COHERENCE QUANTIQUE
ET
INTERFERENCES A DEUX ONDES

Introduction

Un des principes les plus importants de la théorie quantique est sans conteste le **principe de superposition**. Si un système donné peut être préparé dans chacun des deux vecteurs d'états $|\psi_1\rangle$ et $|\psi_2\rangle$, alors les vecteurs $\alpha_1|\psi_1\rangle + \alpha_2|\psi_2\rangle \quad (1)$ sont également des états accessibles au système. Ce principe de superposition intervient dans de nombreuses expériences de physique quantique. L'interférence observée dans un dispositif de trous d'Young, par exemple, s'interprète en disant que la particule est dans un état qui est la superposition du passage par le trou 1 et du passage par le trou 2. On retrouve ces superpositions cohérentes d'états quantiques en résonance magnétique nucléaire, en physique de la matière condensée (jonctions Josephson, squids), ou encore dans les expériences de collisions.

Quand on s'intéresse à un objet microscopique isolé (atome, photon,...), ces superpositions cohérentes d'états n'ont *a priori* rien d'exceptionnel. Si un atome d'hydrogène peut être préparé dans l'état $|1s\rangle$ ou dans l'état $|2s\rangle$, pourquoi ne pourrait-il pas exister également dans l'état $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1s\rangle + |2s\rangle\right)$? Si l'objet microscopique que l'on considère n'est pas isolé, mais couplé à un environnement, la physique devient beaucoup plus compliquée. L'état du système global, objet+environnement, sera généralement **intriqué** et s'écrira sous la forme

$$\sum_j \alpha_j \left|\psi_{objet}^{(j)}\right\rangle \otimes \left|\phi_{envir.}^{(j)}\right\rangle \quad (2)$$

De cette intrication, naissent des **corrélations** entre l'objet et l'environnement, ainsi qu'une modification des propriétés de cohérence de l'objet, telles qu'elles se manifestent par exemple dans une expérience d'interférence. Le système physique composé par l'objet forme désormais un système **ouvert**, couplé à d'autres systèmes, et il ne peut donc pas être décrit par un vecteur d'état $|\psi_{objet}\rangle$.

Le but de ce qui suit est d'abord de présenter les bases de l'étude de tels systèmes ouverts en mécanique quantique, c'est-à-dire définir les outils bien adaptés pour décrire l'évolution d'un objet quantique simple quand il est couplé à son environnement. Nous étudierons souvent des situations physiques qui peuvent avoir un équivalent classique, mais les conclusions seront radicalement différentes. Prenons l'exemple du mouvement d'une particule ponctuelle libre, et intéressons-nous à la modification entraînée par l'existence d'un environnement constitué par un fluide dilué. Classiquement, la première conséquence à laquelle on songe est l'apparition d'une force de friction $\vec{F} = -\gamma\vec{P}$, où $\vec{P}$ désigne l'impulsion de la particule. Cette force ralentit la particule $\left(\vec{P}(t) = \vec{P}_0 e^{-\gamma t}\right)$; on pourrait naïvement penser que la version quantique de cet effet, via l'inégalité de Heisenberg $\Delta X \Delta P \geq \frac{\hbar}{2}$, est une augmentation de la cohérence de la particule puisque son impulsion diminue. Nous verrons que la situation est plus complexe que cela ; d'ailleurs une simple évolution de l'opérateur

impulsion $\hat{\vec{P}}$ en $e^{-\gamma t}$ ne préserverait pas les relations de commutation $\left[\hat{X}_j, \hat{P}_k\right] = i\hbar\delta_{jk}$. Nous verrons qu'au niveau quantique, la dissipation qu'amène le fluide va de pair avec des fluctuations, et ces fluctuations limitent le degré de cohérence accessible.

La décohérence qui apparaît lorsqu'un objet quantique est couplé à son environnement joue également un rôle essentiel dans les développements moderne de la théorie de la mesure. Le point dans ce domaine est d'expliquer pourquoi les appareils de mesure ne sont pas dans une superposition cohérente de tous les résultats possibles d'une expérience (un état type « chat de Schrödinger »). Ici encore, c'est l'interaction avec l'environnement qui se charge de transformer une superposition cohérente du type (1) en un mélange incohérent dont nous préciserons la nature.

Références

Ce texte est très largement inspiré des cours donnés par C. Cohen-Tannoudji au Collège de France lors des années 1977-78, 1988-89 et 1989-90. Ces cours sont disponibles en version électronique depuis la page web du Département de Physique de l'ENS : http://www.phys.ens.fr/cours/

On se propose ici de décrire quelques expériences pour lesquelles la cohérence quantique se manifeste de manière spectaculaire. Nous partons d'une situation expérimentale bien connue, les trous d'Young, et nous étudions sa mise en œuvre pratique pour des atomes ou des grosses molécules. Nous considérons généralement le cas de fonctions d'onde macroscopiques, décrivant une assemblée d'atomes tous condensés dans le même état. Nous étudions ensuite le brouillage possible de cette cohérence, soit par l'intrication de la particule avec son environnement (ce qui fournit une information sur le chemin suivi dans l'interféromètre), soit par le désordre apporté par la température finie de l'échantillon considéré.

1. L'expérience des trous d'Young

1.1 Principe

Cette expérience est bien connue de toute personne ayant un jour étudié un phénomène ondulatoire. Le principe est rappelé sur la figure 1.1. Une onde plane arrive sur un écran percé de 2 trous A_+ et A_-. On mesure l'intensité de l'onde sur un deuxième écran situé à une distance D du premier. L'amplitude en un point M de cet écran est la somme des amplitudes rayonnées par les deux trous, considérés comme des sources secondaires. En notant $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ le vecteur d'onde, on trouve :

$$A(M) \propto e^{ikd_+} + e^{-ikd_-} \text{ avec } d_\pm = \sqrt{D^2 + \left(x \pm \left(\frac{a}{2}\right)\right)^2} \simeq D \pm \frac{xa}{2D} + \cdots \quad (1.1)$$

Ce qui conduit à une modulation de l'intensité $I(M) = |A(M)|^2$ en $\cos^2\left(k\frac{xa}{2D}\right)$ soit un interfrange égal à $x_i = \frac{\lambda D}{a}$.

Le caractère paradoxal de cette expérience survient quand on associe une particule à l'onde. Dans un raisonnement classique, une particule passe par un trou ou par l'autre. On s'attend alors à ce que la figure obtenue sur le deuxième écran soit la somme des éclairements obtenus en bouchant un trou ou l'autre. Ce raisonnement classique ne rend pas compte du

résultat obtenu expérimentalement avec des objets microscopiques, en particulier de la modulation avec la période x_i .

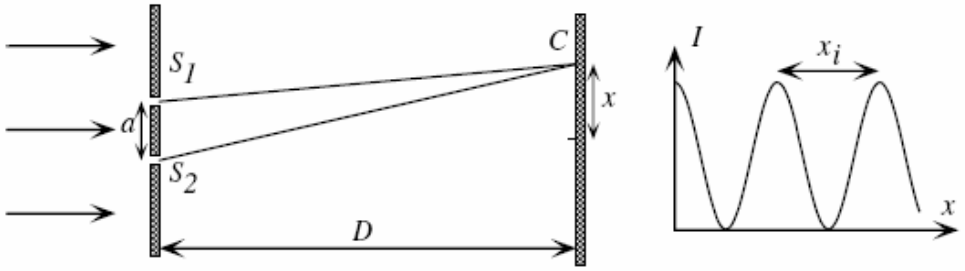


FIG. 1.1: Expérience des trous d'Young.

Dans cette situation, le fait de permettre à la particule de passer par les deux trous à la fois diminue la probabilité d'atteindre certains points de l'écran, ce qui est évidemment paradoxal d'un point de vue classique.
Plusieurs questions se posent alors naturellement :

- Jusqu'à quelle taille d'objet ce type d'expérience peut-il être mené ?
- Que se passe-t-il si on enregistre, volontairement ou non, le chemin suivi dans cette expérience d'interférence ?
- Cette interférence entre chemins quantiques peut-elle se généraliser à des chemins plus abstraits, dans un espace de Hilbert à plusieurs particules par exemple ?

1.2 Expérience d'Young avec des atomes

Les premières manifestations du caractère ondulatoire de la matière ont été obtenues avec des particules légères, comme des électrons (expérience de diffraction par Davisson et germer). Depuis, on cherche à étendre ce type d'expérience à des objets de plus en plus massifs : neutrons, atomes, ou molécules.

Le principe et le résultat d'une expérience d'interférences effectuée avec des atomes (*F.Shimizu, K.Shimizu, H.Takuma, Phys. Rev. A**46**, R17(1992))* dans un dispositif de fentes d'Young est représenté sur la figure 1.2. Un nuage de quelques millions d'atomes de néon est d'abord capturé et refroidi au millikelvin dans un piège laser. Il est ensuite lâché, sans vitesse initiale, à 3,5cm au-dessus d'un écran percé de deux fentes parallèles, de largeur 2microns et séparées par 6 microns. Les atomes sont détectés lorsqu'ils frappent une plaque située 85cm sous le plan des deux fentes. La plaque détectrice enregistre l'impact de chaque atome, un impact étant représenté par un point sur la figure 1.2.

On observe que ces impacts se distribuent suivant un système de franges parfaitement semblable à celui obtenu dans des interférences lumineuses ou acoustiques. Il y a des zones sombres (beaucoup d'impacts ; flux d'atomes intense) parallèles à la direction des fentes, qui alternent avec des zones claires (peu ou pas d'impacts, flux d'atomes faible).

L'expérience a été reproduite avec d'autres particules : électrons, neutrons, molécules. Dans tous les cas, la distribution des impacts sur l'écran révèle une figure d'interférences. L'interfrange mesuré est $x_i = \frac{\lambda D}{a}$, où la longueur λ et l'impulsion $\vec{p} = m\vec{v}$ des particules de vitesse $\vec{v}$, sont reliées par la relation de de Broglie $\lambda = \frac{h}{p}$.

(Le calcul précis des franges d'interférences dans l'expérience montrée en figure 1.2 doit prendre en compte la variation de la longueur d'onde de de Broglie au fur et à mesure de l'accélération des atomes par le champ de

pesanteur. La vitesse des atomes au niveau des fentes est de 0,8 $m.s^{-1}$; au niveau de la plaque détectrice, elle est de 4 $m.s^{-1}$).

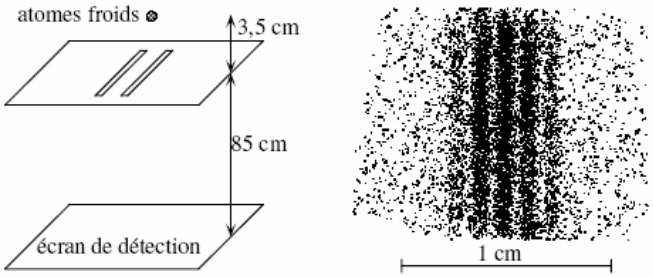


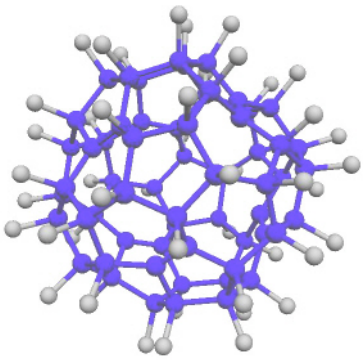
FIG. 1.2: A gauche : expérience de fentes d'Young réalisée avec des atomes de néon, préalablement refroidis par laser au milliKelvin. A droite : distribution observée expérimentalement ; chaque point de la figure correspond à l'impact d'un atome sur la plaque détectrice. Les franges d'interférences sont clairement visibles.

1.3 Interférences quantiques avec de gros objets

Le groupe de Zeilinger à Innsbrück, puis à Vienne, a récemment mis en évidence le comportement ondulatoire de grosses molécules comme les fullerènes $(C_{60},$ masse 720uma$)$

Ou des molécules dérivées $(C_{60}F_{48},$ masse 1632uma$)$

(M. Arndt & al. Nature (London) 401, 680 (1999) ; B. Brezger & al., Phys. Rev. Lett. ***88****, 100 404 (2002); L. Hackermüller & al., Phys. Rev. Lett.* ***91****, 090408 (2003))*



$(C_{60}F_{48},$ masse 1632uma$)$

Le montage expérimental est un peu plus complexe qu'une simple expérience de trous d'Young (figure 1). Il est fondé sur l'effet Talbot (1836) et utilise un interféromètre Talbot-von Lau.

William Henry Fox Talbot (1800-1877)
(Inventeur de la photographie et des fonctions elliptiques…..entre autres)

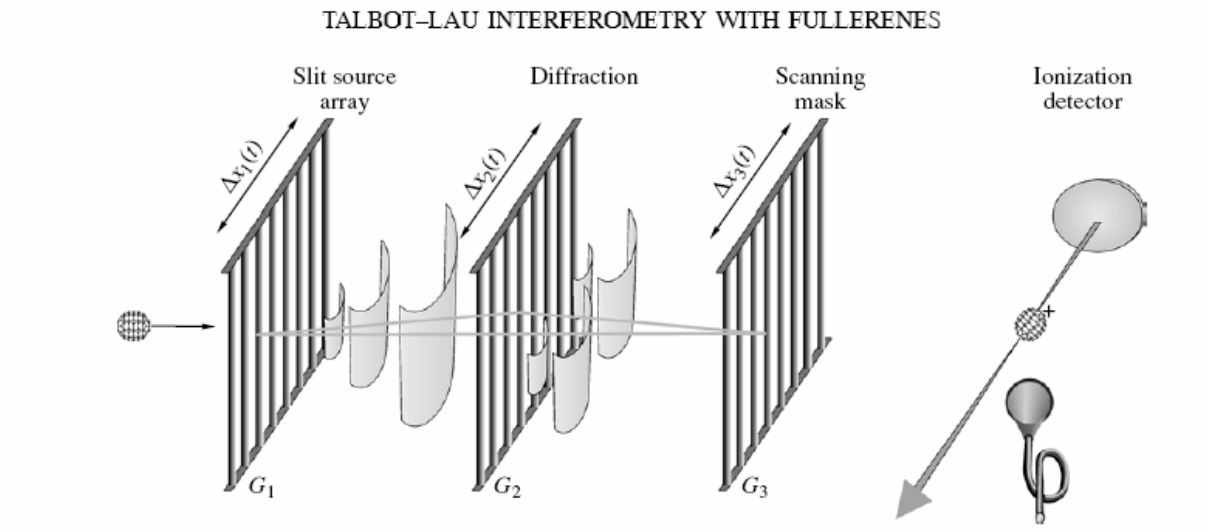
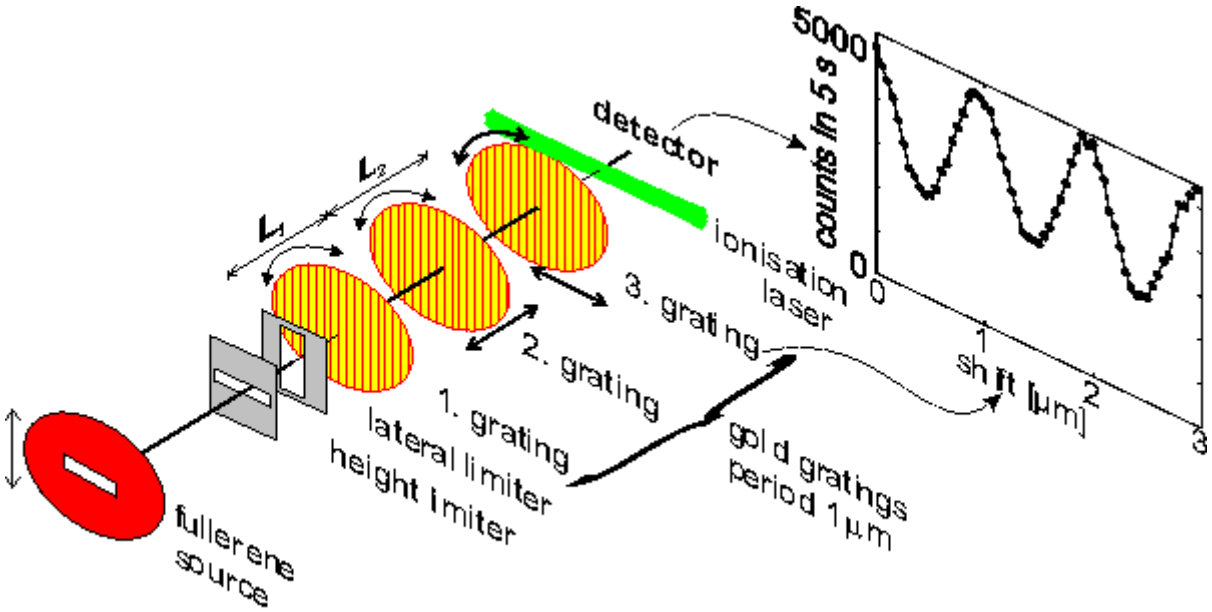


Fig. 1. Interferometer for large molecules. Three gratings of equal period are separated by approximately the Talbot length. The first grating G_1 acts as an incoherent array of slit sources. Each of them illuminates the second grating with a transverse coherence of a few slit distances. Interference then leads to a self-image of the grating G_2 at the position of G_3. The molecular interferogram is scanned by the third grating. Transmitted molecules are ionized and counted. Inertial forces due to the rotation of the earth, the gravitational acceleration, and acoustic vibrations of the apparatus may lead to a lateral displacement of the interference pattern that depends on the molecular velocity.

On part de 3 réseaux identiques de pas d de l'ordre du micron, régulièrement espacés (distance D entre 20 et 40 cm). Le premier réseau prépare la cohérence transverse du jet. Le deuxième réseau est responsable de la diffraction. Le troisième réseau est utilisé pour sonder le profil diffracté, dont on s'attend à ce qu'il présente une modulation de période d. Cette modulation liée au caractère ondulatoire du mouvement atomique se superpose à la modulation attendue en prenant simplement des trajectoires classiques rectilignes. On peut montrer que l'effet ondulatoire est important si $\lambda D \sim d^2$.



L'enjeu de ces expériences est d'étudier s'il existe une éventuelle limite au champ d'application de la mécanique quantique. Dans le cadre de la physique quantique, le phénomène d'interférence en tant que tel reste le même quand on passe d'un électron à une grosse molécule. C'est le degré de liberté du centre de masse de l'objet qui est en jeu et tous les degrés de liberté interne de la molécule (vibration, rotation, spin) sont *a priori* spectateurs. En pratique, ces expériences sont rendues difficiles par le fait que ces degrés de liberté

peuvent se coupler à l'environnement lors du temps de vol de la molécule dans le dispositif expérimental. Par exemple, la molécule peut émettre spontanément un photon correspondant à une information sur le chemin suivi, ce qui doit en toute logique diminuer le contraste des interférences observées.

2. Fonctions d'onde macroscopiques

2.1 Condensation de Bose-Einstein

Considérons une assemblée de N particules bosoniques indépendantes, c'est-à-dire sans interaction. A basse température, une fraction macroscopique de l'assemblée s'accumule dans le même état quantique $|\psi_0\rangle$, qui est l'état fondamental du Hamiltonien à une particule. Pour des particules confinées dans une boîte de volume L^3, le seuil de condensation se produit quand la longueur d'onde thermique $\lambda_T = \frac{\hbar}{\sqrt{2\pi m k_B T}}$ devient de l'ordre de la distance entre particules $d = n^{-\frac{1}{3}}$, où $n = \frac{N}{L^3}$ est la densité spatiale (plus précisément, il faut que $n\lambda_T^3 > \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \simeq 2,612$).

Dans les expériences sur le gaz dilués, les particules sont en général confinées dans un potentiel harmonique. En supposant ce potentiel isotrope et en notant sa pulsation ω, la fonction d'onde de l'état fondamental est la gaussienne $\psi_0(\vec{r}) \propto \exp\left(-\frac{r^2}{2a_0^2}\right)$, de largeur $a_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$. Le seuil de condensation correspond alors à $N > 1,202\left(\frac{k_B T}{\hbar\omega}\right)^3$.

La fraction accumulée dans l'état fondamental est appelée **condensat de Bose-Einstein**, et l'état $\psi_0(\vec{r})$ est appelée **fonction d'onde macroscopique du condensat**. Plaçons-nous à température nulle pour simplifier. Dans ce cas, toutes les particules sont condensées et la fonction d'onde de l'assemblée à N particules s'écrit :

$$\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \cdots, \vec{r}_N) = \psi_0(\vec{r}_1)\psi_0(\vec{r}_2)\cdots\psi_0(\vec{r}_N) \quad (1.3)$$

Si les particules interagissent entre elles (ce qui est en général le cas dans des expériences), la théorie de la condensation de Bose-Einstein n'est plus exacte. On décrit souvent l'interaction entre deux particules i et j par un potentiel de contact (potentiel de Fermi), noté :

$$V(\vec{r}_i - \vec{r}_j) = \frac{4\pi\hbar^2 a^2}{m}\delta(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$$

La quantité a est homogène à une longueur et est appelée **longueur de diffusion** ; elle caractérise la force du potentiel. On peut alors distinguer deux régimes limites : le cas des interactions faibles, correspondant à $na^3 << 1$, et le cas des interactions fortes $(na^3 \geq 1)$. Dans le cas des interactions faibles, on peut montrer que la description de l'assemblée à N particules en terme de fonction d'onde à N particules du type (1.3) reste valable. Ce cas est celui que l'on rencontre dans les expériences de condensation des gaz atomiques dilués (alcalins, hydrogène, hélium métastable, etc.).

Pour les systèmes denses, comme l'hélium liquide superfluide, les interactions sont importantes et le critère $na^3 << 1$ n'est plus satisfait. On continue néanmoins à décrire le système en terme de fonction d'onde macroscopique $\psi_0(\vec{r})$, mais cette fonction d'onde ne représente plus l'état de chacun des N atomes constituant le système. Il s'agit d'une quantité plus abstraite, qui joue le rôle de **paramètre d'ordre** pour la transition de phase en jeu (la transition superfluide par exemple). Cette fonction d'onde macroscopique peut néanmoins être utilisée pour décrire les propriétés macroscopiques du système, lors d'un écoulement ou d'une mise en rotation par exemple.

Nous allons maintenant voir comment cette description du système en terme de fonction d'onde macroscopique donne naissance à des phénomènes de cohérence remarquables dans une expérience de type d'Young. Pour cela il nous faut d'abord regarder comment les atomes d'un condensat sont confinés dans un piège magnétique et comment on peut extraire des atomes de ce piège.

2.2 Piège magnétique et coupleur radio-fréquence

Pour des atomes alcalins, comme le sodium, le rubidium,…, le dipôle magnétique $\vec{\mu}$ de l'atome dans son état fondamental est de l'ordre du magnéton de Bohr, $\mu_B = 9,27\times10^{-24}$ J.T^{-1} (D'autres atomes, comme l'hélium, ont un moment magnétique beaucoup plus faible dans leur état fondamental, de l'ordre du magnéton nucléaire μ_n). L'interaction de ces atomes avec un champ magnétique inhomogène s'écrit :

$$V(r) = -\vec{\mu}.\vec{B}(\vec{r})$$

Le piégeage magnétique consiste à aligner au départ $\vec{\mu}$ et $\vec{B}(\vec{r})$ et à supposé que le moment magnétique garde ensuite son orientation vis-à-vis du champ magnétique local lorsque l'atome bouge. On a donc $V(r) = \pm\mu B(\vec{r})$, où le signe $\pm$ dépend de l'orientation choisie au départ. Si le signe + est réalisé, les atomes vont s'accumuler au voisinage d'un minimum local du champ magnétique. Si le signe – est réalisé, les atomes sont attirés vers les zones de grand champ magnétique.

On peut montrer sans grande difficulté qu'il est impossible de réaliser dans le vide une configuration de champ magnétique statique telle que B admette un maximum local. Un atome préparé dans un état où $\vec{\mu}$ est de même sens que $\vec{B}$ (pour lequel $V(r) = -\mu B(\vec{r})$) sera donc attiré vers les fils ou les aimants permanents créant le champ et ne pourra pas être confiné de manière stable.

En revanche, il est possible de réaliser un minimum local de $B(\vec{r})$. Supposons que le module du champ magnétique s'écrive au voisinage de 0 : $\left|\vec{B}(\vec{r})\right| = B_0 + \kappa r^2$. Le potentiel magnétique de piégeage sera harmonique et isotrope : $V(r) = V_0 + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$. Du fait de la gravité, les atomes seront piégés légèrement en dessous de O, en un point O' d'altitude $z_0 = -\frac{g}{\omega^2}$ (figure 1.4a). Expérimentalement, on a $\frac{\omega}{2\pi} \sim 100\text{Hz}$, soit $z_0 \sim 30\mu\text{m}$. L'extension r_0 du condensat dans la fonction d'onde ψ_0 est de quelques microns ; comme $r_0 << z_0$, on peut considérer que les atomes voient un champ magnétique qui varie linéairement avec leur altitude sur toute l'extension du condensat.

Pour extraire les atomes de manière cohérente du piège magnétique, un moyen particulièrement commode consiste à utiliser une onde radio, qui peut faire basculer les spins

des atomes quand ils se trouvent à une distance donnée du centre (Ce moyen est également utilisé pour mettre en œuvre le refroidissement par évaporation, qui permet d'atteindre la condensation) (figure 1.4b). Notons ν la fréquence de l'onde radio-fréquence et considérons par exemple des atomes de moment cinétique $J=1$. Ces atomes sont initialement préparés dans l'état $m=1$, correspondant à $-\vec{\mu}.\vec{B}(\vec{r})=+|\vec{\mu}||\vec{B}(\vec{r})|$. Les atomes entreront en résonance avec l'onde quand ils croiseront la surface $|\vec{B}(\vec{r})|=\frac{h\nu}{\mu}$. Ils basculeront alors vers l'état $m=0$, dans lequel ils ne sont plus sensibles au champ magnétique et tombent simplement sous l'influence de la gravité. La surface où la bascule se produit est une sphère centrée en O, qui correspond approximativement à une portion de plan horizontal sur l'extension du condensat. On peut donc extraire des atomes sélectivement à l'intérieur du condensat, en les faisant sortir à une altitude donnée.

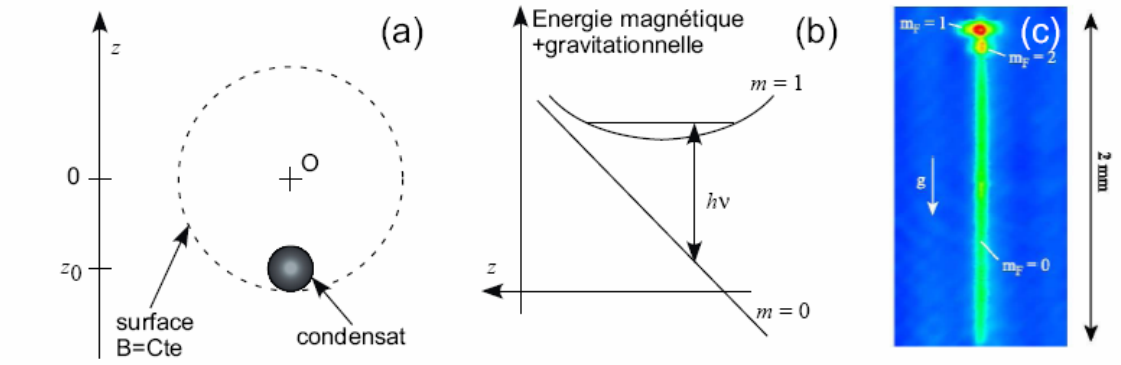


FIG. 1.4: a : Déplacement du centre du condensat dû à la gravitation. (b) Extraction des atomes du condensat en utilisant une onde radio-fréquence. (c) « Laser à atomes » extrait du condensat (figure tirée de l'article d'I. Bloch, T.W. Hänsch, et T. Esslinger, Phys. Rev. Lett. **82**, 3008 (1999)).

On choisit l'intensité de l'onde radio-fréquence suffisamment faible, pour que la probabilité d'extraction d'un atome traversant cette surface soit petite devant 1. De la sorte, le processus d'extraction est une petite perturbation et il faut attendre une durée de l'ordre de la seconde pour vider complètement le condensat. On peut prendre une photo du filet d'atomes en train de s'écouler sous le condensat (figure 1.4c). Le faisceau atomique ainsi généré est *a priori* cohérent, tout comme le faisceau laser constituer de photons s'échappant d'une cavité électromagnétique à travers un miroir partiellement réfléchissant.

2.3 Interférences entre deux ondes macroscopiques

La cohérence du faisceau atomique ainsi généré a été démontrée de façon spectaculaire par le groupe de Münich. En envoyant deux ondes radio-fréquence de fréquences $\nu_1=\frac{\omega_1}{2\pi}$ et $\nu_2=\frac{\omega_2}{2\pi}$, extrayant donc les atomes à deux altitudes différentes z_1 et z_2, les chercheurs de ce groupe ont mesuré l'interférence entre les deux filets d'atomes extraits de ces deux plans. Les énergies de ces deux filets d'atomes sont $E_i=E_{cond}-\hbar\omega_i=Mgz_i$. La fonction d'onde de l'atome dans l'état $m=0$, qui tombe dans le potentiel de gravitation depuis son altitude z_i est solution de l'équation de Schrödinger :

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\frac{d^2\psi}{dz^2}+Mgz\psi(z)=Mgz_i\psi(z)$$

On introduit l'échelle de longueur $l=\sqrt{\frac{\hbar^2}{2M^2g}}$ et on pose $Z=\frac{(z-z_i)}{l}$. L'équation de Schrödinger s'écrit :

$$\psi''(Z)=Z\psi(Z)$$

Dont la solution tendant vers 0 en $z=+\infty$ est une fonction d'Airy $Ai(Z)$. En utilisant le développement asymptotique de cette fonction quand $|Z|$ est grand :

$$Ai(Z)\propto\frac{1}{|Z|^{\frac{1}{4}}}\exp\left(\frac{2i}{3}|Z|^{\frac{3}{2}}\right)$$

On trouve que la distribution d'atomes en train de tomber est :

$$n(z)=\left|\frac{Ai(z-z_1)}{l}e^{-\frac{i}{\hbar}E_1t}+\frac{Ai(z-z_2)}{l}e^{-\frac{i}{\hbar}E_2t}\right|^2\propto\frac{1}{\sqrt{|z|}}\left\{2+2\cos\left[q\left(\sqrt{|z|}-\sqrt{\frac{gt^2}{2}}\right)\right]\right\}$$

avec $q=\frac{M(z_1-z_2)\sqrt{2g}}{\hbar}$. On pourra vérifier que cette prédiction reproduit la forme de la distribution observée expérimentalement (figure 1.5a)

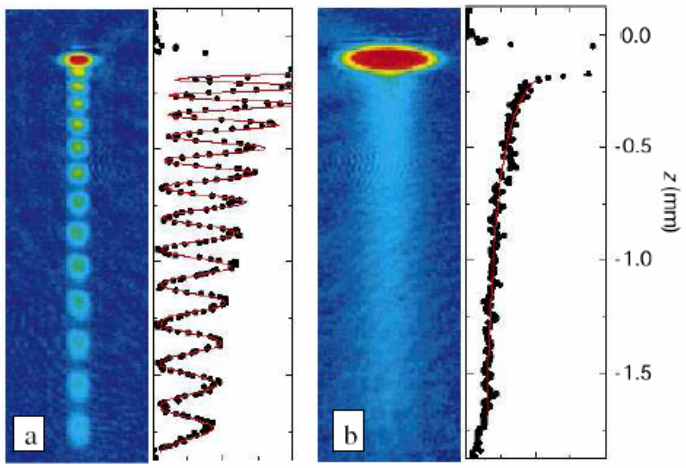


FIG. 1.5: Interférences entre deux ondes de matière issues d'une assemblée d'atomes confinée dans un piège magnétique (a) : condensat de Bose-Einstein ; (b) température plus élevée, au dessus du seuil de condensation. Images extraites de I. Bloch, T. W. Hänsch and T. Esslinger, Nature **403**, 166 (2000).

En particulier, le contraste élevé des franges d'interférences (voisin de 100%) est une signature de la validité de la description de cette assemblée d'atomes sous forme d'une fonction d'onde macroscopique (1.3)

3. Le brouillage de la cohérence dans une expérience d'Young

3.1 Information sur le chemin suivi dans un interféromètre

Considérons l'expérience de pensée représentée sur la figure 1.6. On réalise l'expérience des fentes d'Young avec des atomes initialement dans un état interne excité $|e\rangle$. Une cavité électromagnétique résonnante avec les atomes est placée derrière chacun des trous d'Young. Chaque cavité est initialement vide, c'est-à-dire qu'elle ne contient aucun photon. Notons cet état $|0_a\rangle$ ou $|0_b\rangle$, c'est-à-dire 0 photon dans la cavité. L'atome en passant dans la cavité peut y laisser un photon et tomber dans son état fondamental $|f\rangle$:

Trou A : $|e,0_a,0_b\rangle \rightarrow |f,1_a,0_b\rangle$ Trou B : $|e,0_a,0_b\rangle \rightarrow |f,0_a,1_b\rangle$ (1.4)

L'état $|1_a\rangle$ représente la cavité A avec 1 photon à l'intérieur (et de même pour B). On note pour simplifier $|n_a,n_b\rangle$ l'état produit tensoriel $|n_a\rangle \otimes |n_b\rangle$.

Tout ce qu'il est nécessaire de savoir pour le moment est l'orthogonalité des états $|0_a\rangle$ et $|1_a\rangle$:

$$\langle 0_a|0_a\rangle = 1 \qquad \langle 1_a|1_a\rangle = 1 \qquad \langle 0_a|1_b\rangle = 0 \qquad (1.5)$$

Et idem pour $|0_b\rangle$ et $|1_b\rangle$.

En l'absence de couplage entre l'atome et les cavités électromagnétiques, l'état d'un atome après le passage par les deux trous d'Young s'écrit :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_a(\vec{r}) + \psi_b(\vec{r})\right)|e\rangle \quad (1.6)$$

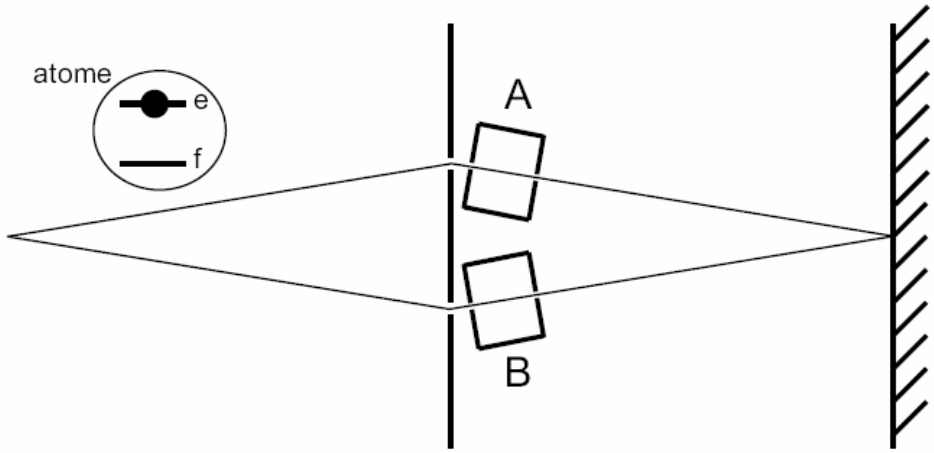


FIG. 1.6: Expérience des trous d'Young, dans laquelle on essaie de détecter le chemin suivi par l'atome, en regardant le photon qu'il laisse dans une des deux cavités électromagnétiques résonantes situés derrière les trous.

Et la densité de probabilité pour détecter l'atome en un point $\vec{r}$ de l'écran vaut :

$$P(r) = \frac{1}{2}\left(|\psi_a|^2 + |\psi_b|^2 + \psi_a^*\psi_b + \psi_a\psi_b^*\right)\langle e|e\rangle \quad (1.7)$$

C'est la fonction d'interférence habituelle, avec une modulation de période x_i provenant du terme $\psi_a^*\psi_b + \psi_a\psi_b^*$.

Supposons maintenant les deux cavités mises en place et résonnantes avec les atomes. Après passage de l'atome par les deux trous d'Young et les cavités, l'état du système atome+champ s'écrit :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_a(\vec{r})|1_a,0_b\rangle + \psi_b(\vec{r})|0_a,1_b\rangle\right)|f\rangle \quad (1.8)$$

Notons qu'on néglige ici la modification de l'état externe de l'atome $\left(\psi_{a,b}\left(\vec{r}\right)\right)$ lors de l'émission du photon. En toute rigueur, il faudrait prendre en compte le recul de l'atome, c'est-à-dire le changement de l'impulsion atomique par une quantité $\hbar\vec{k}$, ce qui se traduirait par une multiplication de $\psi_{a,b}\left(\vec{r}\right)$ par e^{ikr}.

La probabilité de trouver l'atome en un point $\vec{r}$ est désormais :

$$P\left(\vec{r}\right)=\frac{1}{2}\left\{\begin{array}{l}\left|\psi_a\right|^2\left\langle 1_a,0_b\middle|1_a,0_b\right\rangle+\left|\psi_b\right|^2\left\langle 0_a,1_b\middle|0_a,1_b\right\rangle\\+\psi_a^*\psi_b\left\langle 1_a,0_b\middle|0_a,1_b\right\rangle+\psi_a\psi_b^*\left\langle 0_a,1_b\middle|1_a,0_b\right\rangle\end{array}\right\}\left\langle f\middle|f\right\rangle \quad (1.9)$$

A cause de l'orthogonalité des états $\left|0_a\right\rangle$ et $\left|1_a\right\rangle$ (et $\left|0_b\right\rangle$ et $\left|1_b\right\rangle$), le terme d'interférence disparaît et la probabilité de détection :

$$P\left(\vec{r}\right)=\frac{1}{2}\left(\left|\psi_a\right|^2+\left|\psi_b\right|^2\right)\left\langle f\middle|f\right\rangle \quad (1.10)$$

Ne présente aucune modulation à l'échelle de x_i.

La leçon à retenir ici est simple : on a écrit le chemin suivi par l'atome sur un détecteur, en l'occurrence les cavités et le signal d'interférence disparaît. Cette disparition du signal d'interférence n'est pas un brouillage de la fonction d'onde atomique, comme le ferait par exemple une phase aléatoire qui viendrait se mettre devant ψ_b. Le signal disparaît parce que l'état de l'atome s'est **intriqué** avec l'état de l'environnement, en l'occurrence les cavités. Comme le signal final ne porte que sur l'atome (la fonction $P\left(\vec{r}\right)$), l'orthogonalité des états de l'environnement détruit toute interférence.

3.2 Gomme quantique ou décohérence

Quand l'information sur le chemin suivi est stockée de manière aussi précise que celle discutée ci-dessus, on peut chercher à l'effacer pour faire réapparaître un signal d'interférence. Cette interférence se manifeste alors sur une fonction de corrélation entre l'atome et les cavités, ce qui révèle la cohérence quantique (c'est-à-dire l'intrication) qui s'est établie entre les différents systèmes. En revanche, bien souvent, l'état de l'environnement est extrêmement complexe à déterminer : ce sera le cas si l'expérience est faite dans un vide imparfait et que les collisions sur le gaz jouent un rôle important, ou encore si la température est assez élevée pour que le rayonnement du corps noir ne puisse être négligé. L'intrication du petit système avec l'environnement est alors un processus véritablement irréversible et la cohérence qu'on avait entre les deux points sources de l'expérience d'Young se dilue dans l'environnement.

3.3 Le désordre lié à la température

La cohérence quantique peut également disparaître pour un système isolé si celui-ci comporte un grand nombre de degrés de liberté et qu'on augmente sa température. Un exemple est représenté sur la figure 1.5b où on regarde la superposition de deux filets d'atomes extraits d'un gaz piégé quand la température du gaz est au dessus de la température de condensation. La figure d'interférence qu'on observait à basse température ne se produit plus. Le profil observé est la superposition incohérente des deus jets d'atomes, du moins dès que la distance entre les deux altitudes z_1 et z_2 dépasse la longueur d'onde thermique λ_T qui est de l'ordre de $0{,}1\mu\text{m}$ pour ces paramètres expérimentaux.

• *EXERCICE DE COMPREHENSION*

Décohérence dans un interféromètre atomique

Le but de ce problème est d'étudier la perte de cohérence dans un interféromètre atomique lorsqu'un processus d'émission spontanée peut se produire lors du parcours des atomes.

L'interféromètre considéré est un dispositif de Bragg à trois réseaux identiques de pas l, représenté sur la figure 1.

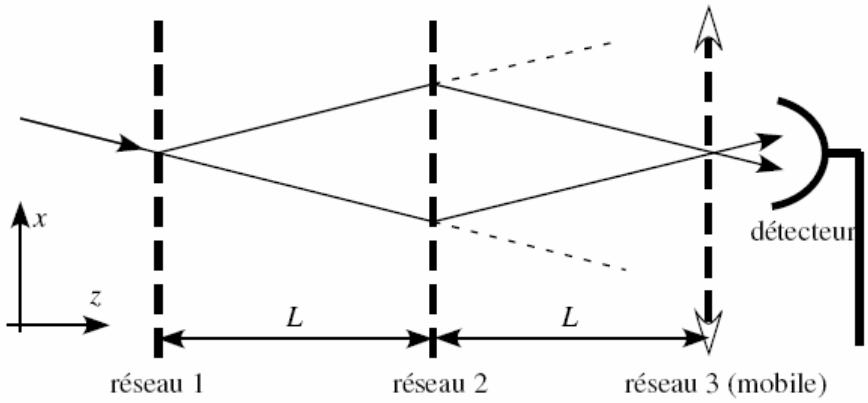


FIG. 1 – *Interféromètre à trois réseaux*

Pour simplifier, on ne traite quantiquement que le degré de liberté selon l'axe transverse x. Le mouvement longitudinal (selon l'axe z) est décrit par la mécanique classique et on prend simplement $z = vt$. La traversée du premier réseau se fait à l'instant $t = 0$, celle du deuxième réseau à l'instant $T = \frac{l}{v}$ et celle du troisième réseau à l'instant $2T$.

On rappelle :

- *la relation de fermeture* $\int |p\rangle\langle p| dp = 1$
- *l'élément de matrice* $\langle x|p\rangle = \exp\left(\frac{i}{\hbar} px\right)$
- *les relations* $e^{ik_0\hat{x}}|p\rangle = |p + \hbar k_0\rangle$ et $e^{\frac{i}{\hbar}\hat{p}x_0}|x\rangle = |x - x_0\rangle$

Où $\hat{x}$ et $\hat{p}$ *sont les opérateurs position et impulsion de la particule le long de l'axe* x.

1. Interférences en l'absence de décohérence

On note $|\psi_0\rangle$ le vecteur d'état d'un atome incident sur le premier réseau, correspondant à la fonction d'onde $\psi_0(x) = \langle x|\psi_0\rangle$. On modélise la propagation dans l'interféromètre de la manière suivante :

- Lors de la traversée du premier réseau, le vecteur d'état est multiplié par l'opérateur $1 + e^{ik_0\hat{x}}$ avec $k_0 = \frac{2\pi}{l}$. On ne cherchera pas à normer le résultat obtenu par action de cet opérateur.

- Lors de la propagation libre entre deux réseaux, le vecteur d'état est multiplié par l'opérateur $e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{\hat{p}^2}{2m}T}$ où $\hat{p}$ est l'opérateur impulsion le long de l'axe x.

1.1. Justifier brièvement ces deux termes de propagation.

1.2. Ecrire la fonction d'onde $\psi_1(x)$ juste après la traversée du premier réseau $(t=0_+)$ en fonction de $\psi_0(x)$, x et k_0.

1.3. Calculer la fonction d'onde $\psi_2(x)$ juste avant la traversée du deuxième réseau $(t=T_-)$. Pour simplifier les notations, on posera

$$\psi_0^{'}(x)=\int e^{\frac{i}{\hbar}px}e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{p^2}{2m}T}\langle p|\psi_0\rangle dp$$

Qui correspond à l'évolution libre entre 0 et T de la fonction d'onde initialement égale à $\psi_0(x)$. On mettra le résultat sous la forme :

$$\psi_2(x)=\psi_0^{'}(x)+e^{i(k_0x-\omega_0T)}\psi_0^{'}(x-x_0)$$

Avec $\omega_0=\frac{\hbar k_0^2}{2m}$ et $x_0=\frac{\hbar k_0}{m}T$. Interpréter les deux termes apparaissant dans cette expression.

1.4. Ecrire la fonction d'onde $\psi_3(x)$ juste après la traversée du deuxième réseau. On ne gardera que les termes correspondant aux trajectoires en trait plein de la figure 1. On montrera que le résultat peut se mettre sous la forme :

$$|\psi_3\rangle=\left(e^{ik_0\hat{x}}+e^{i\omega_0T}e^{-\frac{i}{\hbar}x_0\hat{p}}\right)|\psi_0^{'}\rangle \quad (1)$$

1.5. Calculer la fonction d'onde incidente $\psi_4(x)$ sur le troisième réseau. On posera

$$\psi_0^{''}(x)=\int e^{\frac{i}{\hbar}px}e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{p^2}{2m}T}\langle p|\psi_0^{'}\rangle dp$$

Et on mettra le résultat sous la forme :

$$\psi_4(x)=\left[1+e^{ik_0x}\right]e^{-i\omega_0T}\psi_0^{''}(x-x_0)$$

1.6. Expliquer sans calculs pourquoi on détecte un signal modulé quand on translate le troisième réseau selon l'axe x. Quel est le contraste attendu pour le signal d'interférence, dans le cas où l'ouverture du réseau (rapport entre la largeur des fentes et le pas l) est petite devant 1 ?

2. Modèle de décohérence

Dans cette partie, on décrit la décohérence d'un atome liée à la diffusion de photons par l'équation pilote suivante :

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt}=-\gamma\hat{\rho}+\frac{\gamma}{2k_1}\int_{-k_1}^{k_1}e^{ik\hat{x}}\hat{\rho}e^{-ik\hat{x}}dk \quad (2)$$

Où $\hat{\rho}$ est l'opérateur densité de l'atome, γ est le taux de diffusion de photons et où $\hbar k_1$ est l'impulsion maximale transférée lors d'un processus de diffusion.

2.1. Montrer que cette équation conserve bien la trace de $\hat{\rho}$.

2.2. Comment évolue la distribution d'impulsion $\Pi(p)=\langle p|\hat{\rho}|p\rangle$ de l'atome ?

2.3. Dans le cas où $\hbar k$ est beaucoup plus petit que l'échelle caractéristique de variation de $\Pi(p)$, montrer qu'on se ramène à une équation de diffusion dont on donnera le coefficient caractéristique en fonction de γ et k_1.

2.4. Evaluer à partir de (2) l'évolution des éléments de matrice de l'opérateur densité en point de vue position : $\left\langle \frac{x+u}{2} \middle| \hat{\rho} \middle| \frac{x-u}{2} \right\rangle$.

2.5. On considère un temps $t \sim \gamma^{-1}$ correspondant à la diffusion d'un photon. Quelle est la valeur maximale $u_{\max}$ de u au-delà de laquelle la cohérence spatiale est appréciablement réduite ?

2.6. Comparer la valeur de $u_{\max}$ à la longueur d'onde $\lambda_1 = \frac{2\pi}{k_1}$ des photons diffusés. Interpréter physiquement le résultat obtenu.

3. Traitement explicite de la décohérence

On suppose qu'on éclaire l'interféromètre de la figure 1 avec un faisceau laser passant juste derrière le réseau 2 et se propageant selon l'axe x. On s'intéresse au cas où un photon de ce faisceau laser (impulsion $\hbar k_1 \vec{u}_x$) est absorbé et un photon de fluorescence (impulsion $\hbar \vec{k}_2$ avec $\left|\vec{k}_2\right| = k_1$) est émis. Lors de ce processus de diffusion, la variation d'impulsion de l'atome le long de l'axe x, $\hbar k = \hbar k_1 - \hbar \vec{k}_2 . \vec{u}_x$ est donc comprise entre 0 et $2\hbar k_1$. Juste avant le processus de diffusion, l'état de l'atome est donné par $\left|\psi_3\right\rangle$ (*cf.* équation 1).

3.1. En reprenant la démarche de la première partie, justifier sans calcul que le vecteur d'état $\left|\Psi\right\rangle$ du système « atome+champ » s'écrit à l'instant $2T$ (c'est-à-dire juste avant la traversée du troisième réseau) :

$$\left|\Psi\right\rangle = \sum_k \left|\psi_4^{(k)}\right\rangle \otimes \left|(N-1)k_1, k_{2x} = k_1 - k\right\rangle \quad (3)$$

Où l'état du champ $\left|(N-1)k_1, k_{2x} = k_1 - k\right\rangle$ représente un état où un photon laser a disparu et un photon de fluorescence d'impulsion $\hbar k_2 = \hbar k_1 - \hbar k$ le long de l'axe x est apparu. On exprimera $\left|\psi_4^{(k)}\right\rangle$ en fonction de $\left|\psi_3\right\rangle$ et des opérateurs $e^{ik\hat{x}}$ et $e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{p^2}{2m}T}$. On supposera que tous les états du champ intervenant dans (3) ont la même énergie.

3.2. Pour limiter les calculs, on ne cherchera pas à calculer $\psi_4^{(k)}(x)$ et on admettra le résultat suivant, valable à une phase globale près :

$$\psi_4^{(k)}(x) = \left[1 + e^{i(k_0 x - k x_0)}\right] e^{ikx} \psi_0^{''}\left(x - x_0 - \frac{\hbar k}{m} T\right)$$

Interpréter physiquement les différents termes de ce résultat.

3.3. On ne détecte pas le photon $\vec{k}_2$ et on prend donc une trace partielle sur son état, pour évaluer l'opérateur densité atomique. De plus, on remplace les sommes sur k comme celle de (3) par une intégrale :

$$\sum_k F(k) \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2k_1} \int_0^{2k_1} F(k)\, dk$$

Et on néglige pour simplifier la variation de ψ_0'' avec x à l'échelle de $\frac{\hbar k_1}{m}T$. Montrer que la densité atomique dans le plan du troisième réseau est modulée avec une période l.

3.4. Montrer qu'il y a des valeurs du rapport $\frac{x_0}{\lambda_1}$ pour lesquelles les interférences disparaissent complètement.

3.5. Comparer au résultat expérimental obtenu par M.S. Chapman *et al.*, Phys. Rev. Lett. **75**, 3783 (1995), reporté sur la figure 2.

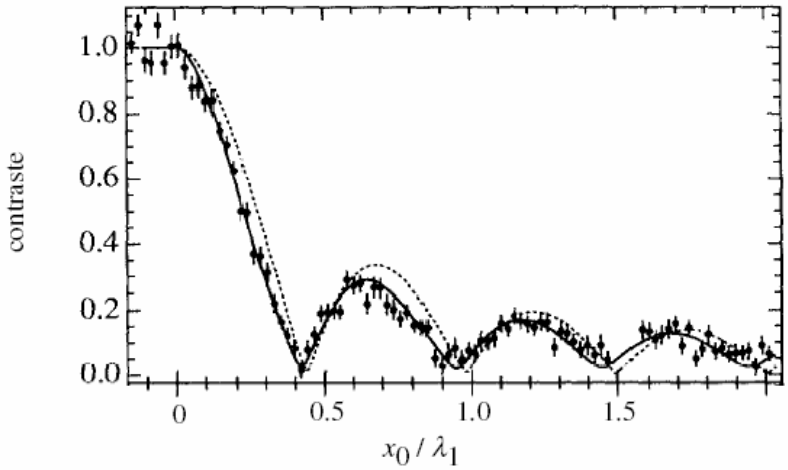


FIG. 2 – *Contraste des interférences mesurées dans un interféromètre à 3 réseaux, quand un photon laser est diffusé juste derrière le réseau 2.*

3.6. Comparer le résultat obtenu dans cette partie à la prédiction du modèle de la partie 2. Quel modèle fournit la description la plus précise du problème ?

3.7. Comment pourrait-on faire réapparaître les interférences avec un bon contraste ?