemble de l'opérateur densité construit sur la fonction d'onde stochastique satisfait une équation d'évolution identique à celle de Bloch. D'ailleurs, les simulations numériques montrent qu'avec une centaine de tirages (d'histoires), les résultats obtenus par l'approche stochastique sont quasiment indiscernables de ceux fournis par les équations de Bloch. Même sans rentrer dans une comparaison détaillée des deux procédures,

il est clair que la description stochastique est bien moins coûteuse. La situation est analogue à celle que l'on rencontre dans la théorie conventionnelle du mouvement Brownien ; alors l'alternative est la suivante : ou bien on résout une équation aux dérivées partielles (équation de Fokker-Planck) pour la fonction de densité – ce qui permet d'avoir accès à toutes les moyennes en tant qu'espérances mathématiques – ou bien on simule numériquement la trajectoire Brownienne, ce qui est en principe très facile, et on moyenne sur un (grand) nombre d'histoires. Dans tous les cas, la dynamique moyennée est foncièrement irréversible : qu'elle se produise dans l'espace physique ou dans un espace plus abstrait, une marche au hasard présente toujours un comportement où la symétrie de renversement du temps est brisée.

(Au fond, la brisure de symétrie provient du fait que l'on s'intéresse à un petit nombre de degrés de liberté, relatifs à un sous-système du système considéré. Dans le cas de la particule brownienne, on regarde sa position, sa vitesse, *etc.* étant entendu que le « bain » - qui provoque la marche au hasard – est complètement évacué d'emblée et n'est présent que par son effet erratique sur la marche.

Un autre exemple est fourni par l'amortissement de Landau dans un plasma : l'équation de départ (de Vlassov, où le terme de collision est absent, au contraire de l'équation de Boltzmann) est irréversible et produit une densité $f(\vec{r}, \vec{p}, t)$ permettant de calculer les valeurs moyennes. Si l'on s'intéresse seulement à la densité de particules, il convient d'intégrer sur les impulsions, ce qui fait « perdre » une grande quantité d'information ; l'irréversibilité qui en découle traduit une évidence : une fois effectuée la sommation sur les vitesses, il n'est plus possible de reconstruire le mouvement, il y a une infinité de conditions initiales susceptibles de donner la même densité en position. Sommer, intégrer ou laisser dans l'ombre certains degrés de liberté en les confiant au hasard produit ici la « flèche » du temps.)