MESURE QUANTIQUE IDEALE

• *Le cas étudié dans ce problème est une simplification d'un cas concret où les oscillateurs S et D dont il va être question, sont des modes du champ électromagnétique. Dans un interféromètre, où D est constitué par un faisceau laser séparé en deux par des lames semi-transparentes, on fait interagir l'oscillateur signal S avec l'un de ces faisceaux. La mesure de phase consiste en une mesure interférométrique lors de la recombinaison des deux faisceaux de D.*

Ce type d'expérience, abondamment étudié ces dernières années, s'appelle aussi une mesure quantique « non-destructive » (ou encore « mesure QND »). On pourra se référer à : J-P. Poizat et Ph. Grangier, Phys.Rev.Lett. ***70****, 271 (1993).*

• *On rappelle que, pour k entier :* $\sum_{n=0}^{N} e^{\frac{2i\pi kn}{N+1}} = \begin{cases} N+1 \text{ si } k = p(N+1)\ \forall p \text{ entier} \\ 0 \text{ autrement} \end{cases}$

1. Préliminaires

On souhaite faire la mesure d'une grandeur physique A sur un système quantique S. On dispose d'un détecteur D adapté à la mesure de cette grandeur. La mesure comprend deux étapes. La première est l'interaction de S et D. La seconde, après que S et D se soient éloignés l'un de l'autre et n'interagissent plus, est la lecture de D. On suppose que D possède un ensemble d'états $\{|D_i\rangle\}$ orthonormés : $\langle D_i | D_j \rangle = \delta_{ij}$. Ces états correspondent, par exemple, aux diverses valeurs d'un affichage digital.

Soit $|\psi\rangle$ l'état du système S considéré et $|D\rangle$ l'état du détecteur D. Avant la mesure, l'état $|\Psi\rangle$ du système global $S+D$ est : $|\Psi_i\rangle = |\psi\rangle \otimes |D\rangle$.

Soient a_i et $|\phi_i\rangle$ les valeurs propres et états propres correspondants de l'observable $\hat{A}$. L'état $|\psi\rangle$ du système S admet le développement $|\psi\rangle = \sum_i \alpha_i |\phi_i\rangle$.

1. D'après les axiomes de la mécanique quantique, quelles sont les probabilités $p(a_i)$ de trouver les valeurs a_i dans la mesure de la grandeur A sur cet état ?

2. Après l'interaction du système S avec le détecteur, l'état du système global est devenu, en général : $|\Psi_f\rangle = \sum_{i,j} \gamma_{ij} |\phi_i\rangle \otimes |D_j\rangle$.

On observe alors l'état du détecteur.

(a) Quelle est la probabilité de trouver le détecteur dans l'état $|D_j\rangle$?

(b) Après cette mesure, quel est l'état du système global $S+D$?

2. Etats de phase de l'oscillateur harmonique

On considère un oscillateur harmonique de pulsation ω. On note $\hat{N}$ l'opérateur « nombre », c'est-à-dire que le Hamiltonien s'écrit $\hat{H} = \left(\hat{N} + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$ avec états propres $|N\rangle$ et valeurs propres $E_N = \left(N + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$, N entier positif ou nul.

Soit s un entier positif, on appelle « état de phase » la famille d'états définie, à chaque instant t, par :

$$\left|\theta_m\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{s+1}} \sum_{N=0}^{N=s} e^{-iN(\omega t+\theta_m)} \left|N\right\rangle$$

où θ_m peut prendre l'une quelconque des valeurs

$$\theta_m = \frac{2\pi m}{s+1} \quad (m = 0,1,\cdots,s)$$

2.1-/ Montrer que les $\left|\theta_m\right\rangle$ forment une famille orthonormée d'états.

2.2-/ On considère le sous-espace d'états de l'oscillateur tels que le nombre N de quanta est borné supérieurement par la valeur s. Les familles $\left\{\left|N\right\rangle, N = 0,1,\cdots,s\right\}$ et $\left\{\left|\theta_m\right\rangle, m = 0,1,\cdots s\right\}$sont des bases de ce sous-espace. Exprimer les vecteurs $\left|N\right\rangle$ dans la base des états de phase.

2.3-/ Quelle est la probabilité de trouver N quanta dans un état de phase $\left|\theta_m\right\rangle$?

2.4-/ Calculer la valeur moyenne de la position X dans un état de phase et justifier la nomenclature « états de phase ».

(*On rappelle que l'on a* $X\left|N\right\rangle = x_0\left(\sqrt{N+1}\left|N+1\right\rangle + \sqrt{N}\left|N-1\right\rangle\right)$ *où* x_0 *est la longueur caractéristique du problème et l'on posera* $C_s = \sum_{N=0}^{s} \sqrt{N}$ *).*

3. Interaction système-détecteur

On cherche à mesurer le nombre de quanta d'excitation d'un oscillateur harmonique de façon « idéale ». On couple cet oscillateur S à un autre oscillateur harmonique D, de même pulsation ω, qui constitue le détecteur.

On note $\left\{\left|n\right\rangle, n = 0,1\cdots,s\right\}$ les états propres de $\hat{H}_S = \left(\hat{n} + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$ et $\left\{\left|N\right\rangle, N = 0,1,\cdots,s\right\}$ les états propres de $\hat{H}_D = \left(\hat{N} + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$, où $\hat{n}$ et $\hat{N}$ sont les opérateurs « nombre » de chacun des oscillateurs.

On suppose que les nombres de quanta n et N sont tous deux bornés supérieurement par s. Le couplage entre S et D est :

$$\hat{V} = \hbar g \hat{n}\hat{N}$$

Ce Hamiltonien est effectivement réalisable si les deux oscillateurs sont deux modes du champ électromagnétique ; il résulte du phénomène appelé effet Kerr croisé.

3.1-/ Quels sont les états propres et les valeurs propres du Hamiltonien total

$$\hat{H} = \hat{H}_S + \hat{H}_D + \hat{V}$$

3.2-/ On suppose que le système global des deux oscillateurs est initialement dans un état *factorisé* :

$$\left|\Psi(0)\right\rangle = \left|\psi_S\right\rangle \otimes \left|\psi_D\right\rangle \text{ avec } \left|\psi_S\right\rangle = \sum_n a_n \left|n\right\rangle \text{ et } \left|\psi_D\right\rangle = \sum_N b_N \left|N\right\rangle$$

où nous supposons $\left|\psi_S\right\rangle$ et $\left|\psi_D\right\rangle$ normés.

a) On effectue une mesure de n dans l'état $\left|\Psi(0)\right\rangle$. Quels résultats peut-on trouver et avec quelles probabilités ? Répondre à la même question pour une mesure de N.

b) A l'instant $t = 0$, on établit le couplage entre les deux oscillateurs, puis on l'interrompt à un instant t . Quel est alors l'état $|\Psi(t)\rangle$ du système, cet état est-il lui aussi factorisable ?
c) La loi de probabilité du couple de variables aléatoires $\{n, N\}$ est-elle modifiée par l'interaction ? Pourquoi ?

4. La mesure « idéale »

L'oscillateur S est initialement (à $t = 0$) dans un état quelconque $|\psi_S\rangle = \sum_{n=0}^{s} a_n |n\rangle$; l'oscillateur D est préparé dans l'état

$$|\psi_D\rangle = \frac{1}{\sqrt{s+1}} \sum_{N=0}^{s} |N\rangle$$

4.1-/ On branche l'interaction $\hat{V}$ pendant l'intervalle de temps $[0, t]$. Exprimer l'état $|\Psi(t)\rangle$ en fonction des états de phase $\{|\theta_k\rangle\}$ de l'oscillateur détecteur D.

4.2-/ On suppose que le temps d'interaction est $t = t_0 \equiv \dfrac{2\pi}{g(s+1)}$.

a) Ecrire l'état du système $|\Psi(t_0)\rangle$.
b) Quelle est la probabilité de trouver le résultat θ_k en mesurant la phase de l'oscillateur détecteur D ?
c) Après cette mesure, quel est l'état de l'oscillateur S ? Décrire qualitativement ce qui se passerait si l'on choisissait un temps $t \neq t_0$.
d) Commenter le résultat. Pourquoi, à votre avis, J.von Neumann considérait-il cela comme une mesure quantique « idéale » ?

Corrigé

1. Préliminaires

1.1-/ L'état du système étant $|\psi\rangle = \sum_i \alpha_i |\phi_i\rangle$, la probabilité de trouver la valeur α_i dans une mesure de A est $p(\alpha_i) = |\alpha_i|^2$.

1.2-/ L'état du système global est $|\Psi_f\rangle = \sum_{i,j} \gamma_{ij} |\phi_i\rangle \otimes |D_j\rangle$. La probabilité de trouver le détecteur dans l'état $|D_j\rangle$, ou encore de lire le résultat correspondant, est la somme des probabilités $p_j = \sum_i |\gamma_{ij}|^2$ puisque les états $|\phi_i\rangle$ sont orthogonaux.

1.3-/ Après cette mesure, l'état du système global $S+D$ est, par principe de réduction du paquet d'ondes

$$|\Psi\rangle = \frac{\left(\sum_i \gamma_{ij} |\phi_i\rangle\right) \otimes |D_j\rangle}{\sqrt{\sum_i |\gamma_{ij}|^2}}$$

2. Etats de phase de l'oscillateur harmonique

2.1-/ D'après la définition des états de phase, on a :

$$\langle \theta_m | \theta_n \rangle = \frac{1}{s+1} \sum_{k=0}^{s} \sum_{k'=0}^{s} e^{ik(\omega t + \theta_m)} e^{-ik'(\omega t + \theta_n)} \langle k | k' \rangle$$

$$= \frac{1}{s+1} \sum_{k=0}^{s} e^{ik(\theta_m - \theta_n)} = \frac{1}{s+1} \sum_{k=0}^{s} e^{\frac{2i\pi k(m-n)}{s+1}} = \delta_{m,n}$$

2.2-/ Le produit scalaire d'un état $|N\rangle$ avec un état de phase est

$$\langle \theta_m | N \rangle = \left(\langle N | \theta_m \rangle\right)^* = \frac{1}{\sqrt{s+1}} e^{iN(\omega t + \theta_m)}$$

d'où le développement :

$$|N\rangle = \sum_{m=0}^{s} \langle \theta_m | N \rangle |\theta_m\rangle = \frac{1}{\sqrt{s+1}} \sum_{m=0}^{s} e^{iN(\omega t + \theta_m)} |\theta_m\rangle$$

2.3-/ D'après la définition d'un état de phase, la probabilité de trouver N quanta dans un état $|\theta_m\rangle$ est

$$p(N) = |\langle N | \theta_m \rangle|^2 = \frac{1}{s+1}$$

2.4-/ On obtient : $\langle \theta_m | X | \theta_m \rangle = 2x_0 \frac{C_s}{s+1} \cos(\omega t + \theta_m)$. Les phases des valeurs moyennes de x dans deux états de phase $|\theta_m\rangle$ et $|\theta_n\rangle$ diffèrent par un multiple entier $\frac{2(m-n)\pi}{s+1}$ de la phase élémentaire $\frac{2\pi}{s+1}$.

Un état de phase, qui dépend du temps, est un état propre de la phase de cet oscillateur. L'observable phase, qui dépend également du temps, est définie, dans le sous-espace de dimension s, par $\Theta = \sum_{m=0}^{s} \theta_m |\theta_m\rangle\langle\theta_m|$.

3. Interaction système-détecteur

3.1-/ Les états factorisés $|n\rangle \otimes |N\rangle$ sont les états propres du hamiltonien total

$$\hat{H} = \hat{H}_S + \hat{H}_D + \hat{V} = \left(\hat{n} + \hat{N} + 1\right)\hbar\omega + \hbar g \hat{n}\hat{N}$$

avec valeurs propres

$$E_{n,N} = (n + N + 1)\hbar\omega + \hbar g n N$$

3.2-/

a) Les résultats de mesure et les probabilités correspondantes sont $n = 0,1,\cdots,s$; $p(n) = |a_n|^2$ et $N = 0,1,\cdots,s$, $p(N) = |b_N|^2$.

b) L'état du système à l'instant t est

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_N \sum_n b_N a_n e^{-i\left[(n+N+1)\omega + gnN\right]t} |n\rangle \otimes |N\rangle$$

il n'est plus factorisé, en raison de l'interaction $\hat{V}$.

c) La loi de probabilité du couple de variables aléatoires $\{n, N\}$ reste $p(n,N) = |a_n|^2 |b_N|^2$. Elle n'est pas modifiée par l'interaction car $\hat{V}$ commute avec les opérateurs « nombres » $\hat{n}$ et $\hat{N}$. Les grandeurs n et N sont des constantes du mouvement.

4. La mesure « idéale »

4.1-/ On a, évidemment, $b_N = \dfrac{1}{\sqrt{s+1}}$ d'où

$$|\Psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{s+1}} \sum_N \sum_n a_n e^{-i\left[(n+N+1)\omega + gnN\right]t} |n\rangle \otimes |N\rangle$$

En reportant le développement des états $|N\rangle$ en fonction des états de phase, on obtient

$$|\Psi(t)\rangle = \frac{1}{s+1} \sum_{N=0}^{s} \sum_{n=0}^{s} a_n e^{-i\left[(n+N+1)\omega + gnN\right]t} |n\rangle \otimes \left(\sum_{k=0}^{s} e^{iN(\omega t + \theta_k)} |\theta_k\rangle \right)$$

Une fois effectuée la somme sur l'indice N, on aboutit à :

$$|\Psi(t)\rangle = \frac{1}{s+1} \sum_{n=0}^{s} \sum_{k=0}^{s} a_n e^{-i(n+1)\omega t} \left(\frac{1 - \exp\left[-i(s+1)(gnt - \theta_k)\right]}{1 - \exp\left[-i(gnt - \theta_k)\right]} \right) |n\rangle \otimes |\theta_k\rangle$$

4.2-/

a) Si le temps d'interaction est $t_0 = \dfrac{2\pi}{g(s+1)}$, la fraction se réduit à

$$\frac{1 - \exp\left[-i(s+1)(gnt_0 - \theta_k)\right]}{1 - \exp\left[-i(gnt_0 - \theta_k)\right]} = \frac{1 - \exp\left(-2i\pi(n-k)\right)}{1 - \exp\left(\dfrac{-2i\pi(n-k)}{s+1}\right)} = (s+1)\delta_{n,k}$$

soit

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{s} a_n e^{-i(n+1)\omega t_0} |n\rangle \otimes |\theta_n\rangle$$

b) La probabilité de trouver le résultat θ_n en mesurant la phase de l'oscillateur de détection D sur cet état est

$$p(\theta_n) = |a_n|^2$$

c) Après cette mesure, l'état de l'oscillateur S est tout simplement $|n\rangle$. Dans l'état $|\Psi(t)\rangle$ précédent, les deux systèmes sont parfaitement corrélés : à un état de phase de D correspond un seul état de nombre de quanta de S. Si l'on choisissait un temps différent de t_0, cette corrélation ne serait plus parfaite. Après une mesure de la phase de D l'état de S serait une superposition des états de nombre de quanta différents.

d) On voit que cette procédure, qui suppose un temps d'interaction bien particulier entre le système et le détecteur, permet de connaître la probabilité $p(n) = |a_n|^2$ que S soit dans un état à n quanta au sens statistique habituel. En outre, après avoir lu le résultat θ_n sur le détecteur, on est certain que S est dans l'état $|n\rangle$, sans avoir à interagir à nouveau avec lui (réduction du paquet d'ondes). En ce sens, cette procédure réalise effectivement les axiomes de la mécanique quantique sur la mesure ; elle constitue donc une mesure « idéale » d'une grandeur quantique.