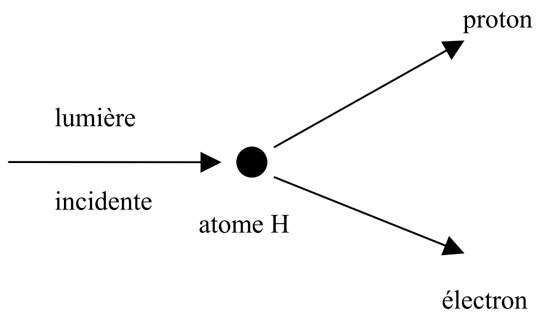
VARIABLES CACHEES & INEGALITES DE BELL

J.S. BELL "On the Problem of Hidden Variables in Quantum Mechanics"
*Rev. Mod. Phys **38**, 447, (1966)*



Un atome d'hydrogène interagissant avec un champ électromagnétique peut être dissocié en un proton et un électron. On se propose ici d'étudier l'état de spin de ces derniers quand ils sont éloignés de la zone d'interaction dans des directions géométriquement distinctes (à quelques mètres l'un de l'autre). Ce sont alors des particules libres dont l'état de spin ne change pas dans le temps.

I. On étudie d'abord le spin de l'électron. Soit $\vec{u}_\varphi$ un vecteur unitaire dans le plan zOx : $\vec{u}_\varphi = \cos\varphi\,\vec{u}_z + \sin\varphi\,\vec{u}_x$ ($\vec{u}_z$ et $\vec{u}_x$ vecteurs unitaires portés respectivement par Oz et Ox).

On note $\left(\hat{S}_e\right)_\varphi = \hat{\vec{S}}_e.\vec{u}_\varphi$ la composante de l'observable spin de l'électron $\hat{\vec{S}}_e$ le long de l'axe défini par $\vec{u}_\varphi$.

1-/ Quelles sont les valeurs propres de $\left(\hat{S}_e\right)_\varphi$?

2-/ On note $|+,\varphi\rangle_e$ et $|-,\varphi\rangle$ les vecteurs propres de $\left(\hat{S}_e\right)_\varphi$ qui dans la limite $\varphi = 0$, se ramènent respectivement aux vecteurs propres $|+\rangle_e$ et $|-\rangle_e$ de $\left(\hat{S}_e\right)_\varphi$. Exprimer $|+\rangle_e$ et $|-\rangle_e$ en fonction de $|+\rangle_e$ et $|-\rangle_e$.

3-/ On suppose que l'électron est émis dans l'état $|+,\varphi\rangle_e$. On mesure la composante $\left(\hat{S}_e\right)_\alpha$ du spin dans la direction définie par $\vec{u}_\alpha = \cos\alpha\,\vec{u}_z + \sin\alpha\,\vec{u}_x$.

Quelle est la probabilité $P_+(\alpha)$ de trouver l'électron dans l'état de spin $|+,\alpha\rangle_e$?

Quelle est la valeur moyenne $\left\langle \left(\hat{S}_e\right)_\alpha \right\rangle$ dans l'état de spin $|+,\varphi\rangle_e$?

II. On suppose dans cette partie, qu'après dissociation le système électron-proton est dans l'état de spin $|+,\varphi\rangle_e \otimes |-,\varphi\rangle_p$.

Note :

On rappelle que si $|u_1\rangle$ et $|u_2\rangle \in E, |v_1\rangle$ et $|v_2\rangle \in F$, $|u\rangle\otimes|v\rangle \in G = E\otimes F$ *et que* $\hat{A}$ et $\hat{B}$ *agissent respectivement dans* E et F, $\hat{C} = \hat{A}\otimes\hat{B}$ *agissant dans* G, *alors on a :*

$$\langle u_2|\langle v_2|\hat{C}|u_1\rangle|v_1\rangle = \langle u_2|\hat{A}|u_1\rangle\langle v_2|\hat{B}|v_1\rangle$$

1-/ Quelle est la probabilité $P_+(\alpha)$ de trouver $+\frac{\hbar}{2}$ en mesurant la composante $\left(\hat{S}_e\right)_\alpha$ du spin de l'électron dans cet état ? Ayant trouvé $+\frac{\hbar}{2}$ comme résultat, quel est l'état du système après la mesure ? L'état du spin du proton est-il perturbé par la mesure du spin de l'électron ?

2-/ Calculer les valeurs moyennes $\left\langle\left(\hat{S}_e\right)_\alpha\right\rangle$ et $\left\langle\left(\hat{S}_p\right)_\beta\right\rangle$ des composantes des spins de l'électron et du proton respectivement le long des axes $\vec{u}_\alpha$ et $\vec{u}_\beta$ $\left(\vec{u}_\beta = \cos\beta\,\vec{u}_z + \sin\beta\,\vec{u}_x\right)$ dans l'état $|+,\varphi\rangle_e \otimes |-,\varphi\rangle_p$.

3-/ On définit le coefficient de corrélation entre spins $E(\alpha,\beta)$ par :

$$E(\alpha,\beta) = \frac{\left\langle\left(\hat{S}_e\right)_\alpha \otimes \left(\hat{S}_p\right)_\beta\right\rangle - \left\langle\left(\hat{S}_e\right)_\alpha\right\rangle\left\langle\left(\hat{S}_p\right)_\beta\right\rangle}{\sqrt{\left\langle\left(\hat{S}_e\right)_\alpha^2\right\rangle\left\langle\left(\hat{S}_p\right)_\beta^2\right\rangle}} \qquad (1)$$

Calculer $E(\alpha,\beta)$ dans l'état considéré.

III. On suppose maintenant qu'après dissociation le système est dans l'état de spin singulet

$$|0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|+\rangle_e \otimes |-\rangle_p - |-\rangle_e \otimes |+\rangle_p\right] \qquad (2)$$

1-/ On mesure la composante $\left(\hat{S}_e\right)_\alpha$ du spin de l'électron suivant l'axe $\vec{u}_\alpha$. Quels résultats obtient-on et avec quelle probabilité ?

2-/ On suppose que le résultat de la mesure a été $+\frac{\hbar}{2}$. On mesure ensuite la composante $\left(\hat{S}_p\right)_\beta$ du spin du proton suivant l'axe $\vec{u}_\beta$. Quels résultats obtient-on et avec quelle probabilité

3-/ Aurait-on les mêmes probabilités si l'on avait fait la mesure de $\left(\hat{S}_p\right)_\beta$ avant de mesurer la composante du spin de l'électron ?
Pourquoi selon vous, ce résultat choquait-il Einstein qui affirmait : « *les états réels de deux objets séparés spatialement sont indépendants l'un de l'autre* » ?

4-/ Calculer les valeurs moyennes $\left\langle\left(\hat{S}_e\right)_\alpha\right\rangle$ et $\left\langle\left(\hat{S}_p\right)_\beta\right\rangle$ des composantes des spins de l'électron et du proton quand le système est dans l'état singulet (2).

5-/ Calculer dans les mêmes conditions $E(\alpha,\beta)$.

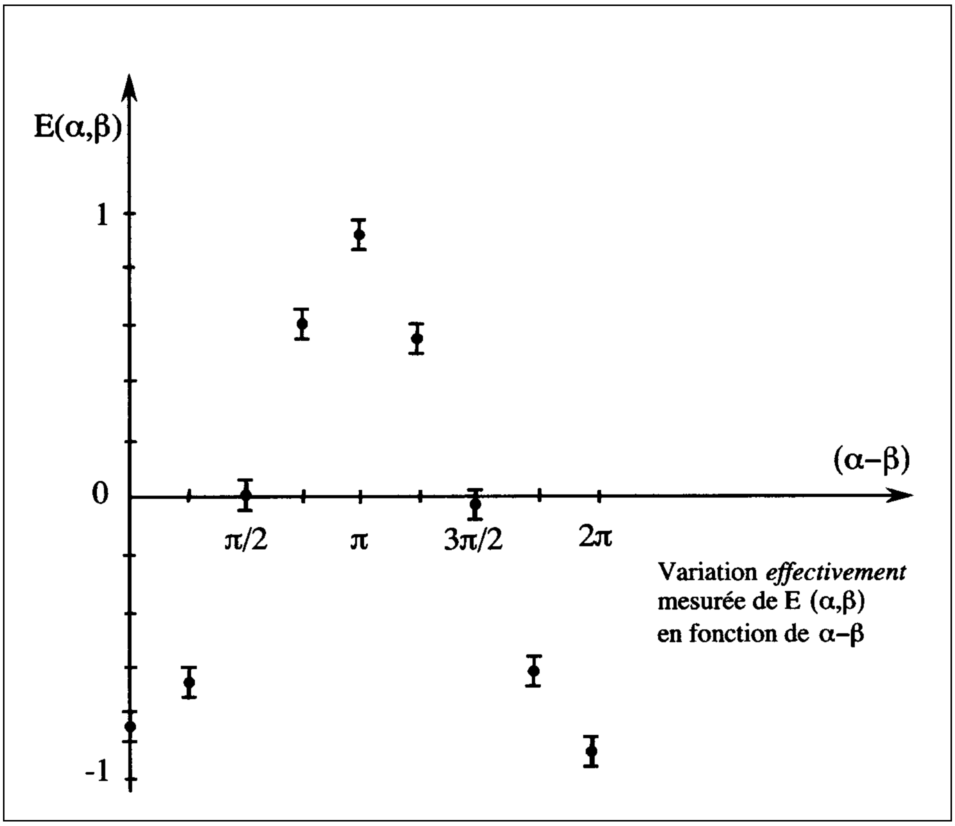
IV. Pour Einstein, et pour d'autres physiciens, la solutions du « paradoxe » entrevu en **III.3** provient de ce que les vecteurs d'états de la mécanique quantique, et en particulier l'état singulet (2), ne décrivent la réalité physique que de façon *incomplète.* Une théorie « complète » (des mesures de spin dans le cas considéré) devrait faire intervenir des paramètres ou variables supplémentaires dont la connaissance rendrait *indépendantes* les mesures sur deux objets séparés. Cependant, l'expérience ne déterminant pas la valeur de ces

paramètres, appelés pour cette raison « variables cachées », le résultat de la mesure sera donc une certaine moyenne sur ces variables.
Pour le cas qui nous intéresse, un exemple très simplifié d'une telle théorie est le suivant. On suppose qu'après chaque dissociation le système est effectivement dans un état factorisé $|+,\varphi\rangle_e \otimes |-,\varphi\rangle_p$, mais que la direction φ varie d'une dissociation à l'autre : φ est ici la variable cachée. On suppose que toutes les directions φ sont également probables, la densité de probabilité $P(\varphi)$ d'être dans la direction φ étant donc $P(\varphi) = \frac{1}{2\pi}$.
En raison de cette ignorance sur φ, la valeur moyenne d'une observable A est *maintenant définie par :*

$$\langle A\rangle = \int_0^{2\pi} d\varphi\, P(\varphi)\, {}_e\langle +,\varphi| \otimes_p \langle -,\varphi|\hat{A}|-,\varphi\rangle_p \otimes |+,\varphi\rangle_e \qquad (3)$$

1-/ En utilisant la définition (1) de $E(\alpha,\beta)$ mais le principe (3) pour définir les valeurs moyennes, calculer $E(\alpha,\beta)$ dans cette nouvelle théorie.

2-/ L'expérience faite en 1982 par Alain Aspect et ses collaborateurs, a porté sur un système de nature différente mais dont le contenu physique est parfaitement semblable au cas que nous considérons. Ce qui a été observé est que $E(\alpha,\beta)$ ne dépend que de la différence $(\alpha-\beta)$. La variation mesurée de $E(\alpha,\beta)$ en fonction de cette variable est représentée sur la figure suivante.
Qu'en concluez-vous en comparant avec la valeur trouvée en **III.5** ?



Variation mesurée de $E(\alpha,\beta)$ en fonction de $(\alpha-\beta)$. Les barres verticales représentent les erreurs expérimentales.

3-/ Inégalités de Bell.

De façon générale, J.S.Bell a montré en 1965 que pour une très large classe de théories à variables cachées (variables cachées « locales »), en particulier quel que soit $P(\varphi)$ dans (3), on obtient des inégalités dont un exemple est

$$\left|E(\alpha_1,\beta_1)+E(\alpha_1,\beta_2)+E(\alpha_2,\beta_1)-E(\alpha_2,\beta_2)\right|\leq 2 \quad \forall\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2 \quad (4)$$

Vérifier que, pour $\alpha_1-\beta_1=\beta_2-\alpha_1=\beta_1-\alpha_2=\dfrac{\pi}{4}$, les prévisions de la mécanique quantique violent cette inégalité. Que pensez-vous du résultat expérimental d'Alain Aspect à cet égard : $E\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=-0{,}66\pm 0{,}04, \quad E\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)=0{,}68\pm 0{,}03$?

Corrigé

I.1-/ Valeurs propres $\pm\dfrac{\hbar}{2}$

2-/ Vecteurs propres $\begin{cases} |+,\varphi\rangle = \cos\dfrac{\varphi}{2}|+\rangle + \sin\dfrac{\varphi}{2}|-\rangle \\ |-,\varphi\rangle = -\sin\dfrac{\varphi}{2}|+\rangle + \cos\dfrac{\varphi}{2}|-\rangle \end{cases}$

3-/ $\langle +,\alpha|+,\varphi\rangle = \cos\left(\dfrac{\varphi-\alpha}{2}\right) \Rightarrow P_+(\alpha) = \cos^2\left(\dfrac{\varphi-\alpha}{2}\right)$ et de même $P_-(\alpha) = \sin^2\left(\dfrac{\varphi-\alpha}{2}\right)$

d'où : $\left\langle \left(\hat{S}_e\right)_\alpha \right\rangle = \dfrac{\hbar}{2}\cos\left(\dfrac{\varphi-\alpha}{2}\right)$

II.1-/ Le projecteur sur l'état propre $|+,\alpha\rangle$ qui correspond au nombre mesuré est :

$$|+,\alpha\rangle_e\,{}_e\langle +,\alpha| \otimes \hat{I}_p$$

d'où : $P_+(\alpha) = \left|{}_e\langle +,\alpha|+,\varphi\rangle_e\right|^2 = \cos^2\left(\dfrac{\varphi-\alpha}{2}\right)$ et l'état après la mesure est $|+,\alpha\rangle_e \otimes |-,\varphi\rangle_p$

Le spin du proton n'est pas perturbé. Ceci provient de ce que l'état initial est factorisé.

2-/

$$\left\langle \left(\hat{S}_e\right)_\alpha \right\rangle = \frac{\hbar}{2}\cos(\varphi-\alpha)$$

$$\left\langle \left(\hat{S}_p\right)_\beta \right\rangle = -\frac{\hbar}{2}\cos(\varphi-\beta)$$

3-/ On a :

$$\left(\hat{S}_e\right)_\alpha^2 = \frac{\hbar^2}{4}\hat{I}_e \qquad \left(\hat{S}_p\right)_\beta^2 = \frac{\hbar^2}{4}\hat{I}_p$$

$$\left\langle \left(\hat{S}_e\right)_\alpha \left(\hat{S}_p\right)_\beta \right\rangle = {}_e\langle +,\varphi|\left(\hat{S}_e\right)_\alpha|+,\varphi\rangle_e\ {}_p\langle -,\varphi|\left(\hat{S}_p\right)_\beta|-,\varphi\rangle_p = -\frac{\hbar^2}{4}\cos(\varphi-\alpha)\cos(\varphi-\beta)$$

d'où $E(\alpha,\beta) = 0$

III.1-/ Deux valeurs possibles :

$$\frac{\hbar}{2} \text{ projecteur } |+,\alpha\rangle_e\,{}_e\langle +,\alpha| \otimes \hat{I}_p$$

$$-\frac{\hbar}{2} \text{ projecteur } |-,\alpha\rangle_e\,{}_e\langle -,\alpha| \otimes \hat{I}_p$$

$$P_+(\alpha) = \frac{1}{2}\left|\langle +,\alpha | + \rangle\right|^2 + \frac{1}{2}\left|\langle +,\alpha | - \rangle\right|^2 = \frac{1}{2}$$
$$P_-(\alpha) = \frac{1}{2}$$

2-/ Etat après la mesure :

$$\cos\frac{\alpha}{2}|+,\alpha\rangle_e \otimes |-\rangle_p - \sin\frac{\alpha}{2}|+,\alpha\rangle_e \otimes |+\rangle_p = |+,\alpha\rangle_e \otimes |-,\alpha\rangle_p$$

d'où : $P_+(\beta) = \sin^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$; $P_-(\beta) = \cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

3-/ Si l'on avait mesuré $\left(\hat{S}_p\right)_\beta$ d'abord, on aurait obtenu :

$$P_+(\beta) = P_-(\beta) = \frac{1}{2}$$

Qu'une mesure effectuée sur l'électron affecte les résultats de mesure sur le proton alors que ces deux particules sont séparées spatialement et n'interagissent pas est clairement en contradiction avec l'assertion d'Einstein. C'est le point de départ du paradoxe E.P.R. (Einstein Podolsky Rosen) *(A.Einstein, B.Podolsky and N.Rosen : "Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete ?" Phys.Rev.* ***47****, 777, (1935))*. La mécanique quantique n'est pas une théorie *locale* au niveau de la mesure.

4-/ $\left\langle \left(\hat{S}_e\right)_\alpha \right\rangle = \left\langle \left(\hat{S}_p\right)_\beta \right\rangle = 0$

5-/ $\left\langle \left(\hat{S}_e\right)_\alpha \left(\hat{S}_p\right)_\beta \right\rangle = \frac{\hbar^2}{4}\left[\sin^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right]$

d'où : $E(\alpha,\beta) = -\cos(\alpha-\beta)$

IV.1-/ En utilisant les résultats du § **III**

$$\left\langle \left(\hat{S}_e\right)_\alpha \right\rangle = \frac{1}{2\pi}\int d\varphi \frac{\hbar}{2}\cos(\varphi-\alpha) = 0$$

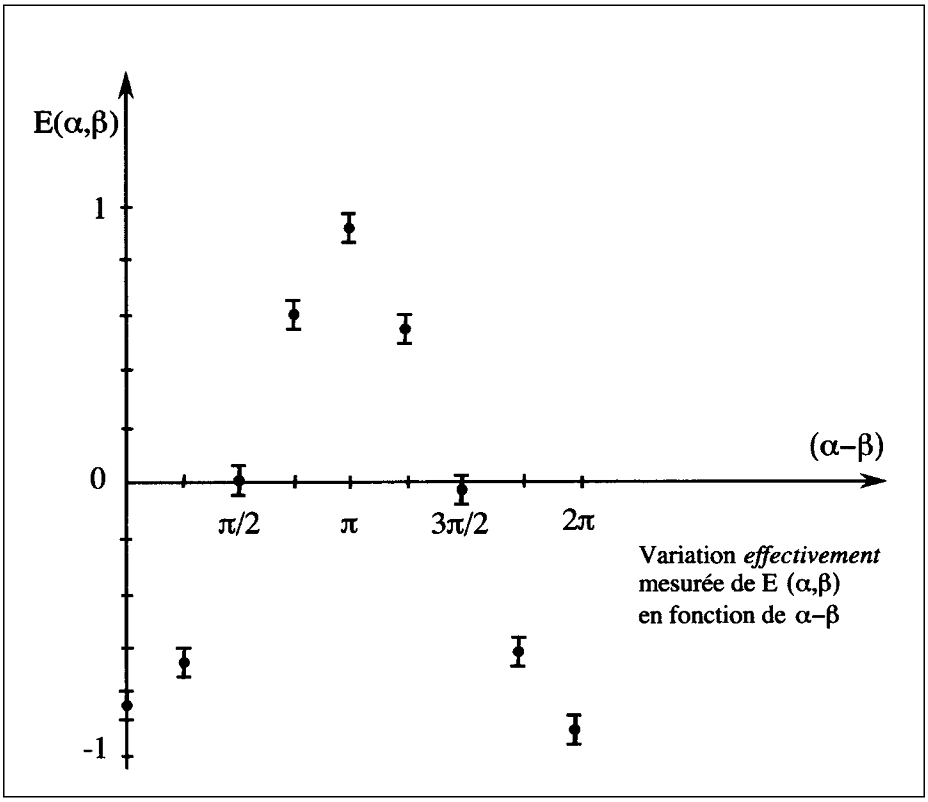
de même : $\left\langle \left(\hat{S}_p\right)_\beta \right\rangle = 0$

$$\left\langle \left(\hat{S}_e\right)_\alpha \left(\hat{S}_p\right)_\beta \right\rangle = -\frac{\hbar^2}{4}\int d\varphi \cos(\varphi-\alpha)\cos(\varphi-\beta) = -\frac{\hbar^2}{8}\cos(\alpha-\beta)$$

d'où : $E(\alpha,\beta) = -\frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)$

Dans un tel modèle, on trouve un coefficient de corrélation non nul. Celui-ci est cependant moitié de celui de la mécanique quantique usuelle.

2-/ Les points expérimentaux sont en accord avec les prévisions de la mécanique quantique et en désaccord net avec ce résultat de la théorie à variable cachée. Toutefois, les points donnés dans l'énoncé ne sont pas les véritables valeurs effectivement mesurées. Ces dernières sont représentées ci-dessous.



Sur cette figure les barres d'erreurs correspondent seulement aux erreurs *statistiques* et la différence avec la mécanique quantique a pour origine les erreurs provenant des ouvertures angulaires des faisceaux et des imperfections des systèmes qui mesurent les valeurs des spins (polarisation).

3-/ De façon générale, en posant $\theta_1 = \beta_1 - \alpha_1, \theta_2 = \beta_2 - \alpha_2, \theta_3 = \beta_3 - \alpha_3$, on cherche les extrema de :

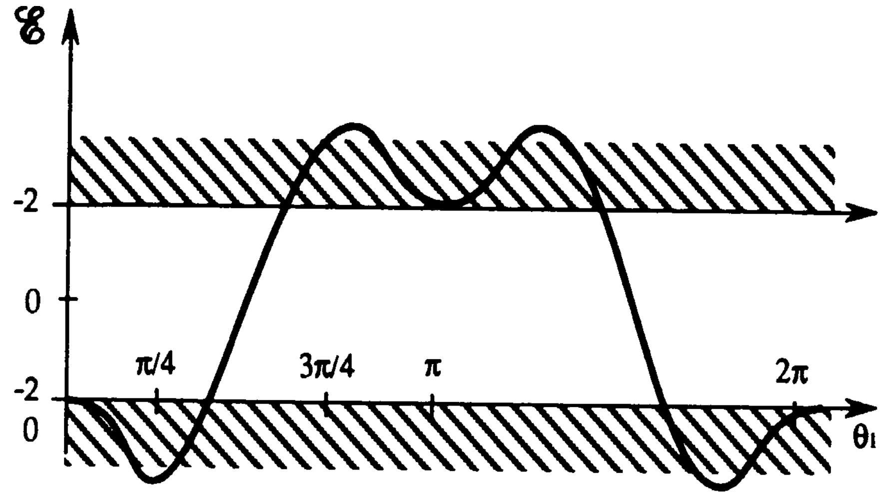
$$-\left[\cos\theta_1 + \cos\theta_2 + \cos\theta_3 - \cos\left(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3\right)\right]$$

En écrivant que les dérivées partielles par rapport à θ_1, θ_2 et θ_3 sont nulles, on obtient $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3$ et : $\sin\theta_1 = \sin 3\theta_1$ dont les solutions comprises entre 0 et π sont $\theta_1 = 0, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}, \pi$

Posons $\mathcal{E}\left(\theta_1\right) = -3\cos\theta_1 + \cos 3\theta_1$, on a :

$$\mathcal{E}\left(0\right) = -2 \ , \mathcal{E}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2\sqrt{2} \ , \mathcal{E}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2} \ , \mathcal{E}\left(\pi\right) = 2$$

On a représenté ci-dessous en hachuré les zones où les résultats ne pourraient pas être expliqués par une théorie à variables cachées.



Les nombres donnés dans l'énoncé mènent à : $\left|3E\left(\frac{\pi}{4}\right)-E\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right|=2,66\pm0,15$, en excellent accord avec la prévision de la mécanique quantique : $2\sqrt{2}$, mais qui infirme les théories à variables cachées.
Comme dans la question précédente, les véritables résultats de mesure sont en fait :

$$E\left(\frac{\pi}{4}\right)=-0,62\pm0,04, \quad E\left(\frac{3\pi}{4}\right)=0,60\pm0,03$$

d'où $\left|3E\left(\frac{\pi}{4}\right)-E\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right|=2,46\pm0,15$, ce qui viole indiscutablement l'inégalité de Bell, la différence avec le résultat $2\sqrt{2}$ provenant des sources d'erreurs mentionnées ci-dessus.