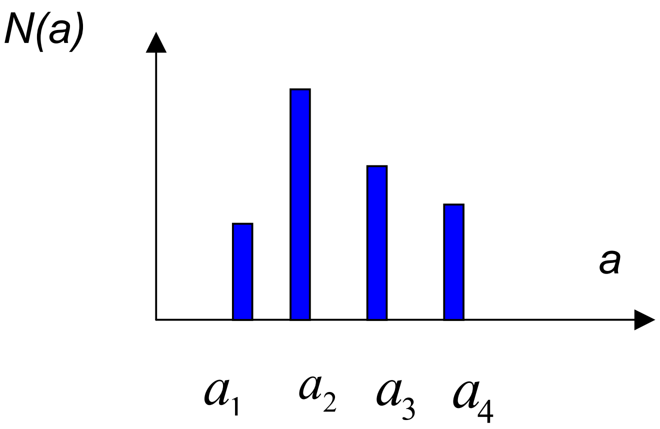
Inégalités de Heisenberg – ou – « relations d'incertitude »

Avec quelle précision peut-on mesurer <u>une</u> observable ?

On considère *N* systèmes tous préparés dans le même état $|\psi\rangle$



Valeur moyenne des résultats : $\langle a\rangle = \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle$

Variance : $\Delta a^2 = \langle a^2\rangle - \langle a\rangle^2 = \langle\psi|\hat{A}^2|\psi\rangle - \left(\langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle\right)^2$

Peut-on avoir un résultat certain, c'est-à-dire $\Delta a = 0$ **?**

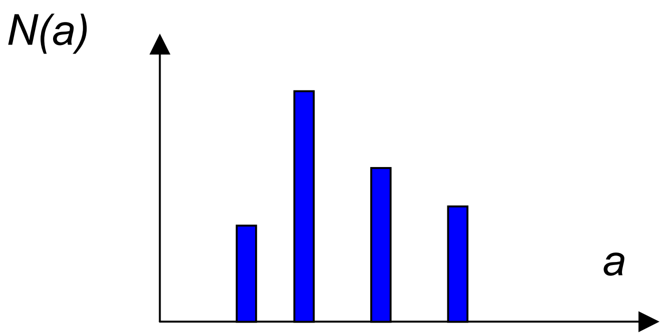
Oui, si le système est dans un état propre de $\hat{A}$

$$|\psi\rangle = |\psi_\alpha\rangle \quad \Longrightarrow \quad \langle a\rangle = a_\alpha \quad \Delta a = 0$$

Avec quelle précision peut-on mesurer <u>deux</u> observables ?

On considère 2*N* systèmes tous préparés dans le même état $|\psi\rangle$

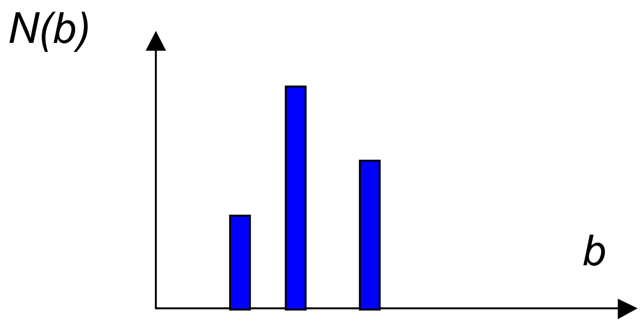
Inégalités de Heisenberg – ou – « relations d'incertitude » (suite)



$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4$

Mesure de *A* sur *N* systèmes

$\langle a \rangle \qquad \Delta a$



$b_1 \quad b_2 \quad b_3$

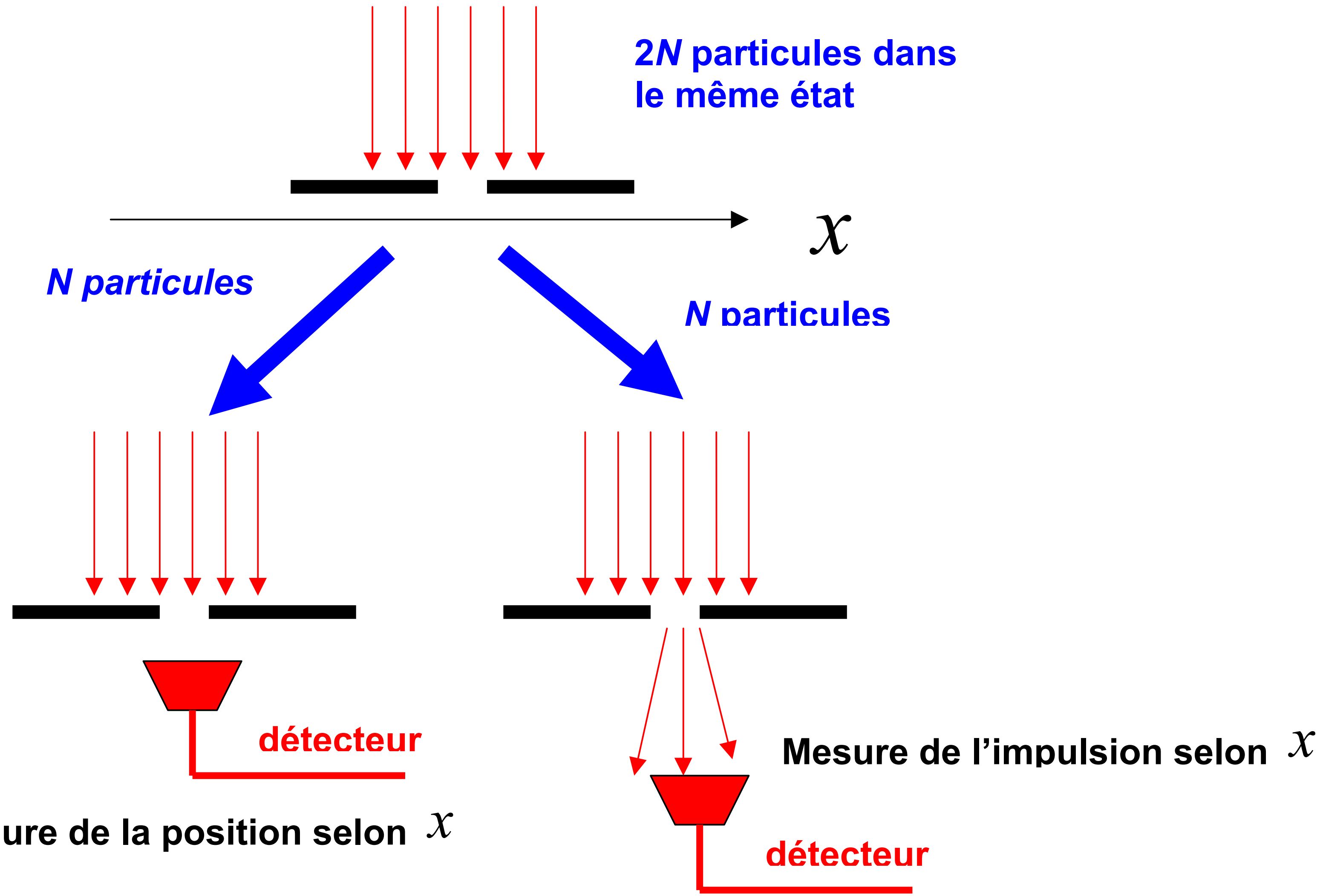
Mesure de *B* sur *N* systèmes

$\langle b \rangle \qquad \Delta b$

Peut-on avoir simultanément $\Delta a \text{ et } \Delta b = 0$?

En général, NON ! Plus précisément : $\boxed{\Delta a \Delta b \geq \frac{1}{2}\left|\langle \psi | \left[\hat{A}, \hat{B}\right] | \psi \rangle\right|}$ **avec** $\left[\hat{A}, \hat{B}\right] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$

Exemple d'application : position & impulsion (1)



$$\Delta x \Delta p_x \geq \ ?$$

Exemple d'application : position & impulsion (2)

Commutateur $\left[\hat{x},\hat{p}_x\right] = \ ?$

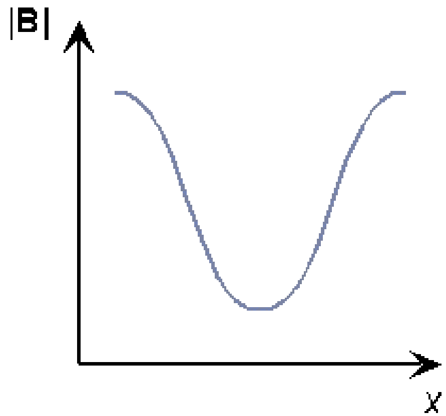
$$\left(x\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}x\right)\psi(x) = i\hbar\psi(x) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\left[\hat{x},\hat{p}_x\right] = i\hbar}$$

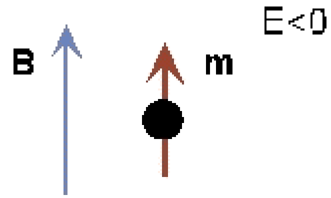
La relation générale $\Delta a \Delta b \geq \frac{1}{2}\left|\langle\psi|\left[\hat{A},\hat{B}\right]|\psi\rangle\right|$ **donne alors :** $\boxed{\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}}$

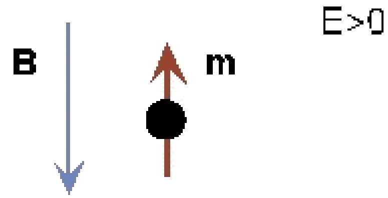
(Autre démonstration possible à partir des propriétés de la transformée de Fourier)

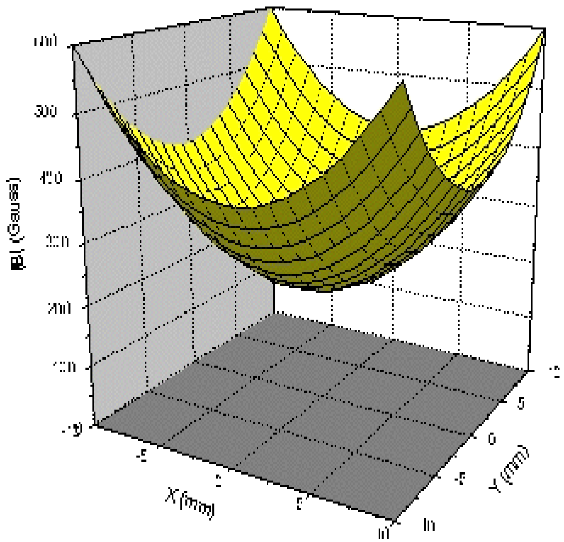
Cette relation d'incertitude n'a rien à voir avec la résolution des appareils de mesure, c'est-à-dire la largeur des canaux des histogrammes.

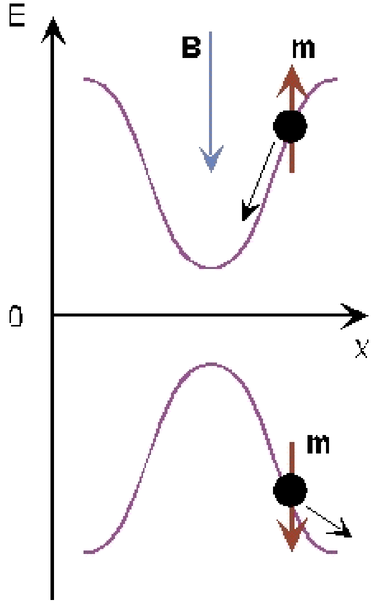
Une illustration de ces résultats : condensats de Bose-Einstein (1)











On prépare les atomes avec un moment magnétique opposé à $\vec{B}$:

$$E = -\vec{\mu}.\vec{B}(\vec{r}) = +|\vec{\mu}|\left|\vec{B}(\vec{r})\right|$$

$$= \frac{1}{2}m\left(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2\right)$$

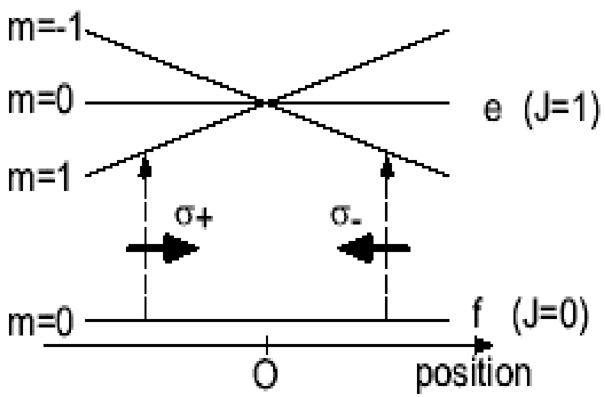
Hamiltonien :

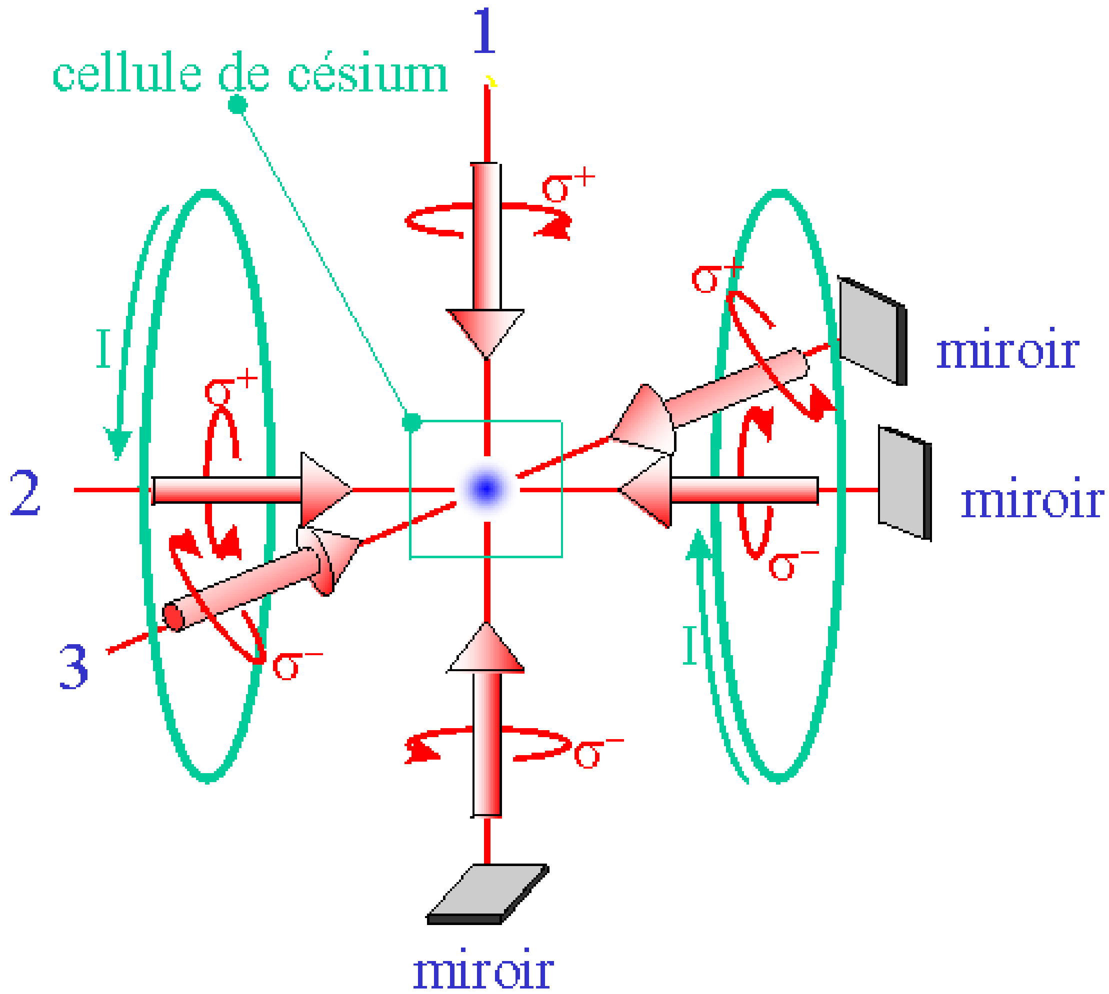
$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{\hat{p}_y^2}{2m} + \frac{\hat{p}_z^2}{2m} + \cdots$$

$$\cdots \frac{1}{2}m\left(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2\right)$$

Une illustration de ces résultats : condensats de Bose-Einstein (2)

On effectue un refroidissement
Et un piégeage de ces atomes
à l'aide d'un piège magnéto-
optique



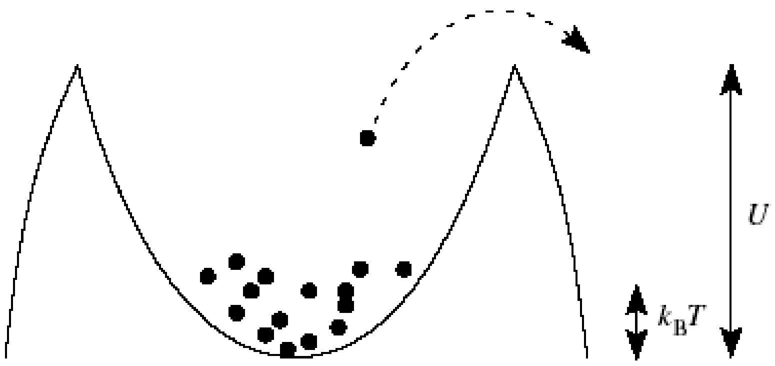


Principe du piège magnéto-optique :

La résultante des deux forces de pression de radiation dans un gradient de champ magnétique permet de créer une force de rappel vers le centre.

Une illustration de ces résultats : condensats de Bose-Einstein (3)

Refroidissement par évaporation à l'aide d'un piège harmonique



10^7 à 10^9 **atomes** ➡ 10^3 à 10^6 **atomes**

Si la température est assez basse, la majeur partie des atomes restants s'accumulent dans l'état fondamental du piège

$$\left| n_x = 0, n_y = 0, n_z = 0 \right\rangle$$

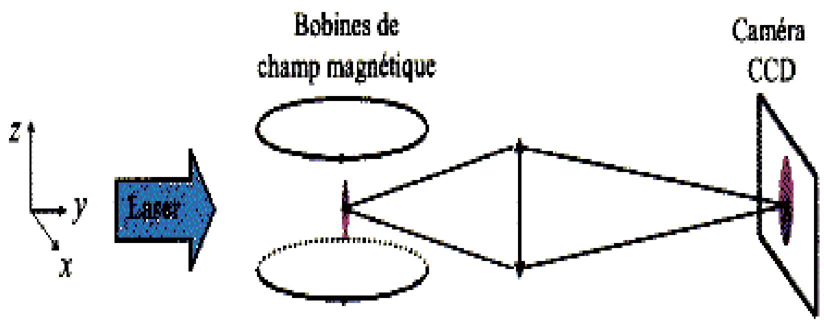
Principe de l'évaporation :

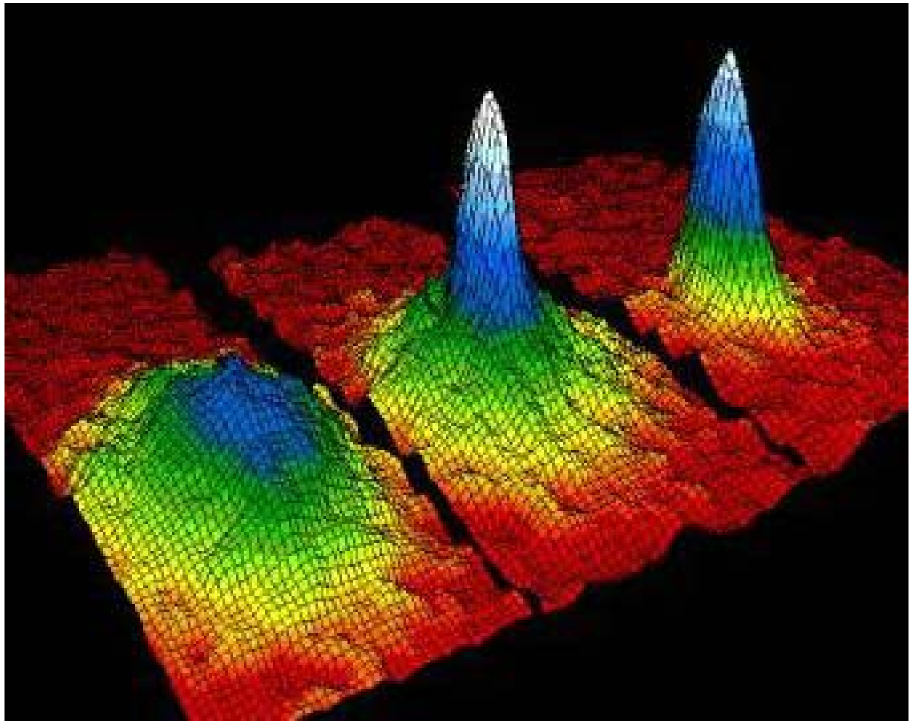
Après une collision élastique, une particule dispose de l'énergie suffisante pour s'échapper du piège de profondeur *U*. Les particules restantes se thermalisent a une température inférieure la température initiale.

Une illustration de ces résultats : condensats de Bose-Einstein (4)

Observation expérimentale

Par absorption de lumière et fluorescence





Mesure simultanée de *x* et *z* pour un grand nombre de systèmes quantiques (atomes) tous préparés dans le même état

T>Tc T<Tc T<<Tc

Une illustration de ces résultats : condensats de Bose-Einstein (5)

TEST DE L'INEGALITE DE HEISENBERG

Pour des atomes de sodium :

$$\frac{\omega_x}{2\pi} = 300 \text{ Hz} \qquad \Delta x = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_x}} = 3\,\mu\text{m}$$

$$\frac{\omega_z}{2\pi} = 5 \text{ Hz} \qquad \Delta z = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_z}} = 23\,\mu\text{m}$$

(coupure du champ magnétique dans le piège)

Un meilleur confinement selon *x* que selon *z* entraîne une dispersion en vitesse Δv_x plus grande que Δv_z

$$\Delta v_x = \sqrt{\frac{\hbar\omega_x}{m}} = 2 \text{ mm.s}^{-1} \qquad \Delta v_z = \sqrt{\frac{\hbar\omega_z}{m}} = 0,3 \text{ mm.s}^{-1}$$

conformément à l'inégalité de Heisenberg.

RELATION D'INCERTITUDE TEMPS-ENERGIE (1)

➡ **La relation $\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$ se déduit <u>DIRECTEMENT</u> des postulats et de la relation de commutation des opérateurs $\hat{x}$ et $\hat{p}_x$ c'est donc une propriété <u>INTRINSEQUE</u> de tout système.**

➡ **Il n'en est plus de même pour la relation $\boxed{\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}}$ car <u>le temps n'est pas un opérateur mais un paramètre</u> qui a une valeur bien définie dans les équations : bien qu'on puisse le mesurer, ce n'est pas une OBSERVABLE. Les interprétations de cette relations sont multiples. On se limite ici à quelques remarques.**

SYSTEMES ISOLES ET INTERPRETATION INTRINSEQUE :

Etats stationnaires : Ce sont les états propres de l'énergie dont l'évolution se ramène à un simple facteur de phase global : $|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}Et}|\psi(0)\rangle$. Si le système est préparé dans un tel état, la valeur moyenne $\langle a \rangle$ de toute observable *A* ne change pas au cours du temps.

Un système isolé dont l'énergie est bien définie $(\Delta E = 0)$ n'évolue pas.

RELATION D'INCERTITUDE TEMPS-ENERGIE (2)

Evolution d'un système : Le système n'a pas d'énergie bien définie (son état $|\psi\rangle$ est par exemple une superposition de plusieurs états propres de l'énergie.

On a d'après la relation générale : $\Delta a \Delta E \geq \frac{1}{2}\left|\langle\psi|\left[\hat{A},\hat{H}\right]|\psi\rangle\right|$. Soit $v = \frac{d\langle a\rangle_t}{dt}$ la vitesse d'évolution de $\langle a\rangle_t$, d'après le théorème d'Ehrenfest : $v = \frac{d\langle a\rangle_t}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\langle\psi|\left[\hat{A},\hat{H}\right]|\psi\rangle$ et en combinant les deux relations : $\tau\Delta E = \frac{\Delta a}{|v|}\Delta E \geq \frac{\hbar}{2}$ où $\tau = \frac{\Delta a}{|v|}$ est un temps caractéristique d'évolution de la grandeur *A* . On retrouve une propriété intrinsèque du système quantique

Plus l'écart ΔE sur l'énergie est grand, plus le <u>temps caractéristique</u> d'évolution de toute grandeur peut être court.

Désintégration d'un système instable : son énergie n'est définie qu'avec une incertitude reliée à la durée de vie τ par $\Delta E = \frac{\hbar}{2\tau}$. On retrouve la forme précédente et c'est encore une propriété intrinsèque du système.