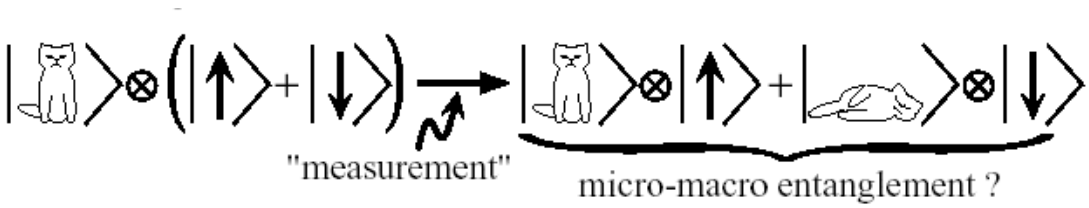
ETATS « CHAT DE SCHRÖDINGER »

Référence bibliographique : Bernard Yurke et David Stoler, Phys. Rev. Lett. **57**, 13 (1986).

D'après le principe de superposition, si les vecteurs $|\Phi_a\rangle$ et $|\Phi_b\rangle$ sont deux états possibles pour un système quantique, la superposition quantique $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\Phi_a\rangle+|\Phi_b\rangle\right)$ est également un état possible pour ce système. Ce principe est essentiel pour rendre compte des phénomènes d'interférence.

Appliqué à de « gros objet », ce principe conduit à des situations paradoxales pour lesquelles un système donné peut se trouver dans une superposition de deux états antinomiques. Le plus célèbre des paradoxes de ce type est celui du « chat de Schrödinger », superposition quantique d'un « état vivant » et d'un « état mort ».



Le but de ce problème est de montrer que de telles superpositions d'états macroscopiques ne sont pas détectables en pratique : elles sont en effet extrêmement fragiles et un couplage très faible du système avec l'environnement suffit à détruire la superposition quantiques des deux états $|\Phi_a\rangle$ et $|\Phi_b\rangle$.

On considère dans ce problème un oscillateur harmonique à une dimension, de masse m et de pulsation ω. Le Hamiltonien s'écrit :

$$\hat{H}=\frac{\hat{P}^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2\hat{X}^2$$

On note $|n\rangle$ la base propre de $\hat{H}$, la valeur propre associée à $|n\rangle$ étant $E_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega$.

1. Préliminaires

On introduit les observables réduites $\hat{\tilde{X}}=\hat{X}\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$ et $\hat{\tilde{P}}=\frac{\hat{P}}{\sqrt{m\hbar\omega}}$ et les opérateurs

$$\hat{a}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{\tilde{X}}+i\hat{\tilde{P}}\right)\qquad \hat{a}^\dagger=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{\tilde{X}}+i\hat{\tilde{P}}\right)\qquad \hat{N}=\hat{a}^\dagger\hat{a}$$

On rappelle les commutateurs : $\left[\hat{\tilde{X}},\hat{\tilde{P}}\right]=i,\left[\hat{a},\hat{a}^\dagger\right]=1$ et les relations : $H=\hbar\omega\left(N+\frac{1}{2}\right)$ et $N|n\rangle=n|n\rangle$.

1.1. Justifier qu'en travaillant avec des fonctions des variables sans dimension $\hat{\tilde{X}}$ et $\hat{\tilde{P}}$ on a :

$$\hat{\tilde{P}}=-i\frac{\partial}{\partial\hat{\tilde{X}}}\ \text{ et }\ \hat{\tilde{X}}=i\frac{\partial}{\partial\hat{\tilde{P}}}$$

1.2. Evaluer le commutateur $\left[\hat{N},\hat{a}\right]$. En déduire que : $\hat{a}\left|n\right\rangle=\sqrt{n}\left|n-1\right\rangle$ (1)
à un facteur de phase près que l'on oubliera par la suite.

1.3. En utilisant (1) pour $n=0$ et en remplaçant $\hat{a}$ par son expression en termes de $\hat{\tilde{X}}$ et $\hat{\tilde{P}}$, en déduire la fonction d'onde de l'état fondamental $\Psi_0\left(\tilde{X}\right)$ ainsi que sa transformée de Fourier $\Phi_0\left(\tilde{P}\right)$. On ne cherchera pas à normer le résultat obtenu.

2. Les états "quasi-classiques" (ou "cohérents")

On étudie maintenant les propriétés des états propres de l'opérateur $\hat{a}$, appelés "**états quasi-classiques"** ou **"cohérents".**

2.1. Soit α un nombre complexe quelconque. Montrer que l'état suivant

$$\left|\alpha\right\rangle=e^{-|\alpha|^2}\sum_n\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\left|n\right\rangle \qquad (2)$$

est état propre de $\hat{a}$ pour la valeur propre α : $\hat{a}\left|\alpha\right\rangle=\alpha\left|\alpha\right\rangle$.

2.2. Calculer la valeur moyenne de l'énergie dans un état quasi-classique $\left|\alpha\right\rangle$. Calculer également les valeurs moyennes $\left\langle x\right\rangle$ et $\left\langle p\right\rangle$ et les écarts-type Δx et Δp pour cet état. Montrer que $\Delta x\Delta p=\frac{\hbar}{2}$.

2.3. D'une manière analogue à celle suivie à la question **1.3.** déterminer la fonction d'onde $\Psi_\alpha\left(\tilde{X}\right)$ de l'état quasi-classique $\left|\alpha\right\rangle$, ainsi que sa transformée de Fourier $\Phi_\alpha\left(\tilde{P}\right)$. On ne cherchera pas à normaliser le résultat obtenu.

2.4. On suppose qu'à l'instant initial $t=0$, l'oscillateur est dans un état quasi-classique $\left|\alpha_0\right\rangle$ avec $\alpha_0=\rho e^{i\phi}$ (où ρ est un nombre réel positif).

(a) Montrer qu'à tout instant ultérieur t, l'oscillateur est dans un état quasi-classique que l'on peut écrire $e^{-\frac{i\omega t}{2}}\left|\alpha(t)\right\rangle$. Déterminer $\alpha(t)$ en fonction de ρ,ϕ,ω et t.

(b) Evaluer . En rapprochant ce résultat de celui de la question **2.2.** et pour $|\alpha|>>1$, justifier brièvement l'appellation d'état quasi-classique.

2.5. Application numérique :

On considère un pendule simple de longueur 1 mètre et de masse 1 gramme. On suppose que l'état de ce pendule peut se décrire par un état quasi-classique. Ce pendule est écarté de sa position initiale et il est lâché avec une vitesse moyenne nulle.

(a) Quelle est la valeur de $\alpha(0)$ correspondante ?

(b) Quelle est l'incertitude relative en position $\frac{\Delta x}{x_0}$?

c) Quelle est la valeur de $\alpha(t)$ après $\frac{1}{4}$ de période d'oscillation ?

3. Fabrication d'un chat de Schrödinger

Pendant l'intervalle de temps $[0,T]$, on ajoute au potentiel harmonique le potentiel

$$\hat{W}=\hbar g\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}\right)^2$$

On suppose que g est très grand devant ω et que $\omega T << 1$. On peut donc prendre simplement $\hat{W}$ comme Hamiltonien du système pendant l'intervalle $[0,T]$. A l'instant initial $t=0$, le système est dans un état quasi-classique $|\Psi(0)\rangle = |\alpha\rangle$.

3.1. Montrer que les états $|n\rangle$ sont états propres de $\hat{W}$. En déduire le développement sur la base $\{|n\rangle\}$ de l'état $|\Psi(T)\rangle$ du système à l'instant T.

3.2. Comment se simplifie $|\Psi(T)\rangle$ dans les cas particuliers $T = \dfrac{2\pi}{g}$ et $T = \dfrac{\pi}{g}$?

3.3. On choisit maintenant $T = \dfrac{\pi}{2g}$. Montrer que l'on a :

$$|\Psi(T)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-i\frac{\pi}{4}}|\alpha\rangle + e^{i\frac{\pi}{4}}|-\alpha\rangle\right) \qquad (3)$$

3.4. On suppose que α est imaginaire pur : $\alpha = i\rho$.

a) Décrire qualitativement l'état physique (3).

b) Pour une valeur de $|\alpha|$ de l'ordre de grandeur calculé en **2.5.** pourquoi peut-on considérer que cet état est une réalisation concrète d'un état de type « chat de Schrödinger » évoqué dans l'introduction ?

4. Superposition et mélange statistique

On étudie dans cette partie les propriétés de l'état (3) pour une situation « macroscopique » $|\alpha| >> 1$. On choisit α imaginaire pur ($\alpha = i\rho$) et on pose $p_0 = \rho\sqrt{2m\hbar\omega}$.

4.1. On prépare un système quantique dans l'état (3). Ecrire les lois de probabilité (non normalisées) pour la position et pour l'impulsion du système. Ces lois de probabilité sont tracées ci-dessous pour $\alpha = 5i$. Interpréter physiquement ces distributions.

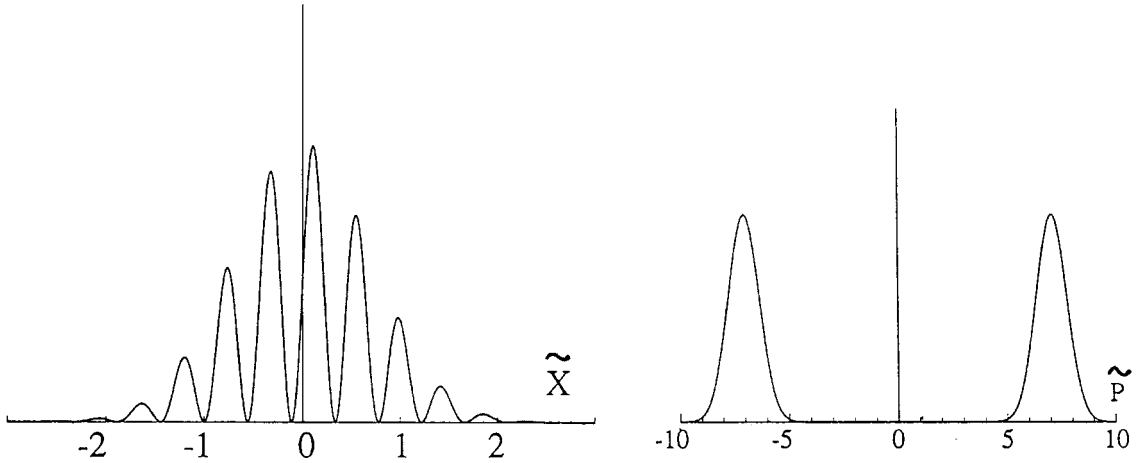


Figure 1 : *Lois de probabilité pour la position et l'impulsion d'un système dans l'état (3) pour $\alpha = 5i$. Les quantités $\tilde{X}$ et $\tilde{P}$ sont les variables sans dimension introduites dans la première partie du problème. L'échelle des ordonnées est arbitraire.*

4.2. Un physicien $Ph1$ prépare un nombre N de systèmes indépendants, tous dans l'état (3) et il fait une mesure de l'impulsion de chacun de ces systèmes. Le détecteur a une résolution δp telle que :

$$\sqrt{m\hbar\omega} << \delta p << p_0$$

Pour $N >> 1$, dessiner qualitativement la distribution (histogramme) des résultats regroupant les N mesures.

4.3. L'état (3) se présente comme la superposition quantique de deux états macroscopiques différents et conduit donc aux situations paradoxales mentionnées en introduction. Plutôt que N systèmes dans l'état (3), un physicien $Ph2$ pourrait prétendre que $Ph1$ dispose sans s'en rendre compte d'un « mélange statistique » non paradoxal, c'est-à-dire que la moitié $\left(\frac{N}{2}\right)$ des systèmes sont dans l'état $|\alpha\rangle$ et l'autre moitié $\left(\frac{N}{2}\right)$ dans l'état $|-\alpha\rangle$. Obtient-on dans ce cas la distribution de la question précédente pour les N mesures d'impulsion ?

4.4. Pour trancher, le physicien $Ph1$ procède maintenant à une mesure de la position sur les N systèmes indépendants tous dans l'état (3). Dessiner la forme de la distribution regroupant les résultats, en supposant que la résolution δx du détecteur est telle que :

$$\delta x << \frac{1}{|\alpha|}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

4.5. Le physicien $Ph2$ peut-il retrouver les résultats concernant la mesure de la position trouvés à la question précédente en se plaçant dans l'hypothèse d'un mélange statistique ?

4.6. En reprenant la valeur numérique obtenue dans le cas du pendule simple de la question **2.5.**, évaluer la résolution δx nécessaire pour différentier une superposition quantique de N pendules dans l'état (3) par rapport à un mélange statistique constitué de $\left(\frac{N}{2}\right)$ pendules dans l'état $|\alpha\rangle$ et $\left(\frac{N}{2}\right)$ pendules dans l'état $|-\alpha\rangle$.

5. La fragilité d'une superposition quantique

Dans la réalité, il faut tenir compte du couplage de l'oscillateur avec son environnement pour estimer le temps pendant lequel la superposition quantique (3) (l'état « chat de Schrödinger ») peut être différentié d'un simple mélange statistique.

Si l'oscillateur est initialement dans un état quasi-classique $|\alpha_0\rangle$ et l'environnement dans un état $|\chi_e(0)\rangle$, la fonction d'onde du système total est le produit des fonctions d'onde individuelles et le vecteur d'état initial du système total s'écrit comme le produit des vecteurs d'états des deux sous-systèmes :

$$|\Phi(0)\rangle = |\alpha_0\rangle \otimes |\chi_e(0)\rangle$$

Le couplage est responsable de l'amortissement de l'oscillateur. A un instant t ultérieur, le vecteur d'état du système total devient :

$$|\Phi(t)\rangle = |\alpha_1\rangle \otimes |\chi_e(t)\rangle$$

avec $|\alpha_1\rangle = \alpha(t)e^{-\gamma t}$; le nombre $\alpha(t)$ correspond à l'état quasi-classique que l'on trouverait en l'absence d'amortissement (question **2.4.a)**) et γ est un nombre réel positif.

5.1. En utilisant le résultat **2.2.** donner l'énergie moyenne de l'oscillateur au temps t , et l'énergie moyenne acquise par l'environnement lorsque $2\gamma t << 1$.

5.2. Pour des états initiaux de type « chat de Schrödinger » pour l'oscillateur, le vecteur d'état du système total s'écrit à $t = 0$:

$$|\Phi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-i\frac{\pi}{4}}|\alpha_0\rangle + e^{i\frac{\pi}{4}}|-\alpha_0\rangle\right) \otimes |\chi_e(0)\rangle$$

et à un instant t ultérieur :

$$\left|\Phi(t)\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-i\frac{\pi}{4}}\left|\alpha_1\right\rangle \otimes \left|\chi_e^{(+)}(t)\right\rangle + e^{i\frac{\pi}{4}}\left|-\alpha_1\right\rangle \otimes \left|\chi_e^{(-)}(t)\right\rangle\right)$$

avec toujours $\left|\alpha_1\right\rangle = \alpha(t)e^{-\gamma t}$. On choisit t tel que α_1 soit imaginaire pur, avec $\left|\alpha_1\right| >> 1$. $\left|\chi_e^{(+)}(t)\right\rangle$ et $\left|\chi_e^{(-)}(t)\right\rangle$ sont deux états normés *a priori* différents (mais non orthogonaux) de l'environnement.

La loi de probabilité pour la position de l'oscillateur, mesurée indépendamment de l'état de l'environnement, conduit à :

$$P(x) = \frac{1}{2}\left(\left|\Psi_{\alpha_1}(x)\right|^2 + \left|\Psi_{-\alpha_1}(x)\right|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left(i\Psi_{\alpha_1}^*(x)\Psi_{-\alpha_1}(x)\left\langle\chi_e^{(+)}(t)\middle|\chi_e^{(-)}(t)\right\rangle\right)\right)$$

En posant $\eta = \left\langle\chi_e^{(+)}(t)\middle|\chi_e^{(-)}(t)\right\rangle$ avec $0 \le \eta \le 1$ (η est réel) et en reprenant les résultats de la partie **4.**, décrire sans calcul le résultat de :

a) N mesures de position indépendantes,

b) N mesures d'impulsion indépendantes,

A quelle condition sur η peut-on différentier une superposition quantique d'un mélange statistique ?

5.3. Dans un modèle très simplifié, l'environnement est constitué d'un deuxième oscillateur, de même masse et de même pulsation que le premier. On suppose que ce deuxième oscillateur est initialement dans son état fondamental $\left|\chi_e(0)\right\rangle = \left|0\right\rangle$. Pour un couplage quadratique des deux oscillateurs, on admettra :

- que les états $\left|\chi_e^{(\pm)}(t)\right\rangle$ sont des états quasi-classiques : $\left|\chi_e^{(\pm)}(t)\right\rangle = \left|\pm\beta\right\rangle$,
- et que, pour des temps courts $(\gamma\, t << 1)$: $\left|\beta\right|^2 = 2\gamma\, t\left|\alpha_0\right|^2$.

a) A partir du développement (2), montrer que $\eta = \left\langle\beta\middle|-\beta\right\rangle = e^{-2|\beta|^2}$.

b) En utilisant l'expression trouvée en **5.1.** pour l'énergie du premier oscillateur, déterminer la valeur typique du transfert d'énergie entre les deux oscillateurs au dessus de laquelle la différence entre superposition quantique et mélange statistique devient inobservable.

5.4. On reprend le pendule simple décrit plus haut et on suppose que la constante de temps d'amortissement de l'énergie est d'une année (pendule suspendu sous vide, frottements minimisés,...). En utilisant le résultat du modèle développé à la question précédente, évaluer le temps pendant lequel un état « chat de Schrödinger » est observable. Conclure.

Corrigé

1. Préliminaires

1.1. Un changement de variable immédiat donne

$$\hat{\tilde{P}} = \frac{\hat{P}}{\sqrt{m\hbar\omega}} = \frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}}\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x} = -i\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\frac{\partial}{\partial x} = -i\frac{\partial}{\partial \hat{\tilde{X}}}$$

$$\hat{\tilde{X}} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\hat{X} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}i\hbar\frac{\partial}{\partial p} = i\sqrt{m\hbar\omega}\frac{\partial}{\partial p} = i\frac{\partial}{\partial \hat{\tilde{P}}}$$

1.2. $\left[\hat{N},\hat{a}\right] = \left[\hat{a}^\dagger\hat{a},\hat{a}\right] = \left[\hat{a}^\dagger,\hat{a}\right]\hat{a} = -\hat{a}$

Par conséquent $\left[\hat{N},\hat{a}\right]|n\rangle = -\hat{a}|n\rangle \Rightarrow \hat{N}\hat{a}|n\rangle = (n-1)\hat{a}|n\rangle$, $\hat{a}|n\rangle$ est donc vecteur propre de $\hat{N}$ avec la valeur propre $n-1$; on a alors $\hat{a}|n\rangle = \mu|n-1\rangle$ où le coefficient de proportionnalité μ se détermine à partir de la norme de $a|n\rangle$:

$$\left\|\hat{a}|n\rangle\right\|^2 = \langle n|\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle = n \Rightarrow \mu = \sqrt{n}$$

à une phase près.

1.3. $\hat{a}|0\rangle = 0 \Rightarrow \left(\hat{\tilde{X}} + i\hat{\tilde{P}}\right)|0\rangle = 0$

- en fonction de la variable $\tilde{X}$: $\left(\tilde{X} + \frac{\partial}{\partial \tilde{X}}\right)\Psi_0(\tilde{X}) = 0 \Rightarrow \Psi_0(\tilde{X}) = C\exp\left(-\frac{\tilde{X}^2}{2}\right)$
- en fonction de la variable $\tilde{P}$: $\left(\tilde{P} + \frac{\partial}{\partial \tilde{P}}\right)\Phi_0(\tilde{P}) = 0 \Rightarrow \Phi_0(\tilde{P}) = C\exp\left(-\frac{\tilde{P}^2}{2}\right)$

2. Les états quasi-classiques.

2.1. On vérifie la relation $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$

$$\hat{a}|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}\sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\hat{a}|n\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}\sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\sqrt{n}|n-1\rangle$$

$$= \alpha e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}\sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle = \alpha|\alpha\rangle$$

par ailleurs, $|\alpha\rangle$ est normé : $\langle\alpha|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2}\sum_n \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} = 1$

2.2. $\langle E\rangle = \langle\alpha|\hat{H}|\alpha\rangle = \hbar\omega\langle\alpha|\hat{N} + \frac{1}{2}|\alpha\rangle = \hbar\omega\left(|\alpha|^2 + \frac{1}{2}\right)$

$$\langle x\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\langle\alpha|\frac{\hat{a}+\hat{a}^\dagger}{\sqrt{2}}|\alpha\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\hat{a}+\hat{a}^\dagger\right)$$

$$\langle p\rangle = \sqrt{m\hbar\omega}\langle\alpha|\frac{\hat{a}-\hat{a}^\dagger}{i\sqrt{2}}|\alpha\rangle = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\left(\hat{a}^\dagger-\hat{a}\right)$$

$$\Delta x^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}\langle\alpha|\left(\hat{a}+\hat{a}^\dagger\right)^2|\alpha\rangle - \langle x\rangle^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}\left[\left(\hat{a}+\hat{a}^\dagger\right)^2+1\right]-\langle x\rangle^2$$

Soit $\Delta x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$ indépendant de α.

$$\Delta p^2 = -\frac{m\hbar\omega}{2}\langle\alpha|\left(\hat{a}-a^\dagger\right)^2|\alpha\rangle - \langle p\rangle^2 = -\frac{m\hbar\omega}{2}\left[\left(\hat{a}-\hat{a}^\dagger\right)^2-1\right]-\langle p\rangle^2$$

Soit $\Delta p = \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}$ également indépendant de α .

L'inégalité de Heisenberg est saturée : $\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2}$

2.3. En fonction de la variable $\widetilde{X}$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\widetilde{X}+\frac{d}{d\widetilde{X}}\right)\Psi_\alpha\left(\widetilde{X}\right) = \alpha\,\Psi_\alpha\left(\widetilde{X}\right) \Rightarrow \Psi_\alpha\left(\widetilde{X}\right) = C\exp\left(-\frac{\left(\widetilde{X}-\alpha\sqrt{2}\right)^2}{2}\right)$$

$$\frac{i}{\sqrt{2}}\left(\widetilde{P}+\frac{d}{d\widetilde{P}}\right)\Phi_\alpha\left(\widetilde{P}\right) = \alpha\,\Phi_\alpha\left(\widetilde{P}\right) \Rightarrow \Phi_\alpha\left(\widetilde{P}\right) = C'\exp\left(-\frac{\left(\widetilde{P}+i\alpha\sqrt{2}\right)^2}{2}\right)$$

2.4.a)

$$\left|\Psi(0)\right\rangle = \left|\alpha_0\right\rangle$$

$$\left|\Psi(t)\right\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}\sum_n \frac{\alpha_0^n}{\sqrt{n!}}e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}\left|n\right\rangle$$

$$= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}e^{-\frac{i\omega t}{2}}\sum_n \frac{\alpha_0^n}{\sqrt{n!}}e^{-in\omega t}\left|n\right\rangle$$

$$= e^{-\frac{i\omega t}{2}}\left|\alpha(t)\right\rangle \text{ avec } \left|\alpha(t)\right\rangle = \alpha_0 e^{-i\omega t} = \rho e^{-i(\omega t-\phi)}$$

2.4.b)

$$\langle x\rangle_t = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\rho\cos(\omega t-\phi) = x_0\cos(\omega t-\phi) \text{ avec } x_0 = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\rho$$

$$\langle p\rangle_t = -\sqrt{2m\hbar\omega}\rho\sin(\omega t-\phi) = -p_0\sin(\omega t-\phi) \text{ avec } p_0 = \rho\sqrt{2m\hbar\omega}$$

Ces équations sont celles d'un oscillateur classique. Par ailleurs, en utilisant le résultat **2.2.** on a :

$$\frac{\Delta x}{x_0} = \frac{1}{2\rho} << 1 \quad , \quad \frac{\Delta p}{p_0} = \frac{1}{2\rho} << 1$$

La position et l'impulsion de l'oscillateur sont donc très bien définies en valeur relative, d'où la nomenclature d'états quasi classiques.

2.5.a) Il faut prendre $\langle x\rangle_0 = x_0$ et $\langle p\rangle_0 = 0$, soit $\phi = 0$

$$\omega = 2\pi\nu = \sqrt{\frac{g}{l}} = 3{,}13\,\text{s}^{-1} \Rightarrow \alpha(0) = 3{,}9\times10^9$$

2.5.b) $\frac{\Delta x}{x_0} = \frac{1}{2\alpha(0)} = 1{,}3\times10^{-10}$

2.5.c) Après $\frac{1}{4}$ de période $e^{i\omega t} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i \Rightarrow \alpha\left(\frac{T}{4}\right) = 3{,}9\times10^9 i$

3. Fabrication d'un état « chat de Schrödinger ».

3.1.

$$\hat{W}\left|n\right\rangle = \hbar g n^2 \left|n\right\rangle$$

$$\left|\Psi(0)\right\rangle = \left|\alpha\right\rangle \Rightarrow \left|\Psi(T)\right\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-ign^2T}\left|n\right\rangle$$

3.2. Si $T = \dfrac{2\pi}{g}$, alors $e^{-ign^2T} = e^{-2i\pi n^2} = 1$

$$\left|\Psi(T)\right\rangle = \left|\alpha\right\rangle$$

Si $T = \dfrac{\pi}{g}$, alors $e^{-ign^2T} = e^{-i\pi n^2} = 1$ si n pair, -1 si n impair soit

$$e^{-ign^2T} = (-1)^n \Rightarrow \left|\Psi(T)\right\rangle = \left|-\alpha\right\rangle$$

3.3. Si $T = \dfrac{\pi}{2g}$, alors $e^{-ign^2T} = e^{-i\frac{\pi}{2}n^2} = 1$ si n pair, -1 si n impair

On peut réécrire cette relation

$$e^{-ign^2T} = \frac{1}{2}\left[1 - i + (1+i)(-1)^n\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-i\frac{\pi}{4}} + e^{i\frac{\pi}{4}}(-1)^n\right)$$

$$\text{soit : } \left|\Psi(T)\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-i\frac{\pi}{4}}\left|\alpha\right\rangle + e^{i\frac{\pi}{4}}\left|-\alpha\right\rangle\right)$$

3.4.a) $\alpha = i\rho$; dans l'état $\left|\alpha\right\rangle$, l'oscillateur a une position moyenne nulle et une vitesse positive ; dans l'état $\left|-\alpha\right\rangle$, l'oscillateur a également une position moyenne nulle et une vitesse négative. L'état (3) est une superposition quantique de ces deux situations.

3.4.b) Si $|\alpha| >> 1$, les états $\left|\alpha\right\rangle$ et $\left|-\alpha\right\rangle$ sont macroscopiquement différents (antinomiques) et l'état (3) représente une superposition quantique de tels états. C'est donc une version (pacifique) de l'état du chat de Schrödinger, avec bien sûr une assimilation abusive puisque l'on assimile l'état vivant (ou mort) du chat à un vecteur de l'espace de Hilbert.

4. Superposition quantique et mélange statistique.

4.1.

$$P(x) \propto \left|e^{-i\frac{\pi}{4}}\Psi_\alpha\left(\widetilde{X}\right) + e^{i\frac{\pi}{4}}\Psi_{-\alpha}\left(\widetilde{X}\right)\right|^2$$

$$\propto \left|e^{-i\frac{\pi}{4}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\widetilde{X} - i\rho\sqrt{2}\right)^2\right) + e^{i\frac{\pi}{4}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\widetilde{X} + i\rho\sqrt{2}\right)^2\right)\right|$$

$$\propto e^{-\widetilde{X}^2}\cos^2\left(\widetilde{X}\rho\sqrt{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$P(p) \propto \left|e^{-i\frac{\pi}{4}}\Phi_\alpha\left(\widetilde{X}\right) + e^{i\frac{\pi}{4}}\Phi_{-\alpha}\left(\widetilde{X}\right)\right|^2$$

$$\cong \exp\left(-\left(\widetilde{P} - \rho\sqrt{2}\right)^2\right) + \exp\left(-\left(\widetilde{P} + \rho\sqrt{2}\right)^2\right)$$

Dans la dernière égalité, on a utilisé le fait que pour $\rho >> 1$, les deux gaussiennes centrées en ρ et $-\rho\sqrt{2}$ ont un recouvrement négligeable.

4.2. $Ph1$ va trouver 2 pics contenant, chacun, environ $\frac{N}{2}$ résultats centrés respectivement en p_0 et $-p_0$.

4.3. Le mélange statistique de $Ph2$ conduit à la même distribution en impulsion que celle mesurée par $Ph1$: les $\frac{N}{2}$ oscillateurs dans l'état $|\alpha\rangle$ vont tous conduire au résultat de mesure $+p_0$ et les $\frac{N}{2}$ oscillateurs dans l'état $|-\alpha\rangle$ vont donner $-p_0$. A ce stade, il n'y a donc pas de comportement paradoxal lié à la superposition quantique (3).

4.4. En fonction de $\widetilde{X}$, la résolution du détecteur vérifie

$$\delta \widetilde{X} << \frac{1}{|\alpha|} = \frac{1}{\rho}$$

$Ph1$ a donc une résolution suffisante pour mettre en évidence les oscillations de la fonction $\cos^2\left(\widetilde{X}\rho\sqrt{2} - \frac{\pi}{4}\right)$ qui apparaît dans $P(x)$. La forme de la distribution des résultats va donc reproduire la loi de probabilité pour $\widetilde{X}$ tracée sur la figure 1, c'est-à-dire une modulation de période $\frac{\pi}{|\alpha|}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$ avec une enveloppe gaussienne.

4.5. Si $Ph2$ procède à une mesure de position sur les $\frac{N}{2}$ systèmes dans l'état $|\alpha\rangle$, il va trouver une distribution Gaussienne correspondant à la loi de probabilité $P(\widetilde{X}) \propto \left|\Psi_\alpha(\widetilde{X})\right|^2$ c'est-à-dire $P(\widetilde{X}) \propto e^{-\widetilde{X}^2}$. Il trouvera cette même distribution pour les $\frac{N}{2}$ systèmes dans l'état $|-\alpha\rangle$. L'ensemble de ces résultats sera donc une distribution Gaussienne, ce qui est très différent du résultat attendu par $Ph1$: cette mesure de position devrait donc permettre de discriminer entre état superposition quantique et le mélange statistique.

4.6. La résolution nécessaire est $\delta x << \frac{1}{|\alpha|}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \approx 5\times 10^{-26}\,\mathrm{m}$. Une telle résolution est malheureusement impossible à atteindre en pratique.

5. La fragilité d'une superposition quantique.

5.1. On a $E(t) = \hbar\omega\left(|\alpha_0|^2 e^{-2\gamma t} + \frac{1}{2}\right)$; cette énergie décroît avec le temps. Au bout d'un temps long devant γ^{-1}, l'oscillateur est dans son état fondamental. Ce modèle de dissipation correspond à un environnement à température nulle. L'énergie moyenne acquise par l'environnement $E(0) - E(t)$ s'écrit pour $2\gamma t << 1$, $\Delta E \cong 2\hbar\omega|\alpha_0|^2\gamma t$.

5.2.a) La loi de probabilité pour la position garde son enveloppe Gaussienne et le contraste des oscillations est réduit d'un facteur η.

5.2.b) La loi de probabilité pour les impulsions est donnée par

$$P(p) = \frac{1}{2}\left(|\Phi_{\alpha 1}(p)|^2 + |\Phi_{-\alpha 1}(p)|^2 + 2\eta\,\mathrm{Re}\left(i\Phi^*_{-\alpha 1}(p)\Phi_{\alpha 1}(p)\right)\right)$$

Comme le recouvrement des deux gaussiennes $\Phi_{\alpha 1}(p)$ et $\Phi_{-\alpha 1}(p)$ est négligeable, pour $|\alpha_1| >> 1$, le terme croisé proportionnel à η ne contribue quasiment pas. On retrouve deux pics centrés en $\pm|\alpha_1|\sqrt{2m\hbar\omega}$.

La différence entre superposition quantique et mélange statistique se fait à partir des résultats de mesure des positions : la superposition quantique conduit à une modulation de période spatiale $\frac{\pi}{|\alpha|}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$ avec une enveloppe Gaussienne, alors que seule la gaussienne est présente dans le cas du mélange statistique. Pour voir cette modulation, il faut que le contraste de la modulation ne soit pas trop petit devant 1, soit pour fixer les idées

$$\eta \geq \frac{1}{10}$$

5.3.a) $\langle -\beta | \beta \rangle = e^{-i|\beta|^2} \sum_n \frac{(\beta^n)^* (-\beta)^n}{n!} = e^{-|\beta|^2} e^{-|\beta|^2} = e^{-2|\beta|^2}$

5.3.b) Il faut d'après ce qui précède $e^{-2|\beta|^2} \geq \frac{1}{10}$ soit $\beta \leq 1$

Aux temps courts devant γ^{-1}, l'énergie du premier oscillateur s'écrit

$$E(t) = E(0) - 2\gamma\, t|\alpha_0|^2 \hbar\omega$$

L'énergie du deuxième oscillateur vaut

$$E'(t) = \hbar\omega\left(|\beta(t)|^2 + \frac{1}{2}\right) = \frac{\hbar\omega}{2} + 2\gamma\, t|\alpha_0|^2 \hbar\omega$$

Il y a donc conservation de l'énergie totale, l'énergie transférée au temps t s'écrivant

$$\Delta E = 2\gamma\, t|\alpha_0|^2 \hbar\omega$$

La condition pour pouvoir différentier superposition quantique et mélange statistique impose donc $\Delta E \leq \hbar\omega$: il suffit qu'un seul quantum d'énergie $\hbar\omega$ soit transféré pour que cette différentiation devienne problématique.

5.4. On donne $\frac{1}{2\gamma} = 1$ année$= 3\times 10^7$ secondes. Le temps au bout duquel $|\beta| = 1$ est donné par $\frac{1}{2\gamma|\alpha_0|^2} = \frac{3\times 10^7}{(3{,}9\times 10^9)^2}$ soit 2×10^{-12} seconde.

Conclusion :

Même pour un système aussi bien protégé de l'environnement que le pendule simple considéré dans l'énoncé, les superpositions quantiques d'états macroscopiques sont inobservables. Au bout d'un temps très court, toutes les observations que l'on peut faire sur un système initialement préparé dans une telle superposition coïncident avec celles que l'on pourrait faire sur un mélange statistique. Il n'est donc pas possible, au moins actuellement, d'observer des effets liés au caractère paradoxal d'une superposition d'états quantiques macroscopiques. En revanche, l'observation de chatons « mésoscopiques » (entre le macro et le microscopique) n'est pas exclue pour des systèmes très bien isolés. Les premières tentatives concernaient des SQUIDS (jonctions Josephson dans des anneaux supraconducteurs), mais n'ont pas donné de résultats très convaincants.

L'idée développée dans ce problème, orientée vers l'optique quantique, a été proposée par Bernard Yurke et David Stoler, Phys. Rev. Lett. **57**, 13 (1986). Les travaux les plus prometteurs s'effectuent actuellement à l'ENS (LKB) à Paris sur des photons micro-ondes (50 GHz), stockés dans une cavité supraconductrice. Le champ stocké dans cette cavité fournit un

modèle quasi parfait d'oscillateur harmonique. La préparation du chat (partie 3) se fait en envoyant des atomes à travers la cavité. D'autres atomes sont utilisés pour la détection. La dissipation (partie 5) correspond à la très faible absorption résiduelle des parois de la cavité supraconductrice. La réalisation de « chatons » comportant entre 5 et 10 photons (c'est-à-dire $|\alpha|^2 = 5 \text{ ou } 10)$ semble à la portée de cette expérience.