UNE ILLUSTRATION DES POSTULATS DE LA MECANIQUE QUANTIQUE

L'EFFET ZENON QUANTIQUE

Le paradoxe de Zenon « classique » repose sur la négation a priori de la possibilité de diviser à l'infini l'espace et le temps. Il en résulte des affirmations paradoxales tendant toutes à montrer que le mouvement est impossible (voir par exemple) :
http://www.britanica.com/bcom/eb/article/5/0,5716,59835+1+58374,00.html
Il est intéressant de noter que Schrödinger revint dans les années 1930 sur la question de pouvoir représenter l'espace et le temps par des grandeurs continues.

L'effet Zenon quantique a été précisément formuler en 1977 (*B.Misra & E.C.G.Sudarshan, « The Zenon's paradox in quantum theory », J.Math.Phys.,**18**, 756, (1977)),* mais certains travaux antérieurs avaient déjà posé ce qui paraît à première vue constituer un *paradoxe* : on va voir **qu'un système quantique soumis à une succession de mesures très rapprochées n'évolue pas dans le temps.** L'idée est facile à comprendre. Toute opération de mesure projette dans l'état propre normalisé de l'observable mesurée, associé à la valeur propre obtenue en tant que résultat de la mesure effectuée. La vitesse d'évolution du vecteur d'état étant finie, la probabilité d'obtenir la même valeur lors d'une deuxième mesure rapprochée dans le temps est relativement grande – en quelque sorte, la deuxième mesure « freine » l'évolution. Si on procède à une série de mesures très voisines dans le temps, on conçoit que se produise un ralentissement de la dynamique. L'argument qui suit montre, dans un cas d'école, que dans la limite d'un nombre infini de mesures effectuées entre deux temps fixés t_i et t_f, la probabilité pour le système d'être à l'instant t_f dans le *même* état qu'à l'instant t_i ⋯ est égale à 1.

De façon plus précise, cet effet « paradoxal » peut se formuler comme suit. Soit un système quantique, de Hamiltonien $\hat{H}$, initialement $(t_i = 0)$ dans l'état $|\psi_0\rangle$, état supposé instable pour fixer les idées (Cette hypothèse n'est pas essentielle mais elle en rajoute au spectaculaire : une particule instable que l'on observe en continu est stable !). Le projecteur :

$$\hat{P}_0 = |\psi_0\rangle\langle\psi_0| \quad (1)$$

est un opérateur hermitique, dont les valeurs propres ϖ_λ sont 0 et 1 :

$$\varpi_1 = 1 \;:\; \hat{P}_0|\psi_0\rangle = |\psi_0\rangle \;\;;\;\; \varpi_0 = 0 \;:\; \hat{P}_0|\phi\rangle = 0 \quad \forall |\phi\rangle \perp |\psi_0\rangle \quad (2)$$

La valeur propre 0 est en général fortement dégénérée (sauf si l'espace des états est de dimension égale à 2). En tout cas, P_0 est un opérateur dont toutes les valeurs propres sont réelles et dont l'ensemble des vecteurs propres constitue une base complète de $\mathcal{E}$: c'est donc une observable au sens de la mécanique quantique. De ce fait, il est licite d'appliquer les postulats concernant les résultats d'une opération de mesure effectuée sur un système dans l'état $|\psi\rangle$ donné ;

- le résultat d'une mesure est l'une des valeurs propres ϖ_λ de $\hat{P}_0$
- la probabilité d'obtenir le résultat ϖ_λ est le module au carré de la composante de $|\psi\rangle$ sur le vecteur propre correspondant $|\varpi_\lambda\rangle$

- juste après la mesure dont le résultat est $\varpi_1 = 1$, le système se trouve dans l'état $|\varpi_\lambda = 1\rangle \equiv |\psi_0\rangle$ (réduction du paquet d'ondes en l'absence de dégénérescence) ; si le résultat est $\varpi_0 = 0$, le système est, juste après cette mesure, dans l'état (normalisé) qui est la projection de l'état juste avant la mesure sur le sous-espace $\{|\varpi_\lambda = 0\rangle\}$ (réduction du paquet d'ondes en présence de dégénérescence).

Ce postulat a d'étranges conséquences (le *Chat de Schrödinger !*). Il est toutefois une nécessité logique pour que la théorie quantique ait un sens physique. En effet, si la mesure à l'instant t_0 d'une certaine observable $\hat{A}$ sur le système dans l'état $|\psi\rangle$ a produit la valeur non-dégénérée a_0, une deuxième mesure effectuée immédiatement après doit évidemment redonner la *même* valeur (avec une probabilité 1). Ceci n'est possible que si à l'issue de la première mesure le système est dans l'état $|a_0\rangle$, propre de $\hat{A}$ avec la valeur propre a_0 ; la première mesure a donc bien effectué la projection :

$$|\psi(t_0)\rangle \to |a_0\rangle \equiv |\psi(t_0 + 0)\rangle \quad (3)$$

Effectuons une mesure unique de $\hat{P}_0$ à l'instant t, le système étant parti à $t_i = 0$ de l'état $|\psi_0\rangle$; le descendant de l'état de départ est $\hat{U}(t)|\psi_0\rangle$ où $\hat{U}(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}$. Le résultat de cette mesure est donc :

$$1 \text{ avec la probabilité } p_1 = \left|\langle \varpi_1 | \hat{U}(t) | \psi_0 \rangle\right|^2 \quad (4)$$

$$0 \text{ avec la probabilité } p_0 = 1 - p_1 \quad (5)$$

Quand on a trouvé 1, on convient de dire que le résultat de la mesure est positif. $|\psi_0\rangle$ étant l'unique vecteur propre associé à la valeur propre 1, $|\psi_0\rangle \equiv |\varpi_1\rangle$ et (4) s'écrit aussi :

$$p_1(t) = \left|\langle \psi_0 | \hat{U}(t) | \psi_0 \rangle\right|^2 \quad (6)$$

Supposons maintenant que l'instant t de mesure soit très petit comparé aux inverses de toutes les fréquences de Bohr ; alors, toutes les exponentielles apparaissant dans le développement de $\hat{U}(t)|\psi_0\rangle$ sur les états propres de $\hat{H}$ peuvent être développées et l'amplitude de transition est approximativement donnée par :

$$A_{0\to 0}(t) \equiv \langle \psi_0 | \hat{U}(t) | \psi_0 \rangle \simeq \langle \psi_0 | \hat{1} + \frac{\hat{H}t}{i\hbar} + \frac{1}{2!}\left(\frac{\hat{H}t}{i\hbar}\right)^2 | \psi_0 \rangle + O(t^3) \quad (7)$$

Dans ces conditions :

$$p_1(t) = \left|A_{0\to 0}(t)\right|^2 \simeq \left(1 - \frac{t^2}{2\hbar^2}\langle \hat{H}^2 \rangle\right)^2 + \frac{t^2}{\hbar^2}\langle \hat{H} \rangle^2 \simeq 1 - \frac{\Delta\hat{H}^2 t^2}{\hbar^2} + O(t^4) \quad (8)$$

Toutes les moyennes $\langle \cdots \rangle$ sont prises avec l'état $|\psi_0\rangle$, $\Delta\hat{H}^2$ est l'écart quadratique de l'énergie dans l'état $|\psi_0\rangle$ (on suppose évidemment que la variance $\Delta\hat{H}$ de l'énergie est finie). A la réflexion, $p_1(t)$ est en fait une probabilité *conditionnelle* : dire que l'état de départ est $|\psi_0\rangle$, est équivalent à affirmer que l'on a fait juste avant une mesure qui a produit le résultat $\varpi_\lambda = 1$; avec la notation habituelle pour une probabilité conditionnelle, on peut donc écrire :

$$p_1(t) \equiv p(t|0) \quad (9)$$

et $p(t)$ est bien la probabilité de trouver 1à l'instant t sachant que l'on a trouvé 1 à l'instant $t=0$. En disant les choses autrement : supposons que l'on fasse deux mesures successives de l'observable $\hat{P}_0$ aux deux instants t_1 et $t_2 > t_1$. Si on trouve la valeur 1 en t_1 (mesure positive), alors, l'état du système à $t_1 + 0$ est encore $|\psi_0\rangle$; l'état à l'instant t_2 est donc $\hat{U}(t_2 - t_1)|\psi_0\rangle$. Dans ces conditions, la probabilité de trouver à nouveau la valeur propre 1 à l'instant t_2 sachant que l'on a trouvé 1 à l'instant t_1 est bien :

$$p(t_2|t_1) = p_1(t_2 - t_1) \quad (10)$$

soit approximativement, d'après (8) :

$$p(t_2|t_1) \simeq 1 - \frac{\Delta\hat{H}^2 (t_2 - t_1)^2}{\hbar^2} \quad (11)$$

Cette probabilité ne dépend que de la différence des temps, puisque $\hat{H}$ est depuis le début supposé indépendant du temps.

Effectuons maintenant une série de N mesures de $\hat{P}_0$ aux instants successifs $t_n = n\Delta t, \quad n = 1, 2, \cdots, N$ et où $\Delta t = \frac{t}{N}, \quad t$ et N étant fixés. A l'issue de cette série, la probabilité d'avoir trouvé à chaque fois la valeur propre 1 (toutes les mesures donnent un résultat positif) est :

$$p_{pos}(t_1, t_2, \cdots, t_N) = p(t_N|t_{N-1})\, p(t_{N-1}|t_{N-2}) \cdots p_1(t_2|t_1) \simeq \left[1 - \frac{\Delta\hat{H}^2 t^2}{N^2\hbar^2}\right]^N \quad (12)$$

(La probabilité des N résultats positifs est le produit des probabilités de transition $p(t_{n+1}|t_n)$: il s'agit donc d'une chaîne de Markov).

En utilisant maintenant :

$$\left(1 - \frac{C}{N^2}\right)^N = e^{N\ln\left(1 - \frac{C}{N^2}\right)} \simeq e^{-\frac{C}{N}} \simeq 1 \quad (N >> 1) \quad (13)$$

on voit que la probabilité p_{pos} que *toutes* les mesures donnent un résultat positif tend vers 1 quand le nombre de mesures tend vers l'infini :

$$\lim_{N\to\infty} p_{pos}(t_1, t_2, \cdots, t_N) = 1 \quad (14)$$

Autrement dit, un système observé (mesuré) en « continu » n'évolue pas.

Remarques :

1. La probabilité de trouver toujours la même valeur (1 en l'occurrence) lors de la mesure de la « variable binaire» associée à $\hat{P}_0$ tend donc vers 1. Ceci est complètement différent de la probabilité de trouver toujours pile lors du jet d'une pièce, effectué un grand nombre de fois, N : cette dernière vaut 2^{-N} et tend vers zéro exponentiellement. Fondamentalement, la différence tient à la corrélation statistique des événements , forte pour l'effet Zénon, nulle (ou supposée négligeable) pour le jet de la pièce. Pour l'effet Zénon quantique, plus on raccourcit l'intervalle de temps entre deux mesures successives, plus grande est la probabilité de trouver la même valeur que lors de la mesure immédiatement précédente. Pour le jet de la pièce, tout nouveau lancement est supposé complètement indépendant de tous les précédents.

2. L'instabilité supposée de l'état $|\psi_0\rangle$ ne joue aucun rôle et n'a été adoptée que pour fixer les idées. La même conclusion peut être tirée pour un système à deux niveaux séparés par l'énergie $\hbar\omega_0$, dont la dynamique libre est périodique de période $\frac{2\pi}{\omega_0}$; en la circonstance, la seule condition à retenir est $\Delta t << \frac{1}{\omega_0}$.

3. La conclusion exprimée par (14) repose crucialement sur le fait que la probabilité $p_1(t)$ s'écarte quadratiquement de la valeur 1 (voir 8). Si la variation était linéaire (par exemple, le début d'une exponentielle décroissante), $p_1(t) \simeq (1-\Gamma t)$, on aurait :

$$p_{pos}(t_1, t_2, \cdots, t_N) \simeq \left(1-\Gamma\frac{t}{N}\right)^N \to e^{-\Gamma t} \quad (15)$$

Plus généralement, avec un comportement du type :

$$p_1(t) \simeq (1-Ct^\alpha) \quad (16)$$

on obtient :

$$p_{pos}(t_1, t_2, \cdots, t_N) \simeq \left(1-C\left(\frac{t}{N}\right)^\alpha\right)^N \simeq e^{-Ct^\alpha N^{1-\alpha}} \quad (17)$$

Dès que $\alpha > 1$, il y a effet Zenon : c'est bien quand le système s'éloigne « lentement » de son point de départ que celui-là peut survenir. Si on considère un atome à deux niveaux $|e\rangle$ (excité, radiatif) et $|g\rangle$ (fondamental), la première phase de déclin de l'état excité est exponentielle sauf sur un très petit intervalle, où le comportement – parabolique comme en (8) – permet l'effet Zenon ; ce régime étant de courte durée, il semble donc très difficile d'observer l'effet Zenon dans une configuration aussi simple.

L'argument élémentaire ci-dessus, conduisant à la mise en évidence de l'effet Zenon, est fondé sur la notion idéale que l'on se fait de l'opération de mesure en mécanique quantique, caractérisée notamment par la réduction instantanée du paquet d'ondes et sans se risquer à introduire « l'appareil de mesure » dans le formalisme (le peut-on d'ailleurs ?). La difficulté d'observation de l'effet est liée à la définition d'un scénario permettant de réaliser expérimentalement une suite de processus singeant d'aussi près que possible l'opération de mesure au sens de la mécanique quantique.

Le ralentissement de la dynamique quantique peut aussi être mis en évidence dans un petit modèle que l'on peut énoncer innocemment, sans référence initiale au concept de mesure.

Considérons un système à petit nombre de niveaux, couplé à un grand système, ce dernier étant caractérisé par le fait qu'il possède un très grand nombre de degré de liberté ; cette propriété se traduit usuellement par le fait que le spectre d'énergie du grand système forme un quasi-continuum. Dès lors, il existe un grand nombre de couples de fréquences dont la différence est très petite, associés à des périodes très longues ; au total, les temps de récurrence (ou de pseudo-récurrence) deviennent gigantesque au point de perdre tout sens pour le physicien : l'irréversibilité de la dynamique du petit système couplé au grand devient un état de fait.

Il est possible de bâtir un formalisme montrant ceci en détail. Souvent, notamment lorsque le couplage entre les deux systèmes est faible en un sens à préciser, des

approximations légitimes permettent d'établir que sur un très grand intervalle de temps, la dynamique oscillante est amortie suivant un simple régime exponentiel (aux temps pas trop longs).

(Cette conclusion repose sur le fait que le couplage avec le grand système décale les pôles de la résolvante de l'axe réel vers le demi-plan complexe inférieur (plus précisément dans le deuxième feuillet de Riemann), fabriquant ce qu'on appelle dans d'autres contextes une *résonance*).

Evidemment, le comportement exponentiel peut être fabriqué de façon purement phénoménologique en incorporant des parties imaginaires (négatives) dans les énergies, ce qui revient peu ou prou à introduire un Hamiltonien *ad hoc* non hermitique. Cette recette, dont il est certes intéressant de discuter les fondements, permet de faire l'économie de la description quantique du grand système, forcément un peu laborieuse ; c'est cette recette qui va ici être appliquée.

Imaginons un atome à trois niveaux $|g\rangle, |m\rangle$ et $|e\rangle$, $|g\rangle$ est l'état fondamental, $|m\rangle$ un état métastable dont la désexcitation radiative vers le fondamental a une probabilité très faible, que l'on néglige dans la suite. Enfin, $|e\rangle$ est un état fortement couplé au fondamental par échange de photons avec l'extérieur. L'ordre des énergies est $E_g < E_m < E_e$. La fuite radiative à partir de $|e\rangle$ vers le fondamental va être représentée par une partie imaginaire $-i\hbar\dfrac{\Gamma_e}{2}$ ajoutée à l'énergie de l'état $|e\rangle$ et dans la suite, on considère exclusivement les deux niveaux $|m\rangle$ et $|e\rangle$, supposés satisfaire les équations suivantes :

$$\begin{cases} \hat{H}_{at}|m\rangle = \hbar\omega_m \\ \hat{H}_{at}|e\rangle = \hbar\left(\omega_e - i\dfrac{\Gamma_e}{2}\right)|e\rangle \end{cases} \quad (18)$$

Supposons maintenant cet atome perturbé par un champ externe (semi-classique) harmonique résonnant représenté par l'opérateur $\hat{V}(t)$:

$$\hat{V}(t) = \hbar\Omega\left[|e\rangle\langle m|e^{i(\omega_m-\omega_e)t} + |m\rangle\langle e|e^{i(\omega_e-\omega_m)t}\right] \quad (19)$$

Ceci étant posé, on écrit en représentation d'interaction le vecteur d'état de l'atome sous la forme :

$$|\Psi(t)\rangle = a_m(t)e^{-i\omega_m t}|m\rangle + a_e(t)e^{-i\omega_e t}|e\rangle \quad (20)$$

L'équation de Schrödinger (effective) pour les coefficients s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{a}_m(t) = -i\Omega a_e(t) \\ \dot{a}_e(t) = -i\Omega a_m(t) - \dfrac{\Gamma_e}{2}a_e(t) \end{cases} \quad (21)$$

L'intégration est immédiate ; se donnant la condition initiale – l'atome est au début dans l'état $|m\rangle$ - , on trouve :

$$\begin{cases} a_m(t) = e^{-\frac{\Gamma_e t}{4}}\left(\cos\tilde{\Omega}t + \dfrac{\Gamma_e}{4\tilde{\Omega}}\sin\tilde{\Omega}t\right) \\ a_e(t) = -i\dfrac{\Omega}{\tilde{\Omega}}e^{-\frac{\Gamma_e t}{4}}\sin\tilde{\Omega}t \end{cases} \quad \text{avec } \tilde{\Omega} = \sqrt{\Omega^2 - \frac{\Gamma_e^2}{16}} \quad (22,23)$$

L'oscillation de Rabi correspond à $\frac{\Gamma_e}{\Omega} << 1$; l'atome effectue alors un va-et-vient sous-amorti de l'état $|m\rangle$ à l'état $|e\rangle$ à la pulsation $\simeq \Omega$:

$$P_m(t) \equiv |a_m(t)|^2 \simeq e^{-\Gamma_e t} \cos \Omega t \quad (\Gamma_e << \Omega) \quad (24)$$

Dans le cas contraire $\frac{\Gamma_e}{\Omega} >> 1$:

$$P_m(t) \simeq e^{-4\frac{\Omega^2 t}{\Gamma_e}} \quad (\Omega << \Gamma_e) \quad (25)$$

et l'atome est alors bloqué très longtemps dans l'état métastable, son état initial. Dans la limite $\frac{\Omega}{\Gamma_e} \to 0$, $P_m(t) \to 1 \quad \forall t$. En définitive, ce modèle très simple montre que la fuite rapide d'énergie vers l'extérieur inhibe la transition induite par le champ résonnant.

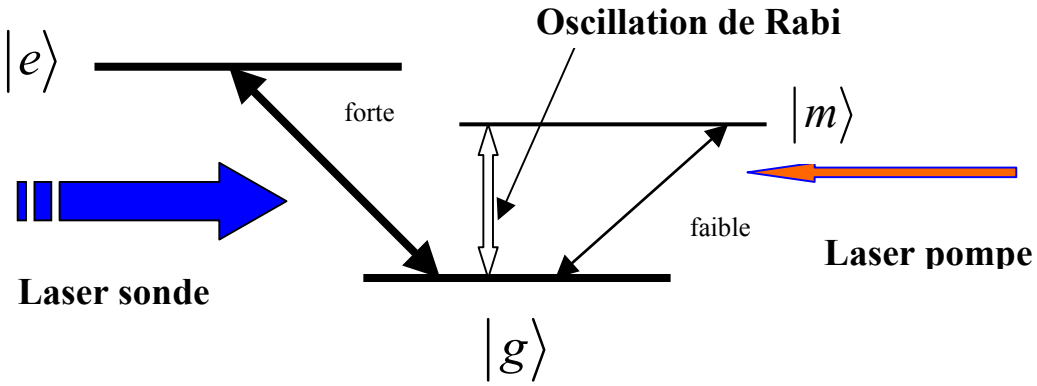
La parenté avec l'effet Zenon se situe au niveau de la dynamique, qui est ralentie de façon spectaculaire. En outre, l'évacuation rapide d'énergie, quasi-instantanée quand on la rapporte à l'échelle propre du système Ω^{-1}, est un processus physique de durée très courte à destination du milieu extérieur que l'on peut considérer comme l'un de ces mécanismes qui se produisent quoi qu'il arrive quand un système microscopique interagit avec un appareil de mesure. Le modèle ci-dessus ne fait à aucun moment référence à une réduction du paquet d'ondes – la dynamique est hamiltonienne (quoique le Hamiltonien effectif soit non-hermitique) – mais on sent néanmoins que la parenté ne se réduit pas au simple ralentissement, même s'il semble difficile de pousser davantage la comparaison tout en conservant la définition première de l'effet Zenon.

R.J.Cook a proposé, en 1988, une expérience destinée à mettre en évidence cet effet, par une inhibition de l'absorption induite dans un atome à trois niveaux, du type de celui qui vient d'être introduit. Par opposition avec ce qui précède, c'est maintenant le couple $\{|g\rangle, |m\rangle\}$ qui est sollicité par une excitation résonnante et participe à l'oscillation de Rabi (cf. figure ci-dessous) ; la transition $|g\rangle \leftrightarrow |m\rangle$ est dans le domaine des radiofréquences (quelques centaines de MHz), l'oscillation de Rabi se produit à une fréquence de l'ordre de quelques dizaines de Hz. Si on peut effectuer une mesure de l'état du système durant cette oscillation, on trouve soit $|g\rangle$, soit $|m\rangle$ - l'état $|e\rangle$ étant pour l'instant hors-circuit – avec des probabilités connues, dépendant de la position de l'instant de mesure par rapport au cycle de Rabi. En définitive, l'opération de mesure – à définir – révèle soit l'état $|g\rangle$, soit l'état $|m\rangle$.

L'état $|e\rangle$ est supposé être couplé exclusivement au fondamental $|g\rangle$ par l'intermédiaire du champ électromagnétique : un *pulse* optique peut donc provoquer des transitions entre $|g\rangle$ et $|e\rangle$. $|e\rangle$ est un état excité « ordinaire », avec une durée de vie très courte, 10^{-10} s pour fixer les idées.

L'atome est donc soumis d'une part à l'excitation résonnante provoquant l'oscillation de Rabi, d'autre part à un pulse optique de durée très courte. C'est ce dernier qui réalise le *collapse* de la fonction d'onde. En effet, si l'atome est dans l'état $|g\rangle$ quand arrive le *pulse* optique, on observe des cycles d'absorption-émission de photons (diffusion de photons) ; si au contraire l'atome est dans l'état $|m\rangle$, aucune diffusion de photon ne se produit. Ainsi

l'absence de photons diffusés révèle que l'état de l'atome est l'état $|m\rangle$ et produit donc le *collapse* de la fonction d'onde en $|m\rangle$; au contraire, la présence de photons diffusés produit le *collapse* en $|g\rangle$.



Atome à trois niveaux pour l'effet Zenon

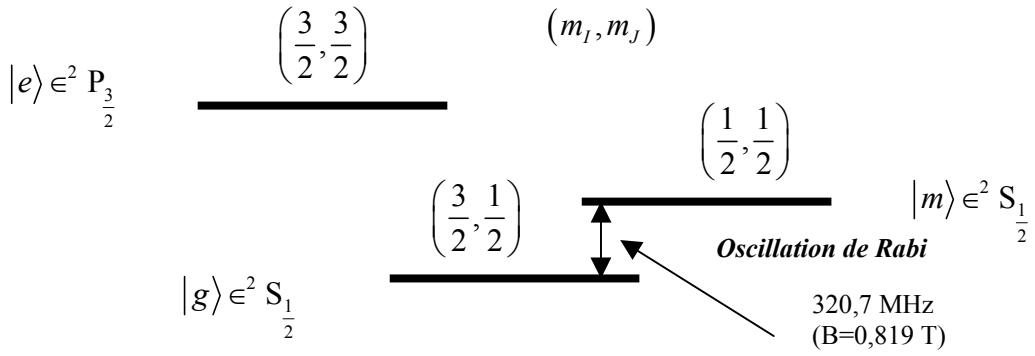
En outre, si on « trouve » $|m\rangle$ au sens ci-dessus, au sens ci-dessus, l'atome reste en $|m\rangle$ durant tout le pulse et un deuxième pulse rapproché en temps révèle à nouveau le même état. Si au contraire on « trouve » $|g\rangle$, l'atome retourne dans le même état $|g\rangle$ après la fin de la mesure (après la fin du *pulse*), dans un intervalle de temps très court, de l'ordre de Γ_e^{-1}.

En définitive, le *pulse* optique constitue bien une mesure de l'état au sens où l'entend la mécanique quantique, à un petit détail près : la durée finie du *pulse*, alors que le processus de mesure, tel qu'il est ordinairement décrit, affirme l'instantanéité de la réduction du paquet d'ondes. Comme toujours, l'essentiel est que l'instantanéité supposée repose sur la considération de deux échelles de temps, la plus petite étant très petite – mais évidemment jamais strictement nulle. En tout cas, ce dispositif réalise presque parfaitement ce que la mécanique quantique appelle une mesure idéale, avec toutes ses conséquences y compris la réduction du paquet d'ondes ; il y a deux résultats possibles ($|g\rangle$ ou $|\mathrm{m}\rangle$). Un tel atome se prête donc *a priori* à l'observation de l'effet Zenon.

Itano *et al* (W.M.Itano, D.J.Heinzen, J.J.Bollinger et D.J.Wineland Phys.Rev.A**41**, 2295 (1990).) ont proposé ne description théorique quantitative de l'effet Zenon, à l'appui d'une expérience menée sur une petite population d'ions $^9Be^+$ (environ 5000). Les états $|g\rangle$ et $|m\rangle$ sont deux niveaux hyperfins du fondamental $^2S_{\frac{1}{2}}$ $\left((m_I, m_J) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ et } \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right)$. Un champ de radiofréquence (RF) provoque la résonance de Rabi entre ces deux niveaux.

(Dans leur expérience, le champ magnétique vaut 0,819 T et la séparation de deux niveaux hyperfins est égale à 320,7Hz : l'amplitude du champ RF est ajustée de sorte que $\Omega T = \pi$, avec $T = 256\text{ms}$ soit $\Omega \simeq 4\pi \simeq 12 Hz$.)

Le rôle de $|e\rangle$ est tenu par un niveau appartenant au multiplet excité ${}^2\mathrm{P}_{\frac{3}{2}}\left(\left(m_I,m_J\right)=\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)\right)$, couplé exclusivement au fondamental ; l'émission spontanée de ${}^2\mathrm{S}_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ est négligée. L'accord entre leur résultats expérimentaux et leur description théorique (donnée ci-dessous) est très satisfaisant ; ce travail est considéré comme fournissant la première preuve expérimentale de l'existence de l'effet Zenon.



Atome à trois niveaux de Itano et *al*.

Soit $\hbar\Omega$ l'élément de matrice couplant les deux niveaux hyperfins pertinents, entre lesquels se produit l'oscillation de Rabi. On va voir que si le champ RF à une durée $T=\frac{\pi}{\Omega}$ - on parle alors de π *pulse* – ,l'ion partant du fondamental $|g\rangle$ se retrouverait dans $|m\rangle$ à l'issue de l'excitation s'il évoluait librement, en dehors de toute mesure.

(Comme $\omega_{RF} >> \Omega_{Rabi}$, cela a un sens de parler d'un champ RF de fréquence (presque) parfaitement déterminée de durée $\sim \Omega^{-1}$).

En fait, simultanément, une série de *pulses* optiques de durée très courte est envoyée sur l'ion, à des intervalles de temps $p\frac{T}{N}\left(p=1,2,\cdots,N\right)$. La description théorique repose fondamentalement sur l'idée suivante : le système évolue selon l'équation de Schrödinger en ce qui concerne les deux niveaux hyperfins (ceux qui participent à l'oscillation de Rabi), cependant que les *pulses* (les mesures) ne relèvent pas de cette équation et sont traités conformément au postulats de réduction du paquet d'ondes (annulation « à la main » des éléments non-diagonaux de l'opérateur densité). Avant de continuer la discussion sur l'effet Zenon, quelques éléments concernant l'opérateur densité sont utiles.

• L'opérateur densité

L'opérateur densité est la quantité centrale de la statistique quantique, tout comme l'est la fonction d'onde pour la mécanique quantique. Pour un système quantique d'états $|E_n\rangle$ à

l'équilibre thermique avec un thermostat à la température T, les probabilités de Boltzmann sont proportionnelles à $e^{-\beta E_n}$. En pareil cas, on définit l'opérateur densité (d'équilibre) $\hat{\rho}$:

$$\hat{\rho}(\beta) = \sum_n Z^{-1} e^{-\beta E_n} |E_n\rangle\langle E_n| \equiv \sum_n \rho_{nn} |E_n\rangle\langle E_n| \quad , \quad Z = \sum_n e^{-\beta E_n} \quad (26)$$

En définitive, sur la base des états propres du système, $\hat{\rho}$ est représenté par la matrice diagonale dont les éléments de matrice sont les probabilités de Boltzmann. L'entropie statistique s'obtient comme :

$$S = -k_B T \sum_n \rho_{nn} \ln \rho_{nn} = -k_B T \mathrm{Tr}(\rho \ln \rho) \quad (27)$$

La limite à température nulle de ρ est :

$$\lim_{\beta \to 0} \hat{\rho}(\beta) = |E_1\rangle\langle E_1| \quad (28)$$

où $|E_1\rangle$ est l'état fondamental ; dans cette limite, $\hat{\rho}$ est idempotent :

$$\hat{\rho}^2(+\infty) = \hat{\rho}(+\infty) \quad (29)$$

et on dit alors qu'il s'agit d'un *cas pur*. Au contraire, à toute température finie, on a :

$$\hat{\rho}^2(\beta) \neq \hat{\rho}(\beta) \quad (30)$$

et on parle alors de *cas mixte*. D'une façon générale, pour un cas pur, il existe un vecteur d'état $|\psi\rangle$ tel que :

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi| \quad (\text{cas pur}) \quad (31)$$

dont la donnée est strictement équivalente à celle de $|\psi\rangle$. L'idempotence de $\hat{\rho}$ est évidente sur l'écriture (31).

Les considérations précédentes énoncées à propos de l'équilibre thermodynamique, peuvent être étendues à une situation variable dans le temps. Décrire la dynamique passe de prime abord par l'écriture de l'équation fondamentale pour $\hat{\rho}(t)$ qui, en un sens, généralise l'équation de Schrödinger pour $|\psi(t)\rangle$. Dans un contexte classique, le passage de la mécanique à la mécanique statistique s'opère par l'introduction de la fonction de densité ρ_{cl} qui donne la densité de probabilité dans l'espace des phases du système. La manipulation de l'équation fondamentale de la dynamique – ou ses variantes plus élaborées, les équations canoniques de Hamilton -– fournit l'équation :

$$\frac{\partial \rho_{cl}}{\partial t} = \{H, \rho_{cl}\} \quad (32)$$

où $\{H, \rho_{cl}\}$ est le crochet de Poisson : c'est l'équation de Liouville. Comme toujours, la version quantique de l'équation classique s'obtient en remplaçant le crochet de poisson par $-\frac{i}{\hbar}[\ ,\ ]$, et l'on obtient ainsi l'équation de Liouville quantique :

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = \left[\hat{H}, \hat{\rho}\right] \quad (33)$$

C'est cette équation que l'on postule en mécanique statistique quantique – tout comme on postule l'équation de Schrödinger $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\psi$. Son intégration formelle donne :

$$\hat{\rho}(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t} \hat{\rho}(0) e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t} \quad (34)$$

Si l'état de départ est un cas pur, alors il existe un $|\psi(t=0)\rangle$ tel que $\hat{\rho}(0)=|\psi(0)\rangle\langle\psi(0)|$ et alors :

$$\hat{\rho}(t)=e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}|\psi(0)\rangle\langle\psi(0)|e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}\equiv|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)| \quad (35)$$

D'où le résultat important : **un cas pur reste un cas pur tant que seule l'évolution, se fait suivant l'équation de Schrödinger**. Aucune évolution hamiltonienne (unitaire) ne peut transformer un cas pur en cas mixte ou inversement.

Par ailleurs (34) montre que $\hat{\rho}(t)$ est un opérateur hermitique si $\hat{\rho}(t=0)$ l'est, et que la trace de $\hat{\rho}(t)$ est une constante du mouvement ; la convention habituelle de normalisation est $\mathrm{Tr}\hat{\rho}=1$ de sorte que finalement :

$$\mathrm{Tr}\hat{\rho}(t)=\mathrm{Tr}\hat{\rho}(0)=1 \quad (36)$$

Le sens physique de $\hat{\rho}(t)$ est le même que celui de l'opérateur d'équilibre. Sur la base propre du Hamiltonien $\{|E_n\rangle\}$, $\hat{\rho}(t)$ est représenté par une matrice (en générale non-diagonale), dont les éléments diagonaux $\rho_{nn}(t)$ sont les probabilités pour qu'une mesure effectuée à l'instant t donne la valeur E_n pour l'énergie :

$$\rho_{nn}(t)\equiv\langle E_n|\hat{\rho}(t)|E_n\rangle=\mathrm{Prob}[E=E_n,t] \quad (37)$$

Autrement dit, les éléments diagonaux de $\hat{\rho}$ sont les *populations* (relatives) des différents états au sein de l'ensemble statistique et (36) ne traduit rien d'autre que la conservation de la somme des probabilités. De surcroît, on vérifie immédiatement que la valeur moyenne d'une observable $\hat{A}$ dans un cas pur est :

$$\langle\hat{A}\rangle\equiv\langle\psi(t)|\hat{A}|\psi(t)\rangle=\mathrm{Tr}\left(\hat{A}\hat{\rho}(t)\right) \quad (38)$$

La formule $\langle\hat{A}\rangle(t)=\mathrm{Tr}\left(\hat{A}\hat{\rho}(t)\right)$ reste vraie pour un cas mixte, compte tenu du sens physique des éléments diagonaux de $\hat{\rho}$ et de la propriété d'invariance de la trace.

En tant qu'opérateur représenté par une matrice, $\hat{\rho}$ possède aussi des éléments non-diagonaux, que Claude Cohen-Tannoudji a proposé d'appeler *cohérences*, puisqu'elles jouent un rôle essentiel dans les interférences quantiques. En effet, soit un cas pur construit avec l'état non-stationnaire $(E_n=\hbar\omega_n)$:

$$|\psi(t)\rangle=c_1e^{-i\omega_1t}|E_1\rangle+c_2e^{-i\omega_2t}|E_2\rangle \quad (39)$$

L'opérateur densité correspondant est :

$$\hat{\rho}(t)=|c_1|^2|E_1\rangle\langle E_1|+|c_2|^2|E_2\rangle\langle E_2|+c_1c_2^*e^{-i(\omega_1-\omega_2)t}|E_1\rangle\langle E_2|+c_2c_1^*e^{-i(\omega_2-\omega_1)t}|E_2\rangle\langle E_1| \quad (40)$$

ou, sous forme matricielle :

$$\hat{\rho}(t)=\begin{pmatrix}|c_1|^2 & c_1c_2^*e^{-i(\omega_1-\omega_2)t}\\ c_2c_1^*e^{-i(\omega_2-\omega_1)t} & |c_2|^2\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}\rho_{11} & \rho_{12}(t)\\ \rho_{21}(t) & \rho_{22}\end{pmatrix} \quad (41)$$

Les cohérences $\rho_{nm}(t), n\neq m$, oscillent à la pulsation de Bohr, laquelle caractérise l'oscillation des valeurs moyennes d'une observable ne commutant pas avec le Hamiltonien. Elles représentent globalement la cohérence de phase entre les différentes composantes d'un état non-stationnaire. En outre, leur existence – et leur forme en produit de deux termes – est essentiellement liée à l'idempotence de $\hat{\rho}$, c'est-à-dire à la propriété de $\hat{\rho}$ de représenter un cas pur.

L'équation de Liouville (33) produit une évolution hamiltonienne au sens où un cas pur le reste au cours du temps. La transition cas pur $\rightarrow$ cas mixte peut s'opérer essentiellement de deux façons, soit en couplant explicitement le système quantique à un grand système (ayant un nombre infini de degrés de liberté à la limite thermodynamique), souvent appelé *réservoir*, et en intégrant sur les degrés de liberté de ce dernier, soit en appliquant strictement le scénario de la mesure idéale telle que l'impose la mécanique quantique.

Quand on couple un système à un réservoir, le « petit » système reste l'objet principal d'étude et on admet même qu'il n'a aucune influence en retour sur la dynamique du réservoir. Il en résulte que seuls les degrés de liberté du système présentent un intérêt, ceux du réservoir étant connus (d'une façon ou d'une autre) une fois pour toutes. L'idée est donc d'écrire l'équation de Liouville pour le supersystème, puis de prendre la trace sur tous les degrés de liberté du réservoir. On obtient alors une équation pour l'opérateur densité réduit, laquelle (sauf exception) ne conserve pas le caractère pur au cours du temps. Toute la difficulté est la modélisation astucieuse du réservoir et de son interaction avec le petit système, permettant au total de définir un modèle raisonnable physiquement et tractable techniquement.

L'opérateur densité est aussi bien adapté à la description du processus de mesure, effectué simultanément (et indépendamment) sur les (micro)systèmes d'un ensemble au sens statistique, et au processus de réduction du paquet d'ondes qui lui est associé. En effet, la mesure à un instant t de l'énergie sur un ensemble décrit par $\hat{\rho}$ donne les différentes valeurs propres E_n avec les probabilités P_n, lesquelles sont précisément les éléments diagonaux ρ_{nn} de l'opérateur $\hat{\rho}$, représenté sur la base propre de $\hat{H}$. Juste après la mesure, une fraction P_1 de systèmes se retrouve dans l'état $|E_1\rangle$, une fraction $P_2 = 1 - P_1$ se retrouve dans l'état $|E_2\rangle$. L'ensemble statistique est alors décrit par un opérateur densité *diagonal* ; en d'autres termes, la réduction du paquet d'ondes se traduit par *l'annulation des cohérences* :

$$\hat{\rho}_{\text{avant la mesure}}(t) = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12}(t) \\ \rho_{21}(t) & \rho_{22} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \rho_{11} & 0 \\ 0 & \rho_{22} \end{pmatrix} = \hat{\rho}_{\text{après la mesure}}(t+0) \quad (42)$$

Bien évidemment, tous ces arguments sont aussi vrais dans le cas d'un système à nombre quelconque d'états.

•

• retour sur l'effet Zenon :

Retournons maintenant à l'effet Zenon observé pour l'atome à trois niveaux et à l'expérience de Cook. La dynamique s'effectue principalement dans le sous-espace $\{|g\rangle, |m\rangle\}$, la réduction effective du paquet d'ondes conduisant soit vers $|m\rangle$, soit vers $|g\rangle$, suivant l'instant auquel arrive le *pulse* optique dans le cycle de Rabi.

Le Hamiltonien $\hat{H}(t)$ de l'atome couplé (semi-classiquement) au champ RF est ainsi représenté par une matrice 2x2, que l'on peut toujours prendre de trace nulle en choisissant le zéro d'énergie au milieu des énergies E_g et E_m. En désignant par $\hbar\omega_0$ la différence $E_m - E_g$, par ω la pulsation du champ RF, la matrice de $\hat{H}(t)$ sur la base ordonnée $\{|m\rangle, |g\rangle\}$ est de la forme :

$$\hat{H}(t) = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \omega_0 & \Omega e^{-i\omega t} \\ \Omega e^{i\omega t} & -\omega_0 \end{pmatrix} \quad (43)$$

Dans le cas d'un système à deux niveaux, on peut toujours représenter les matrices en combinaison linéaire des trois matrices de Pauli définissant l'opérateur vectoriel $\hat{\vec{\sigma}}$:

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (44)$$

De fait, on peut écrire :

$$\hat{H}(t) = \frac{\hbar}{2} \hat{\vec{\mathrm{H}}}.\hat{\vec{\sigma}} \quad (45)$$

où $\hat{\vec{\mathrm{H}}}$ a pour composantes les quantités $\hbar^{-1}\mathrm{Tr}\left(\hat{H}\hat{\sigma}_u\right)$, ici égales à :

$$\hat{\vec{\mathrm{H}}} = \left(\Omega\cos\omega t, \Omega\sin\omega t, \omega_0\right) \quad (46)$$

Pour les mêmes raisons, l'opérateurs densité effectif est aussi une matrice 2x2, d'éléments : elle est hermitique et de trace égale à 1, ce qui lui confère aux total trois degrés de liberté réels. Il existe de ce fait une représentation vectorielle commode de $\hat{\rho}$ à l'aide d'un vecteur $\vec{R}$ de $\Re^3$, dont les trois composantes réelles sont :

$$R_x = \rho_{gm} + \rho_{mg} \quad , \quad R_y = i\left(\rho_{mg} - \rho_{gm}\right) \quad , \quad R_z = \rho_{mm} - \rho_{gg} \quad (47)$$

Les cohérences de $\hat{\rho}(t)$ sont don associées aux composantes transverses R_x et R_y, alors que les populations sont contenues dans la composante longitudinale R_z. On vérifie sans peine que la relation précise entre $\hat{\rho}$ et $\vec{R}$ est :

$$\hat{\rho}(t) = \frac{1}{2}\left(\hat{1} + \vec{R}(t).\hat{\vec{\sigma}}\right) \quad , \quad R_u = \mathrm{Tr}\left(\hat{\rho}\hat{\sigma}_u\right) \quad (48)$$

en particulier, on a :

$$\rho_{mm} = \frac{1}{2}\left(1 + R_z\right) \quad , \quad \rho_{gg} = \frac{1}{2}\left(1 - R_z\right) \quad (49)$$

Avec cette paramétrisation, l'équation de Liouville pour $\hat{\rho}$ s'écrit :

$$i\hbar\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \frac{\hbar}{4}\left[\hat{\vec{\mathrm{H}}}.\hat{\vec{\sigma}}, \vec{R}.\hat{\vec{\sigma}}\right] \quad (50)$$

En utilisant la relation bien connue : $\left(\hat{\vec{\sigma}}.\vec{A}\right)\left(\hat{\vec{\sigma}}.\vec{B}\right) = \vec{A}.\vec{B} + i\hat{\vec{\sigma}}\left(\vec{A}\wedge\vec{B}\right)$ et après calcul, la relation (50) prend la forme gyroscopique :

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \hat{\vec{\mathrm{H}}}(\mathrm{t}) \wedge \vec{R} \quad (51)$$

En passant dans le repère $Ox'y'z$ tournant à la vitesse ωt autour de Oz, c'est-à-dire en posant :

$$\hat{\rho}'(t) = \hat{U}^{\dagger}(t)\hat{\rho}(t)\hat{U}(t) \quad , \quad \hat{U}(t) = e^{-i\frac{\omega t}{2}\hat{\sigma}_z} \quad (52)$$

on obtient pour $\vec{R}'$ associé à $\hat{\rho}'$:

$$\frac{d\vec{R}'}{dt} = \hat{\vec{\mathrm{H}}}' \wedge \vec{R}' \quad , \quad \hat{\vec{\mathrm{H}}}' = \left(\Omega, 0, \omega_0 - \omega\right) \quad (53)$$

techniquement, le point important est que maintenant, $\hat{\vec{\mathrm{H}}}'$ est indépendant du temps ; de plus, compte tenu de la forme de la transformation unitaire $\hat{U}$ définie en (52), on a $R_z^{'} = R_z$. L'équation (53) montre qu'à la résonance stricte $\omega = \omega_0$, $\vec{R}'$ précesse autour de Ox' à la pulsation Ω. Si à l'instant $t = 0$, l'ion est dans le fondamental $|g\rangle$ alors $\vec{R}' = (0, 0, -1)$ - et en

l'absence de toute autre excitation – se retrouve dans l'état $|m\rangle$ au temps $T=\frac{\pi}{\Omega}$ et alors $\vec{R}'=(0,0,+1)$: c'est bien parce que le vecteur $\vec{R}'$ a fait un demi-tour que l'on parle de π-*pulse* (pour le champ RF). A un instant quelconque, $\vec{R}'$ est quelque part dans le plan $y'Oz$ du repère tournant, les deux populations sont différentes de zéro, tout comme les cohérences : c'est l'oscillation de Rabi.

Introduisons maintenant le train régulier de *pulses*, comme dans l'expérience d'Itano *et al.*, chacun d'entre eux jouant le rôle d'une opération de mesure et survenant à des instants t_n, calés sur la période T, $t_n=n\Delta t$ avec $\Delta t=\frac{T}{N}$. Juste avant la première mesure, survenant à $t_1=\frac{T}{N}=\frac{\pi}{N\Omega}$, on a :

$$\vec{R}'\left(t=\frac{\pi}{N\Omega}\right)=(0,\sin\Omega t,-\cos\Omega t)_{t=\frac{\pi}{N\Omega}}=\left(0,\sin\frac{\pi}{N},-\cos\frac{\pi}{N}\right)\quad(54)$$

Survient alors le premier *pulse* optique ; traité comme une mesure idéale, il projette l'ion soit dans l'état $|m\rangle$, soit dans l'état $|g\rangle$. Sur un ensemble d'ions représentés par l'opérateur densité, l'effet est d'annuler les éléments non-diagonaux (cohérences) et de laisser intacts les éléments diagonaux (populations). A l'issue du 1er *pulse* optique, l'opérateur densité est donc associé au vecteur :

$$\vec{R}'\left(t=\frac{\pi}{N\Omega}+0\right)=\left(0,0,-\cos\frac{\pi}{N}\right)\quad(55)$$

Au total, après la première opération de mesure effectuée par le premier *pulse* optique, $\vec{R}'$ se retrouve dans la direction de départ mais a une longueur contractée d'un facteur $\cos\frac{\pi}{N}$. En vertu de la linéarité de l'équation gyroscopique (53), au bout de N mesures, le vecteur $\vec{R}'$ pointe toujours de la même façon qu'au départ, mais sa longueur est réduite d'un facteur $\left(\cos\frac{\pi}{N}\right)^N$. Ainsi, à l'issue de la $N^{\text{ième}}$ mesure, on a :

$$\vec{R}'(t=T+0)=\left(0,0,-\cos^N\frac{\pi}{N}\right)\quad(56)$$

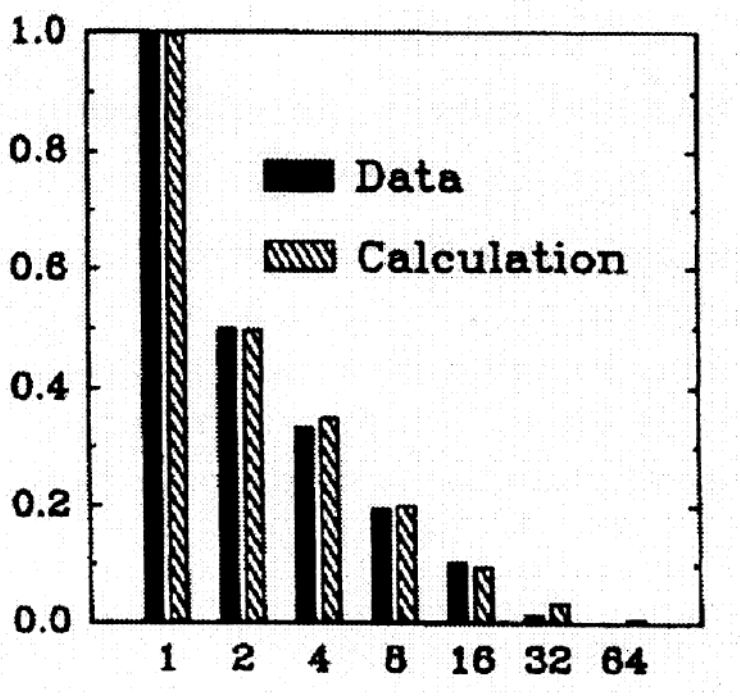
Compte tenu de $\rho_{mm}+\rho_{gg}=1$ et de (47), la probabilité pour un ion d'être dans $|m\rangle$ à $T+0$ est donc $\left(R_z^{'}=R_z \text{ et voir}(49)\right)$:

$$P_m(T+0)\equiv\rho_{mm}(T+0)=\frac{1}{2}\left[1+R_z(T+0)\right]=\frac{1}{2}\left(1-\cos^N\frac{\pi}{N}\right)\quad(57)$$

En développant le cosinus dans l'hypothèse $N>>1$, on a :

$$P_m(T+0)\simeq\frac{1}{2}\left[1-e^{+N\ln\left(1-\frac{\pi^2}{2N^2}\right)}\right]\simeq\frac{1}{2}\left(1-e^{-\frac{\pi^2}{2N^2}}\right)\simeq\frac{\pi^2}{4N}<<1\quad(58)$$

En l'absence de mesures répétées, on trouverait $P_m(T+0)=1$, puisqu'il s'agit d'un $\pi-pulse$. La décroissance de P_m avec le nombre de mesures donne l'effet Zenon et se trouve quantitativement en plein accord avec les résultats expérimentaux des auteurs, constituant ainsi la preuve expérimentale de cet effet.



Variation de la probabilité d'être en $|m\rangle$ en fonction du nombre N de *pulses*

(Figure extraite de : W.M.Itano, D.J.Heinzen, J.J.Bollinger et D.J.Wineland : « Quantum Zenon Effect » Phys.Rev.A**41**, 2295 (1990).

EXERCICE DE COMPREHENSION :

Référence bibliographique :

(*) W.M.Itano, D.J.Heinzen, J.J.Bollinger et D.J.Wineland Phys.Rev.A**41**, 2295 (1990).

L'effet Zénon (1) quantique se manifeste par l'inhibition d'une transition entre niveaux atomiques lorsque le système fait l'objet de mesures répétées. Cet effet, que l'on se propose d'étudier ici, est susceptible d'apparaître aussi bien dans le cas d'une transition entre niveaux discrets que dans le cas où le niveau discret est couplé à un continuum d'états. Cet effet a été observé dans le cas où la transition se produit entre deux niveaux discrets $(*)$. C'est cette situation que nous étudierons.

Couplage entre niveaux discrets

1-/ On considère un atome interagissant avec un champ électrique oscillant

$$\vec{E}(t) = \vec{E}_0 \cos \omega t \qquad (1)$$

La pulsation ω est choisie de façon à induire une absorption résonnante depuis le niveau fondamental a de l'atome vers un niveau excité b $(E_b - E_a = \hbar\omega)$. On posera

$$\hbar\Omega_1 = -\langle b|\hat{\vec{D}}.\vec{E}_0|a\rangle \quad (2)$$

où Ω_1 est une quantité réelle et $\hat{\vec{D}}$ l'opérateur dipolaire électrique de l'atome. La fonction d'onde atomique étant écrite sous la forme :

$$|\Psi(t)\rangle = \gamma_a(t)e^{-\frac{i}{\hbar}E_a t}|a\rangle + \gamma_b(t)e^{-\frac{i}{\hbar}E_b t}|b\rangle \qquad (3)$$

• Ecrire les équations d'évolution de γ_a et γ_b en utilisant l'approximation séculaire qui consiste à négliger la contribution des termes non résonnants (i.e. les termes oscillant à une fréquence différente de ω) .

2-/ Le système étant à l'instant initial $t_0 = 0$ dans l'état fondamental, donner les probabilités de présence de l'atome dans les états a et b à l'instant t (oscillations de Rabi).

3-/ La présence de l'atome dans l'un des niveau a ou b est sondée au moyen d'une source lumineuse de fréquence ω' couplant le niveau b à un autre niveau c de durée de vie Γ_c^{-1} (cf. figure ci-dessous)

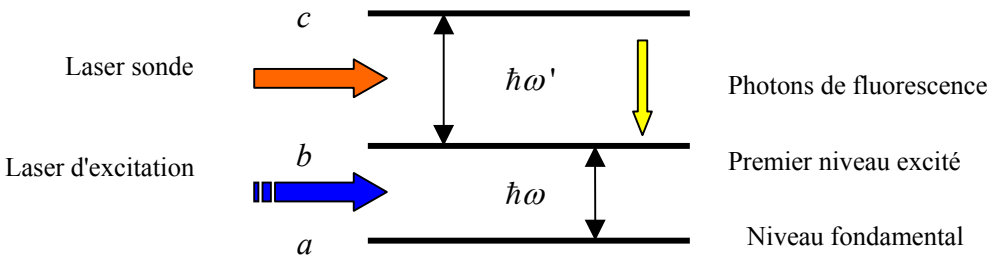


Schéma des niveaux d'énergie considérés. L'évolution de l'atome entre les niveaux a et b *est sondée au moyen d'impulsions de lumière sur la transition* $b \to c$.

Cette seconde source est appliquée pendant une durée τ (la première source de pulsation ω étant occultée durant ce bref intervalle de temps). Si l'atome est dans le niveau b, des photons de fluorescence sont alors émis à la fréquence ω'. En revanche, si l'atome est dans le niveau a, aucune fluorescence n'est observée. On suppose $\Gamma_c^{-1} << \tau << \Omega_1^{-1}$.

• Pourquoi une telle inégalité est-elle nécessaire ? (Dans l'expérience citée en référence [*], on avait $\Gamma_c^{-1} \approx 10^{-5}\tau$ et $\Omega_1^{-1} \approx 10^{2}\tau$).

4-/ On suppose d'abord que la mesure de la probabilité de présence de l'atome dans le niveau b se fait au bout d'un temps $T_1 = \dfrac{\pi}{\Omega_1}$.

• Quelle valeur $P_b^{(1)}$ obtient-on alors ?

On suppose ensuite que l'on fait deux mesures successives, la première à l'instant $T_2 = \dfrac{T_1}{2}$, la seconde à l'instant T_1.

• Quelles valeurs obtient-on pour les probabilités $P_b^{(2)}(1)$ et $P_a^{(2)}(1)$ de trouver l'atome dans les états b et a à l'instant T_2 ?

• En déduire la valeur de la probabilité de trouver l'atome dans le niveau b à l'instant T_1 (cette probabilité sera notée $P_b^{(2)}$).

5-/ On suppose à présent que des mesures sont effectuées avec une périodicité $T_n = \dfrac{T_1}{n}$. On appelle $P_b^{(n)}(p)$ et $P_a^{(n)}(p)$ les probabilités de trouver l'atome dans les niveaux b et a à l'issue de la $p^{\text{ième}}$ mesure et l'on posera

$$\Delta_p^{(n)} = P_a^{(n)}(p) - P_b^{(n)}(p)$$

• Trouver la relation entre $\Delta_p^{(n)}$ et $\Delta_{p-1}^{(n)}$. En déduire les valeurs de $P_b^{(n)}(p)$ et $P_b^{(n)} = P_b^{(n)}(n)$.

• Quelle est la valeur asymptotique de $P_b^{(n)}$ pour n grand ? Peut-on en déduire que des mesures répétées bloquent l'évolution du système ?

6-/ On donne sur la Table 1 les valeurs expérimentales obtenues par Wineland(*) et ses collaborateurs.

n	*Valeurs mesurées de* $P_b^{(n)}$
1	1,00
2	0,50
4	0,36
8	0,21
16	0,11
32	0,06
64	0,07

Table 1

Valeurs expérimentales de $P_b^{(n)}$ *Pour diverses valeurs de* n *(d'après Itano, Heinzen,Bollinger et Wineland (*))*

• Comparez ces valeurs avec les prédictions théoriques calculées dans la question précédente. Les incertitudes expérimentales étant évaluées à 2×10^{-2}, commentez les résultats obtenus.

7-/ Le résultat peut sembler **paradoxal** : observer un système l'empêche d'évoluer !
En quoi peut résider la solution de ce paradoxe ?

(1) ZENON d'Elée : philosophe grec (485 Av. J-C) auteur de célèbres paradoxes (ou antinomies) ayant exercé un grand rôle dans l'histoire de la pensée : Achille qui ne rattrape jamais la tortue, la flèche qui vole et qui est immobile etc. Ses paradoxes sont exposés et critiqués par Aristote dans sa "Physique" (livre 9).

Corrigé

1-/ L'Hamiltonien de l'atome s'écrit : $\hat{H}(t) = \hat{H}_0 + \hat{H}_1(t) = \hat{H}_0 \underbrace{-\hat{\vec{D}}.\vec{E}(t)}_{\hat{H}_1(t)} = \hat{H}_0 - \hat{\vec{D}}.\vec{E}_0 \cos\omega t$

soit dans la base $\{|a\rangle, |b\rangle\}$ de l'Hamiltonien non perturbé $\hat{H}_0$:

$$\left(\hat{H}(t)\right) = \begin{pmatrix} E_a & \hbar\Omega_1 \cos\omega t \\ \hbar\Omega_1 \cos\omega t & E_b \end{pmatrix}$$

L'évolution dans le temps de l'état $|\Psi(t)\rangle$ de l'atome est régi par l'équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{d}{dt}|\Psi(t)\rangle = \hat{H}(t)|\Psi(t)\rangle = \left(\hat{H}_0 + \hat{H}_1(t)\right)|\Psi(t)\rangle \quad (1)$$

où $|\Psi(t)\rangle = \gamma_a(t) e^{-\frac{i}{\hbar}E_a t}|a\rangle + \gamma_b(t) e^{-\frac{i}{\hbar}E_b t}|b\rangle$ est développée sur les états propres de $\hat{H}_0$. Les évolutions dans le temps des coefficients γ_a et γ_b sont obtenues en projetant (1) sur les vecteurs de la base $\{|a\rangle, |b\rangle\}$. Soit :

$$\begin{cases} i\hbar \frac{d}{dt}\langle a|\Psi(t)\rangle = \langle a|H_0|\Psi(t)\rangle + \langle a|H_1|\Psi(t)\rangle \quad (2) \\ i\hbar \frac{d}{dt}\langle b|\Psi(t)\rangle = \langle b|H_0|\Psi(t)\rangle + \langle b|H_1|\Psi(t)\rangle \quad (3) \end{cases}$$

$$(2) \Rightarrow i\hbar \frac{d}{dt}\left(\gamma_a(t) e^{-\frac{i}{\hbar}E_a t}\right) = \gamma_a E_a e^{-\frac{i}{\hbar}E_a t} + \hbar\Omega_1 \gamma_b e^{-\frac{i}{\hbar}E_b t} \cos\omega t$$

soit puisque $E_b - E_a = \hbar\omega$ et $\cos\omega t = \dfrac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}$

$$i\hbar\dot{\gamma}_a = \frac{\hbar\Omega_1}{2}\gamma_b\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right)e^{-i\omega t} = \frac{\hbar\Omega_1}{2}\gamma_b + \underbrace{\frac{\hbar\Omega_1}{2}\gamma_b e^{-2i\omega t}}_{\text{terme non résonnant}} \approx \frac{\hbar\Omega_1}{2}\gamma_b$$

d'où : $i\dot{\gamma}_a = \dfrac{\Omega_1\gamma_b}{2}$ (4)

de même, $(4) \Rightarrow i\dot{\gamma}_b = \dfrac{\Omega_1\gamma_a}{2}$ (5)

2-/ A $t = 0$ l'atome se trouve dans l'état fondamental $|\Psi(0)\rangle = |a\rangle$ et par conséquent :

$$\begin{cases} \gamma_a(0) = 1 \\ \gamma_b(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\gamma}_a(0) = 0 \\ \dot{\gamma}_b(0) = \dfrac{\Omega_1}{2} \end{cases}$$

le système $\begin{cases}(4)\\(5)\end{cases}$ avec les conditions initiales précédentes admet comme solution

$$\begin{cases}\gamma_a(t)=\cos\left(\dfrac{\Omega_1 t}{2}\right)\\ \gamma_b(t)=\sin\left(\dfrac{\Omega_1 t}{2}\right)\end{cases} \qquad (6)$$

et par conséquent : $\left|\Psi(t)\right\rangle=\cos\left(\dfrac{\Omega_1 t}{2}\right)e^{-\frac{i}{\hbar}E_a t}\left|a\right\rangle+\sin\left(\dfrac{\Omega_1 t}{2}\right)e^{-\frac{i}{\hbar}E_b t}\left|b\right\rangle \qquad (7)$

Les probabilités de présence à l'instant t de trouver l'atome dans l'état fondamental a et dans l'état excité b sont donc respectivement :

$$\begin{cases}P_a(t)=\left|\left\langle a\middle|\Psi(t)\right\rangle\right|^2=\cos^2\left(\dfrac{\Omega_1 t}{2}\right)\\ P_b(t)=\left|\left\langle b\middle|\Psi(t)\right\rangle\right|^2=\sin^2\left(\dfrac{\Omega_1 t}{2}\right)\end{cases} \qquad (8)$$

3-/ La condition $\Omega_1\tau<<1$ implique que l'évolution du système sous l'action du champ $\vec{E}$ pendant le temps de la mesure est négligeable. Si on ne faisait pas de mesure, l'interruption de la source d'excitation n'induirait pas de modification sensible à l'oscillation de Rabi .
La condition $\Gamma_c\tau>>1$ assure que le champ couplant b à c est assez intense, de très nombreux photons de fluorescence sont émis pendant le temps τ .La mesure (et donc la réduction du paquet d'onde) résulte en effet de la détection d'au moins un photon de fluorescence.

4-/

- Au bout du temps $T_1=\dfrac{\pi}{\Omega_1}$, la probabilité de trouver l'atome dans son premier état excité b est, d'après (8) :

$$P_b^{(1)}=\sin^2\left(\frac{\Omega_1}{2}\frac{\pi}{\Omega_1}\right)=1$$

et donc :

$$P_a^{(1)}=1-P_b^{(1)}=0$$

- On effectue ensuite deux mesures successives, une première mesure au temps $T_2=\dfrac{T_1}{2}$. Puis une seconde au temps T_1. D'après (8) la probabilité de trouver l'atome dans l'état b au temps T_2 est :

$$P_b^{(2)}(2)=\sin^2\left(\frac{\Omega_1}{2}\frac{\pi}{2\Omega_1}\right)=\frac{1}{2}$$

et donc :

$$P_a^{(2)}(2)=1-P_b^{(2)}(2)=\frac{1}{2}$$

A l'issue de la mesure, le système a une probabilité $\frac{1}{2}$ d'être dans l'état fondamental a et a une probabilité identique d'être dans le premier état excité b.
La probabilité **conditionnelle** de le trouver dans l'état b à un instant ultérieur est :

$$P_b(t) = \frac{1}{2} \times \sin^2\left(\frac{\Omega_1}{2}(t - T_2)\right) + \frac{1}{2} \times \cos^2\left(\frac{\Omega_1}{2}(t - T_2)\right) \qquad (9)$$

c'est-à-dire d'après (8) :

$P_b(t)$ = probabilité pour l'atome d'être dans l'état a à l'instant T_2 (soit $\frac{1}{2}$) × probabilité d'être dans l'état b à l'instant $t > T_2$ + probabilité pour l'atome d'être dans l'état b à l'instant T_2 (soit $\frac{1}{2}$) × probabilité pour l'atome d'être dans l'état a à l'instant $t > T_2$.

Soit au temps $t = T_1 = 2T_2 = \frac{\pi}{\Omega_1}$

$$P_b^{(2)} = P_b(2T_2) = \frac{1}{2} \times \sin^2\left(\frac{\Omega_1}{2} T_2\right) + \frac{1}{2} \times \cos^2\left(\frac{\Omega_1}{2} T_2\right) = \frac{1}{2} \times \sin^2\left(\frac{\Omega_1}{2} \frac{\pi}{2\Omega_1}\right) + \frac{1}{2} \times \cos^2\left(\frac{\Omega_1}{2} \frac{\pi}{2\Omega_1}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \times \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2} \times \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad (10)$$

5-/

- Les relations établies à la question **4-/** se généralisent de la façon suivante :

$$P_b^{(n)}(p) = P_a^{(n)}(p-1) \sin^2\left(\frac{\Omega_1}{2} \frac{\pi}{n\Omega_1}\right) + P_b^{(n)}(p-1) \cos^2\left(\frac{\Omega_1}{2} \frac{\pi}{n\Omega_1}\right)$$

$$P_a^{(n)}(p) = P_a^{(n)}(p-1) \cos^2\left(\frac{\Omega_1}{2} \frac{\pi}{n\Omega_1}\right) + P_b^{(n)}(p-1) \sin^2\left(\frac{\Omega_1}{2} \frac{\pi}{n\Omega_1}\right)$$

soit en posant $\Delta_p^{(n)} = P_a^{(n)}(p) - P_b^{(n)}(p)$ et en faisant la différence des deux relations précédentes :

$$\Delta_p^{(n)} = \Delta_{p-1}^{(n)} \left(\cos^2\frac{\pi}{2n} - \sin^2\frac{\pi}{2n}\right) = \Delta_{p-1}^{(n)} \cos\frac{\pi}{n}$$

Sachant que $\Delta_0^{(n)} = 1$, il vient donc : $\Delta_p^{(n)} = \cos^p \frac{\pi}{n}$

On a donc : $\begin{cases} P_a^{(n)}(p) + P_b^{(n)}(p) = 1 \\ P_a^{(n)}(p) - P_b^{(n)}(p) = \cos^p \frac{\pi}{n} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_a^{(n)}(p) = \frac{1}{2}\left(1 + \cos^p \frac{\pi}{n}\right) \\ P_b^{(n)}(p) = \frac{1}{2}\left(1 - \cos^p \frac{\pi}{n}\right) \end{cases}$

- La valeur asymptotique de $P_b^{(n)}$ pour n grand est : $P_b^{(n)} = \frac{1}{2}\left[1 - \left(1 - \frac{\pi^2}{2n} + \cdots\right)\right] \approx \frac{\pi^2}{4n}$

L'application des mesures répétées bloque donc l'évolution du système et le maintient dans le niveau fondamental.

6-/ de $P_b^{(n)}(p) = \frac{1}{2}\left(1 - \cos^p \frac{\pi}{n}\right)$ on en déduit :

n	*Valeurs mesurées de* $P_b^{(n)}$	***Valeurs calculées de*** $P_b^{(n)}$
1	1,00	**1,00**
2	0,50	**0,50**
4	0,36	**0,37**
8	0,21	**0,23**
16	0,11	**0,13**
32	0,06	**0,09**
64	0,07	**0,04**

La comparaison avec les valeurs expérimentales montre un accord satisfaisant, à l'exception de la valeur obtenue pour $n = 64$ qui sort très légèrement de la marge d'erreur $\left(2 \times 10^{-2}\right)$. Ce qui peut s'expliquer par le caractère rudimentaire du modèle étudié : système à trois niveaux simplifié (omission de la dégénérescence Zeeman, non prise en compte de l'émission spontanée du niveau b).
Enfin lorsque n croit, $n\Omega_1\tau$ ne peut être considéré comme petit devant 1 (cf. **3-/**) et le temps relatif aux mesures n'est plus négligeable devant la période des oscillations de Rabi.

7-/ La solution de ce paradoxe réside dans le fait qu'une mesure nécessite toujours une certaine extension dans le temps et dans l'espace. En pratique, on ne peut donc pas diviser T_1 en intervalles infiniment petits à moins d'interagir de manière continue avec le système, ce qui est un autre problème…