ETUDE D'UN CONDENSAT DE BOSE-EINSTEIN

En refroidissant une assemblée d'atomes de spin entier à une température très basse (inférieure en pratique au microKelvin), on peut observer le phénomène de condensation de Bose-Einstein. On obtient ainsi une situation dans laquelle une grande partie des atomes occupent le même état quantique, ce qui confère au système des propriétés de cohérence remarquables. On étudie ici de manière approchée l'état fondamental de ce système à N particules que nous appellerons dorénavant « condensat » ; on montre en particulier que sa nature dépend crucialement du type d'interaction - répulsive ou attractive - entre les atomes.

1- Particule dans un piège harmonique

On considère une particule de masse m en mouvement dans un potentiel harmonique de pulsation ω. Son Hamiltonien s'écrit :

$$\hat{H}=\frac{\hat{P}^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2\hat{R}^2$$

où $\hat{R}\equiv\left(\hat{X},\hat{Y},\hat{Z}\right)$ et $\hat{P}\equiv\left(\hat{P}_x,\hat{P}_y,\hat{P}_z\right)$ représentent respectivement les opérateurs positions et impulsion de la particule. On pose $a_0=\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$.

1. Rappeler sans démonstration les niveaux d'énergies de la particule et la fonction d'onde $\Phi_0(\vec{r})$ de l'état fondamental.

2. On se propose de déterminer une borne supérieure de l'énergie du niveau fondamental de l'oscillateur par la méthode variationnelle. On prend pour cela une fonction d'essai gaussienne :

$$\psi_\sigma(\vec{r})=\frac{1}{(\pi\sigma^2)^{\frac{3}{4}}}e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \quad \text{avec } \sigma>0 \qquad (1)$$

En faisant varier la longueur σ, trouver une borne supérieure pour l'énergie du niveau fondamental. Comparer cette borne au résultat exact et commenter le résultat obtenu.

Formulaire :

$$\int\left|\psi_\sigma(\vec{r})\right|^2 d^3r=1 \qquad \int\left|\psi_\sigma(\vec{r})\right|^4 d^3r=\frac{1}{\sigma^3}\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\int x^2\left|\psi_\sigma(\vec{r})\right|^2 d^3r=\frac{\sigma^2}{2} \qquad \int\left|\frac{\partial\psi_\sigma(\vec{r})}{\partial x}\right|^2 d^3r=\frac{1}{2\sigma^2}$$

2. Interaction entre deux particules confinées

On considère dans cette partie deux particules de même masse m, en mouvement dans le potentiel harmonique de pulsation ω. On note R_1, R_2 et P_1, P_2 les opérateurs position et impulsion de ces deux particules.

1-/ En l'absence d'interaction entre les particules, l'Hamiltonien du système s'écrit :

$$\hat{H}=\frac{\hat{P}_1^2}{2m}+\frac{\hat{P}_2^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2\hat{R}_1^2+\frac{1}{2}m\omega^2\hat{R}_2^2$$

(a) Quels sont les niveaux d'énergie du système des deux particules ?

(b) Quelle est la fonction d'onde $\Phi_0(\vec{r}_1,\vec{r}_2)$ de l'état fondamental ?

2-/ On suppose maintenant que les deux particules interagissent entre elles par un potentiel $v(\vec{r}_1-\vec{r}_2)$ de courte portée. Autrement dit, on suppose qu'à l'échelle de a_0, ce potentiel est très piqué au voisinage de l'origine. Par conséquent, pour deux fonctions $f(\vec{r})$ et $g(\vec{r})$ variant faiblement sur un intervalle de l'ordre de a_0, on a :

$$\iint f(\vec{r}_1)g(\vec{r}_2)v(\vec{r}_1-\vec{r}_2)d^3r_1d^3r_2 \cong \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}\int f(\vec{r})g(\vec{r})d^3r \qquad (2)$$

La grandeur a, appelée longueur de diffusion, est caractéristique de l'espèce atomique considérée. Elle peut être positive (interaction répulsive) ou négative (interaction attractive). On mesure par exemple $a = 3{,}4$ nm pour les atomes de sodium (isotope $^{23}\mathrm{Na}$) et $a = -1{,}5$ nm pour les atomes de lithium (isotope $^{7}\mathrm{Li}$).

(a) En utilisant la théorie des perturbations, évaluer au premier ordre en a le déplacement du niveau d'énergie fondamental du fait des interactions entre les deux atomes. Commenter le signe de ce déplacement.

(b) A quelle condition portant sur a et a_0 cette approche perturbative est-elle valable ?

3. Energie d'un condensat de Bose-Einstein

On considère maintenant N particules confinées dans le piège harmonique de pulsation ω. Ces particules interagissent deux à deux par le potentiel $v(\vec{r})$ défini par (2). L'Hamiltonien du système des deux particules s'écrit :

$$\hat{H}=\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\hat{P}_i^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2\hat{r}_i^2\right)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}v\left(\hat{\vec{r}}_i-\hat{\vec{r}}_j\right)$$

Pour trouver une estimation (borne supérieure) de l'énergie du niveau fondamental, on utilise la méthode variationnelle avec des fonctions d'essai factorisées du type :

$$\Psi_\sigma(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\cdots,\vec{r}_N)=\psi_\sigma(\vec{r}_1)\psi_\sigma(\vec{r}_2)\cdots\psi_\sigma(\vec{r}_N)$$

où $\psi_\sigma(\vec{r})$ est définie en (1).

1-/ Calculer les valeurs moyennes de l'énergie cinétique, de l'énergie potentielle et de l'énergie d'interaction si le système de N particules est préparé dans l'état $|\Psi_\sigma\rangle$:

$$E_c(\sigma)=\langle\Psi_\sigma|\sum_{i=1}^{N}\frac{\hat{P}_i^2}{2m}|\Psi_\sigma\rangle\ , \qquad E_p=\langle\Psi_\sigma|\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m\omega^2\hat{r}_i^2|\Psi_\sigma\rangle$$

$$E_{\mathrm{int}}(\sigma)=\langle\Psi_\sigma|\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}v\left(\hat{R}_i-\hat{R}_j\right)|\Psi_\sigma\rangle$$

On pose $E(\sigma)=\langle\Psi_\sigma|\hat{H}|\Psi_\sigma\rangle$.

2-/ On introduit les quantités sans dimension $\widetilde{E}(\sigma)=\dfrac{E(\sigma)}{N\hbar\omega}$ et $\widetilde{\sigma}=\dfrac{\sigma}{a_0}$. Donner l'expression de $\widetilde{E}$ en fonction de $\widetilde{\sigma}$. On mettra le résultat sous la forme :

$$\widetilde{E}(\sigma)=\frac{3}{4}\left(\frac{1}{\widetilde{\sigma}^2}+\widetilde{\sigma}^2\right)+\frac{\eta}{\widetilde{\sigma}^3}$$

et on exprimera la quantité η en fonction de N, a et a_0. On supposera dans la suite $N >> 1$.

3-/ Pour $a = 0$, rappeler l'énergie de l'état fondamental.

4. Condensat avec interactions répulsives

On suppose dans cette partie que l'interaction entre atomes est répulsive $(a > 0)$.

1-/ Tracer qualitativement $\widetilde{E}$ en fonction de $\widetilde{\sigma}$ et discuter la variation avec η de son minimum $\widetilde{E}_{\min}$.

2-/ On se place dans la situation $\eta >> 1$. Montrer que la contribution de l'énergie cinétique à $\widetilde{E}$ est négligeable. En déduire une valeur approchée de $\widetilde{E}_{\min}$.

3-/ Comment l'énergie du condensat calculée par cette méthode variationnelle varie-t-elle avec le nombre d'atomes N ? Comparer cette prédiction avec le résultat expérimental présenté sur la figure 1.

4-/ La figure 1 a été obtenue avec un condensat de sodium (masse $m = 3{,}8\ 10^{-26}\,\text{kg}$) dans un piège harmonique de fréquence $\dfrac{\omega}{2\pi} = 142\ \text{Hz}$.

(a) Calculer a_0 et $\hbar\omega$ pour ce piège.

(b) A partir de quelle valeur de N l'approximation $\eta >> 1$ devient-elle valable ?

(c) Dans le cadre du modèle précédent, déduire des données de la figure 1 la valeur de la longueur de diffusion a pour l'atome de sodium. Comparer ce résultat à la valeur connue par ailleurs $a = 3{,}4\ \text{nm}$. Est-il possible *a priori* d'améliorer la précision de la méthode variationnelle ?

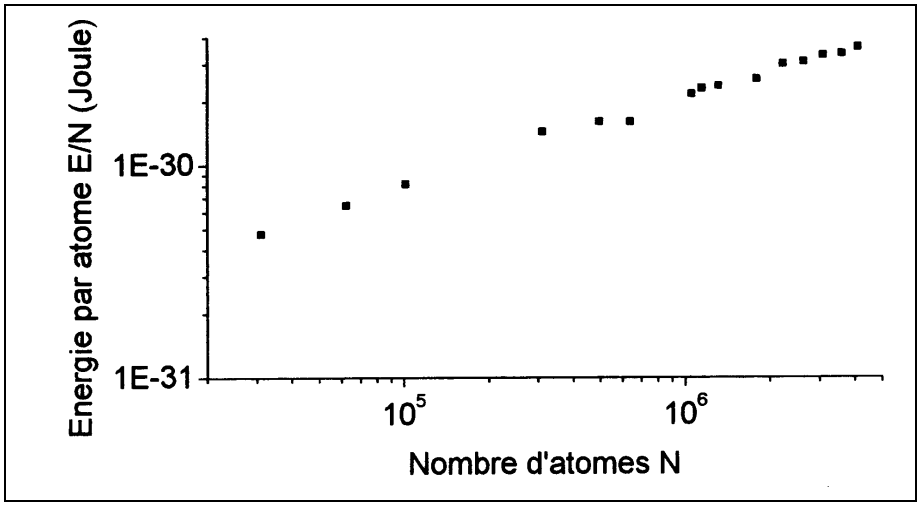

Figure 1

5. Condensat avec interactions attractives

On suppose dans cette partie que la longueur de diffusion a est négative.

1-/ Tracer qualitativement $\widetilde{E}$ en fonction de $\widetilde{\sigma}$.

2-/ Commenter l'approximation (2) dans la région $\sigma \to 0$.

3-/ Montrer qu'il existe une valeur critique η_c de $|\eta|$ au dessus de laquelle $\widetilde{E}$ n'admet plus de minimum local en un point tel que $\widetilde{\sigma} \neq 0$. Calculer la taille σ_c correspondante, en fonction de a_0.

4-/ Dans une expérience menée avec des atomes de lithium ($m = 1{,}17\ 10^{-26}\,\text{kg}$), on a constaté que le nombre d'atomes présents dans le condensat ne dépassait jamais 1200 pour un piège de fréquence $\dfrac{\omega}{2\pi} = 145$ Hz. Expliquer ce résultat.

Références bibliographiques :

- Le premier condensat de Bose-Einstein d'un gaz atomique dilué a été observé à Boulder (USA) en 1995 (M.H. Anderson *et al,* Science **269**, 198 (1995)) avec des atomes de rubidium.

- Les données expérimentales présentées dans ce problème pour un condensat de sodium ont été obtenues à partir des résultats publiés par M.O. Mewes *et al*, Phys.Rev.Lett. **77**, 416 (1996).

La mesure de l'énergie $\dfrac{E}{N}$ se fait en coupant brusquement le potentiel confinant les atomes et en mesurant l'expansion balistique qui en résulte. La vitesse des atomes lors de l'expansion résulte essentiellement de la conversion de l'énergie d'interaction entre atomes au sein du piège, en énergie cinétique.

- Les expériences sur le lithium ont été menées dans le groupe de R.Hulet au Texas (voir par exemple C.Bradley *et al*, Phys. Rev.Lett.**78**,985 (1997)).

Corrigé

1- Particule dans un piège harmonique

1-/ L'Hamiltonien d'un oscillateur harmonique à trois dimensions peut s'écrire

$$\hat{H}=\hat{H}_x+\hat{H}_y+\hat{H}_z$$

où $\hat{H}_i$ représente l'Hamiltonien d'un oscillateur harmonique de même pulsation à une dimension le long de l'axe $i=x,y,z$. On peut donc chercher une base de fonctions propres de H sous forme de produits de fonctions propres de $\hat{H}_x,\hat{H}_y,\hat{H}_z$, c'est-à-dire :
$\varphi(x,y,z)=\chi_{n_x}(x)\chi_{n_y}(y)\chi_{n_z}(z)$ où $\chi_n(x)$ est la n-ième fonction de Hermite. Les énergies propres de $\hat{H}$ s'écrivent donc $E_n=\left(n+\frac{3}{2}\right)\hbar\omega$ où $n=n_x+n_y+n_z$ est un entier positif ou nul.

La fonction d'onde de l'état fondamental, d'énergie $\frac{3}{2}\hbar\omega$, est obtenue en prenant $n_x=n_y=n_z=0$, soit :

$$\varphi_0(\vec{r})=\frac{1}{\left(\pi a_0^2\right)^{\frac{3}{4}}}e^{-\frac{r^2}{2a_0^2}}$$

2-/ Les fonctions d'essai ψ_σ sont normées. Pour obtenir une borne supérieure de l'énergie de l'état fondamental, il suffit donc de calculer $E(\sigma)=\langle\psi_\sigma|\hat{H}|\psi_\sigma\rangle$ et de minimiser cette quantité. En utilisant le formulaire, on trouve :

$$\langle\psi_\sigma|\frac{P^2}{2m}|\psi_\sigma\rangle=3\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{2\sigma^2}\qquad\qquad \langle\psi_\sigma|\frac{1}{2}m\omega^2r^2|\psi_\sigma\rangle=3\frac{m\omega^2}{2}\frac{\sigma^2}{2}$$

soit

$$E(\sigma)=\frac{3}{4}\hbar\omega\left(\frac{a_0^2}{\sigma^2}+\frac{\sigma^2}{a_0^2}\right)$$

Cette fonction est minimum pour $\sigma=a_0$, et on trouve alors $E_{\min}(\sigma)=\frac{3}{2}\hbar\omega$. La borne supérieure trouvée dans ce cas particulier est égale au résultat exact. Cela provient du fait que l'ensemble des fonctions d'essai contient la fonction d'onde de l'état fondamental.

2. Interaction entre deux particules confinées

1-/ (a) L'Hamiltonien $\hat{H}$ peut s'écrire $\hat{H}=\hat{H}_1+\hat{H}_2$ où $\hat{H}_1$ et $\hat{H}_2$ concernent respectivement la particule 1 et la particule 2. Une base de fonctions propres de $\hat{H}$ est obtenue en prenant les produits des fonctions propres de $\hat{H}_1$ (fonctions de variables $\vec{r}_1$) et des fonctions propres de $\hat{H}_2$ (fonctions de variables $\vec{r}_2$). Les énergies propres s'écrivent $E_n=(n+3)\hbar\omega$, où n est un entier positif ou nul.

(b) L'état fondamental du système constitué par les deux particules est :

$$\Phi_0(\vec{r}_1,\vec{r}_2)=\varphi_0(\vec{r}_1)\varphi_0(\vec{r}_2)=\frac{1}{\pi^{\frac{3}{2}}a_0^3}e^{-\frac{r_1^2+r_2^2}{2a_0^2}}$$

2-/ (a) Puisque l'état fondamental de H est non dégénéré, son déplacement au premier ordre en a s'écrit :

$$\Delta E=\langle\Phi_0|\hat{\mathrm{V}}|\Phi_0\rangle=\iint\left|\Phi_0(\vec{r}_1,\vec{r}_2)\right|^2 v(\vec{r}_1-\vec{r}_2)\,d^3r_1d^3r_2$$

$$\Delta E\cong\frac{4\pi\hbar^2a}{m}\int\left|\Phi_0(\vec{r})\right|^4d^3r=\frac{4\pi\hbar^2a}{m}\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\frac{1}{a_0^3}$$

ou encore

$$\frac{\Delta E}{\hbar\omega}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{a_0}$$

Pour une interaction répulsive $(a>0)$, il y a augmentation de l'énergie du système (il faut fournir de l'énergie pour maintenir les deux constituants proches l'un de l'autre). Au contraire, pour une interaction attractive $(a<0)$, l'énergie du niveau fondamental est abaissée.

(b) L'approche perturbative est valable si le déplacement ΔE est petit devant l'écart $\hbar\omega$ entre les niveaux de H. Il faut donc que $|a|<<a_0$: la longueur de diffusion doit être petite devant l'extension caractéristique de l'état fondamental de l'oscillateur harmonique.

3. Energie d'un condensat de Bose-Einstein

1-/ L'utilisation du formulaire donne :

$$E_c(\sigma)=N\frac{3}{4}\frac{\hbar^2}{m\sigma^2}\qquad E_p(\sigma)=N\frac{3}{4}m\omega^2\sigma^2\qquad E_{\mathrm{int}}(\sigma)=\frac{N(N-1)}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\hbar\omega\frac{aa_0^2}{\sigma^3}$$

Il y a en effet N termes d'énergie cinétique et d'énergie potentielle et $\frac{N(N-1)}{2}$ paires contribuant à l'énergie d'interaction.

2-/ En introduisant les quantités sans dimension $\tilde{E}(\sigma)=\frac{E(\sigma)}{N\hbar\omega}$ et $\tilde{\sigma}=\frac{\sigma}{a_0}$, on trouve :

$$\tilde{E}(\tilde{\sigma})=\frac{3}{4}\left(\frac{1}{\tilde{\sigma}^2}+\tilde{\sigma}^2\right)+\underbrace{\frac{N-1}{\sqrt{2\pi}}\frac{a}{a_0}}_{\eta}\frac{1}{\tilde{\sigma}^3}=\frac{3}{4}\left(\frac{1}{\tilde{\sigma}^2}+\tilde{\sigma}^2\right)+\frac{\eta}{\tilde{\sigma}^3}$$

3-/ Si la longueur de diffusion est nulle, il n'y a pas d'interaction entre les particules. L'état fondamental du système est le produit des N fonctions $\varphi_0(\vec{r}_i)$ et son énergie est $E=\frac{3}{2}N\hbar\omega$.

4. Condensat avec interactions répulsives

1-/ La figure 3 donne la variation de $\tilde{E}(\tilde{\sigma})$ avec $\tilde{\sigma}$ pour des valeurs croissantes de η. La valeur de la fonction en un point $\tilde{\sigma}$ donné augmente quand η augmente. Pour $\tilde{\sigma}$ grand, le comportement de $\tilde{E}$ ne dépend pas de η. Il est dominé par le terme d'énergie potentielle $\frac{3\tilde{\sigma}^2}{4}$.

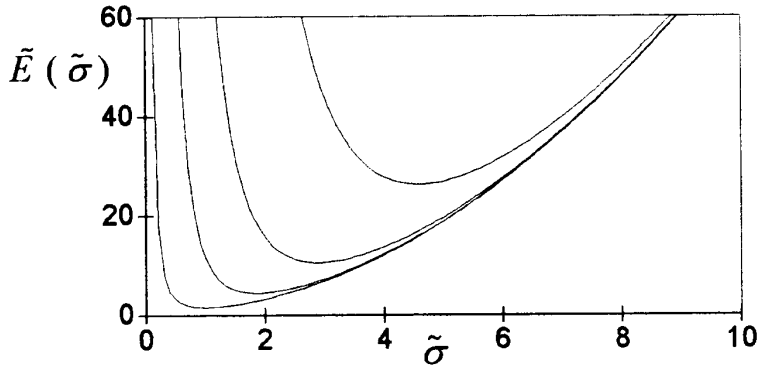

FIG. 3: *Variation de* $\tilde{E}(\sigma)$ *avec* σ *pour* $\eta = 0, 10, 100, 1000$.

Le minimum $\widetilde{E}_{\min}$ augmente quand η augmente. Ce minimum correspond au point où le terme d'énergie potentielle, qui tend à favoriser les petites valeurs de $\widetilde{\sigma}$, s 'équilibre avec les termes d'énergie cinétique et d'interaction, qui tendent au contraire à favoriser de grandes tailles pour $\widetilde{\sigma}$. Comme les interactions sont répulsives, la taille du système à l'équilibre est plus grande qu'en l'absence d'interaction et l'énergie correspondante est également augmentée.

2-/ Supposons $\eta >> 1$ et négligeons *a priori* le terme d'énergie cinétique $\frac{1}{\widetilde{\sigma}^2}$. La fonction $\frac{3}{4}\widetilde{\sigma}^2 + \frac{\eta}{\widetilde{\sigma}^3}$ est minimum pour $\widetilde{\sigma}_{\min} = (2\eta)^{\frac{1}{5}}$ où elle a pour valeur $\widetilde{E}_{\min} = \frac{5}{4}(2\eta)^{\frac{2}{5}}$.

On peut vérifier *a posteriori* qu'il est légitime de négliger le terme d'énergie cinétique $\frac{1}{\widetilde{\sigma}^2}$.

En effet il est toujours petit devant l'une des deux autres contributions à $\widetilde{E}$:

- Pour $\widetilde{\sigma} < \widetilde{\sigma}_{\min}$, on a $\frac{1}{\widetilde{\sigma}^3}$
- Pour $\widetilde{\sigma} > \widetilde{\sigma}_{\min}$, on a $\frac{1}{\widetilde{\sigma}^2} << \widetilde{\sigma}^2$

3-/ Pour un nombre d'atomes $N >> 1$, on trouve donc que l'énergie du système calculée par la méthode variationnelle s'écrit :

$$\frac{E}{N} = \frac{5}{4}\hbar\omega\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}N\frac{a}{a_0}\right)^{\frac{2}{5}}$$

Cette variation de $\frac{E}{N}$ en $N^{\frac{2}{5}}$ est très bien reproduite par les données expérimentales. La figure 4 représente un ajustement des données par cette loi. On trouve $\frac{E}{N} \cong \alpha N^{\frac{2}{5}}$ avec $\alpha = 8{,}2\ 10^{-33}\,\mathrm{J}$.

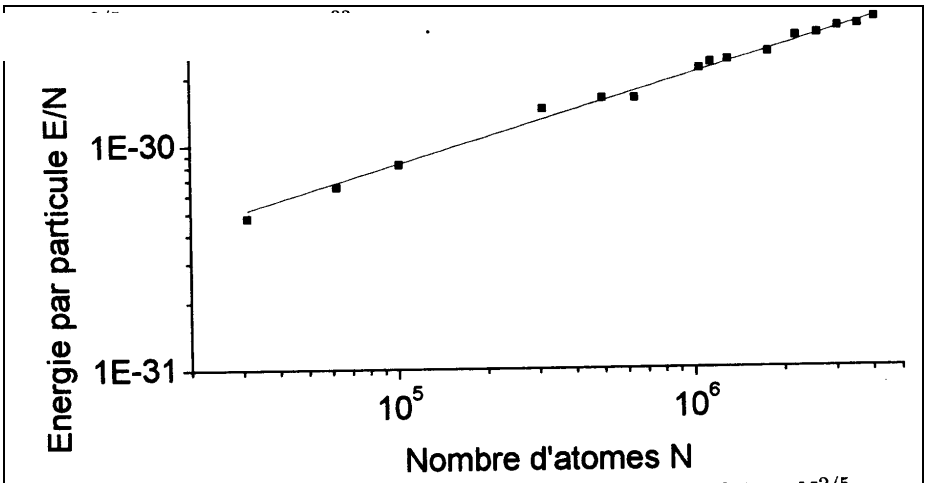

FIG. 4: *Ajustement des données expérimentales par une loi en* $N^{2/5}$.

4-/ (a) On trouve $a_0 = 1{,}76\mu\text{m}$ et $\hbar\omega = 9{,}4\ 10^{-32}\,\text{J}$

(b) Prenons la valeur $a = 3{,}4\text{nm}$ proposée par l'énoncé. L'approximation $\eta >> 1$ sera valable si $N >> 1300$. C'est bien le cas pour les données de la figure 1.

(c) Le coefficient $\alpha = 8{,}2\ 10^{-33}\,\text{J}$ trouvé par ajustement des données conduit à $a = 2{,}8\text{nm}$. Cette valeur est légèrement plus basse que la valeur annoncée $a = 3{,}4\text{nm}$. Cela est dû au fait que le résultat obtenu précédemment en **3-/** , $\dfrac{E}{N\hbar\omega} \cong 1{,}142\left(N\dfrac{a}{a_0}\right)^{\frac{2}{5}}$ par la méthode variationnelle avec des fonctions gaussiennes simples, ne fournit pas une valeur suffisamment précise de l'énergie de l'état fondamental du système. Avec davantage de paramètres dans les fonctions d'essai, on peut obtenir, toujours dans l'approximation du champ moyen et dans la limite $\eta >> 1$: $\dfrac{E_{fond}}{N\hbar\omega} \cong 1{,}055\left(N\dfrac{a}{a_0}\right)^{\frac{2}{5}}$. L'ajustement des données expérimentales est alors en très bon accord avec la valeur annoncée pour la longueur de diffusion.

5. Condensat avec interactions attractives

1-/ La fonction $\tilde{E}(\tilde{\sigma})$ est représentée sur la figure 5. On constate qu'elle admet un minimum local non nul que si η est assez petit. Pour $\eta < 0$, il y a toujours un minimum en 0, la fonction tendant vers $-\infty$ en ce point.

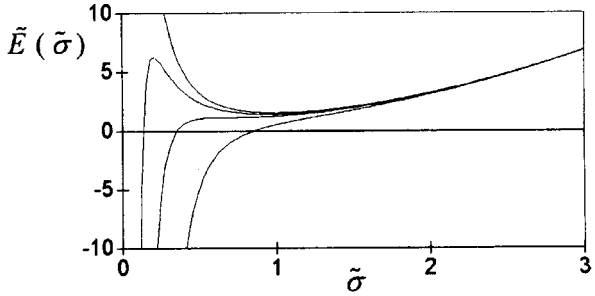

FIG. 5: *Tracé de* $\tilde{E}(\tilde{\sigma})$ *pour* $\eta = 0$; $\eta = -0{,}1$; $\eta = -0{,}27$; $\eta = -1$.

2-/ Le minimum absolu en $\tilde{\sigma} = 0$ correspond à un nuage atomique très fortement comprimé. Pour des nuages d'aussi petite taille, l'approximation (2) pour un potentiel de courte portée n'a guère de sens. Physiquement, on doit prendre en compte les processus de formation de molécules et d'agrégats d'atomes qui ont été oubliés dans tout ce qui précède.

3-/ Le minimum local en $\tilde{\sigma} \neq 0$ disparaît quand $\tilde{E}(\tilde{\sigma})$ a un point d'inflexion à tangente horizontale. Ceci se produit pour une valeur critique de η qu'il s'agit de déterminer. Les deux conditions :

$$\frac{d\tilde{E}}{d\tilde{\sigma}} = 0 \qquad \frac{d^2\tilde{E}}{d\tilde{\sigma}^2} = 0$$

conduisent au système :

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{\tilde{\sigma}^4} + 1 - \dfrac{2\eta}{\tilde{\sigma}^5} = 0 \\ \dfrac{3}{\tilde{\sigma}^4} + 1 + \dfrac{8\eta}{\tilde{\sigma}^5} = 0 \end{cases}$$

d'où l'on tire :

$$\begin{cases} |\eta_c| = \dfrac{2}{5^{\frac{5}{4}}} \cong 0{,}27 \\ \tilde{\sigma}_c = \dfrac{1}{5^{\frac{5}{4}}} \cong 0{,}67 \Rightarrow \sigma_c \cong 0{,}67 a_0 \end{cases}$$

Tant que ce minimum local existe, autrement dit pour $|\eta| < |\eta_c|$, on peut espérer obtenir un condensat métastable, dont la taille sera de l'ordre du minimum trouvé par cette approche variationnelle. En revanche, si on part d'une valeur trop grande pour $|\eta|$, par exemple en essayant de mettre trop d'atomes, le condensat va s'effondrer sur lui-même, et les processus conduisant à la formation d molécules entrent en jeu.

4-/ Pour les données expérimentales, on trouve $a_0 = 3{,}1\mu\text{m}$, soit un nombre critique d'atomes :

$$N_c = \sqrt{2\pi}\eta_c \frac{a_0}{|a|} \cong 1400$$

Cette valeur critique est en bon accord avec l'observation expérimentale. L'utilisation d'une classe de fonctions d'essai plus vaste que les fonctions gaussiennes permet, là aussi, d'améliorer l'accord entre théorie et expérience.