

Examen de mécanique des fluides

126^{ème} promotion

12 février 2009 : 9h- 12h

- Traiter la partie A (durée 1h à 1h15) et la partie B (durée 1h45 à 2h).
- Documents autorisés pour toute la durée de l'examen : photocopié, notes de cours, notes personnelles manuscrites. Les ouvrages et photocopies d'ouvrages ne sont pas autorisés.

1 Partie A. Colonnes oscillantes.

D'après V. Duclaux, "Occlusions pulmonaires, Entropion oculaire et Anévrismes : une approche physique en physiologie", thèse Université de Provence, 2006.

1.1 Colonnes oscillantes.

Les anévrismes sont des distensions des parois artérielles qui provoquent des zones de recirculation dans l'écoulement sanguin. Leurs ruptures sont des accidents très graves, très souvent fatals si l'anévrisme est placé sur la partie abdominale de l'aorte. Pour modéliser ce phénomène, on réalise un système circulatoire modèle composé d'une pompe à piston, remplaçant le coeur, des tuyaux rigides et un tuyau à paroi souple figurant l'aorte.

On détermine la fréquence propre d'oscillation du système avec l'expérience représentée sur la fig. 1 : le tube souple de longueur L , de rayon au repos $R_0 = 9,5\text{mm}$ est disposé horizontalement. Il est fermé à une extrémité ; à l'autre extrémité, il est relié à un tube de paroi rigide, de même rayon R_0 et de longueur L_1 . La surface libre du liquide(ici de l'eau) est à une altitude $h \approx L_1$ au-dessus du tuyau souple.

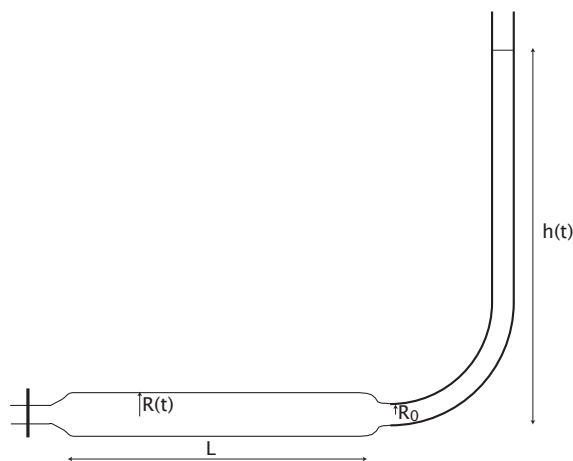


FIGURE 1 – Schéma de l'expérience utilisée pour mesurer la fréquence propre d'oscillation.

La hauteur d'eau dans le tube rigide est d'abord fixée (entre 50 et 250 cm), déterminant ainsi la pression p_{eq} dans le tube souple. A cette pression correspond un rayon du tube souple R_{eq} . Puis on aspire l'eau à 10 centimètres au-dessus de la position d'équilibre et on laisse ensuite le système évoluer seul. On observe des oscillations périodiques du niveau d'eau, lentement amorties. La fréquence d'oscillation est comprise entre 1 et 0,5 Hz.

Dans la limite des petites déformations, le rayon R du tube élastique est lié à la surpression interne δp par :

$$\delta p = d_0 E \frac{\delta R}{R_0^2} \quad (1)$$

où $\delta R = R - R_0$, d_0 est l'épaisseur de la membrane élastique et E son module d'Young. $d_0 = 0,7$ mm et $E = 1$ MPa.

Calculer l'ordre de grandeur du nombre de Reynolds associé à l'écoulement d'eau dans le tube souple.

Que peut-on en conclure sur la dynamique de l'écoulement ?

Pourquoi peut-on considérer que le profil de vitesse aussi bien dans le tube souple que dans le tube rigide est un profil plat ? Quel est, en ordre de grandeur, l'épaisseur de la couche limite qui se développe sur la paroi des tubes ?

1.2 Écoulement dans le tube souple.

On note $U(x, t)$ la vitesse du liquide moyennée sur la section du tube. Le rayon R du tube varie dans le temps, mais il est uniforme sur toute la longueur du tube. Montrer que U est donné par :

$$U = -2 \frac{\dot{R}}{R} x = -2\dot{\epsilon} x \quad (2)$$

où l'origine de la coordonnée x est prise sur l'extrémité fermée du tube.

Quelle est l'énergie cinétique totale du liquide contenu dans le tube souple ?

1.3 Écoulement dans le tube rigide.

Le tube rigide est d'abord rempli jusqu'à une hauteur L_{1eq} , puis oscille autour de cette position : $L_1(t) = L_{1eq} + \delta L_1(t)$. Quelle relation existe-t-il entre $\dot{\epsilon}$ et $d(\delta L_1)/dt$?

Le rayon du tube rigide est égal au rayon R_0 du tube souple non déformé. Quelle est la valeur de la vitesse U_1 dans le tube rigide ?

Montrer que l'énergie cinétique totale de l'écoulement (tube souple et tube rigide) s'écrit, à l'ordre le plus bas en ϵ :

$$E_c = 2\pi\rho R^2 \dot{\epsilon}^2 L^2 \left[\frac{L}{3} + L_1 \left(\frac{R}{R_0} \right)^2 \right] \quad (3)$$

où ρ est la masse volumique du liquide.

1.4 Équation d'oscillation

L'énergie élastique associée à la déformation du tube souple est :

$$E_{el} = 2\pi R L d_0 E \epsilon^2 \quad (4)$$

On notera : $d_0 E = \rho R c^2$ où c est la vitesse d'ondes de déformation qui peuvent se propager sur le tube élastique.

Montrer que la variation temporelle d'énergie potentielle s'écrit :

$$\frac{dE_p}{dt} = -\pi\rho g R^2 L L_1 \dot{\epsilon} \quad (5)$$

Ecrire l'équation différentielle régissant l'évolution temporelle de la déformation ϵ . Montrer qu'il existe une solution oscillante de pulsation ω telle que :

$$\omega^2 = \frac{c^2}{\frac{L^2}{3} + L L_1 \left(\frac{R}{R_0} \right)^2} \quad (6)$$

1.5 Dissipation et amortissement

Montrer que l'énergie dissipée par unité de temps dans l'écoulement est, en ordre de grandeur, et en faisant l'hypothèse $R \approx R_0$:

$$P_{dis} \sim \rho \dot{\epsilon}^2 R_0 L^2 (L + L_1) \omega^{1/2} \nu^{1/2} \quad (7)$$

où ν est la viscosité cinématique du liquide.

Toujours en faisant l'hypothèse $R \approx R_0$ et en ne considérant que l'énergie cinétique du liquide et la puissance dissipée, montrer que le temps caractéristique d'amortissement des oscillations varie comme :

$$\tau \sim \frac{R_0}{\omega^{1/2} \nu^{1/2}} \frac{L/3 + L_1}{L + L_1} \quad (8)$$

2 Partie B. Instabilité de l'imprimeur.

D'après M. Rabaud, "Dynamiques interfaciales dans l'instabilité de l'imprimeur", Ann. Phys. Fr. 1994.

Dans un bon nombre de procédés de dépôt d'un film liquide sur un substrat solide souple (du papier par exemple) le liquide à étaler est confiné entre deux cylindres légèrement excentrés. Le liquide est entraîné par la rotation d'un ou des deux cylindres et forme un film d'épaisseur contrôlée par les paramètres de l'écoulement, viscosité et tension de surface entre autres (fig. 2).

L'expérience montre que la position du ménisque qui se forme entre les deux cylindres est souvent instable. On observe une modulation de la position du ménisque périodique le long de l'axe des cylindres. Cette "instabilité de l'imprimeur", conduit à une modulation de l'épaisseur de la couche de liquide déposée sur le substrat et il faut donc chercher les conditions de fonctionnement dans lesquelles cette instabilité apparaît.

Les rayons des deux cylindres R_i et R_e sont beaucoup plus grands que l'épaisseur de la couche de liquide $h(x)$. Ainsi, il est possible de faire l'approximation : $h(x) = h_0 + x^2/2R$ où h_0 est la séparation minimale des deux cylindres et $1/R = 1/R_i - 1/R_e$. On peut raisonner comme si l'écoulement avait lieu entre un plan immobile (en $y = 0$) et une parabole (définie par $y = h(x)$) se déplaçant à la vitesse U (fig. 2). La position du ménisque est définie par $x = c$. Le rayon de courbure du ménisque ρ est tel que $\rho = h(c) - a$ où a est l'épaisseur du film de liquide entraîné par le rouleau.

Le rayon des deux cylindres est respectivement de 33 et 50 mm. Leur séparation minimale est $h_0 = 400 \mu\text{m}$. La viscosité dynamique du liquide compris entre les deux cylindres est $\eta = 0,1 \text{ Pa}\cdot\text{s}$; sa masse volumique est 1000 kg/m^3 . La vitesse circonférentielle du cylindre intérieur est égale à 10 mm/s .

2.1 Champ de vitesse

Quel est le nombre de Reynolds associé à l'écoulement ?

Quelles sont les approximations que l'on peut faire pour simplifier l'équation de mouvement (quels sont les termes négligeables et pourquoi) ?

Montrer que le champ de vitesse est tel que :

$$u_y \approx 0 \quad u_x = \frac{y^2}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} + Ay + B \quad (9)$$

Quelles sont les conditions aux limites qui permettent de déterminer A et B et quelles sont les valeurs de A et B ?

Calculer le débit de fluide Q entre les deux cylindres (débit par unité de longueur dans la direction z). Ce débit est-il indépendant de la position x ?

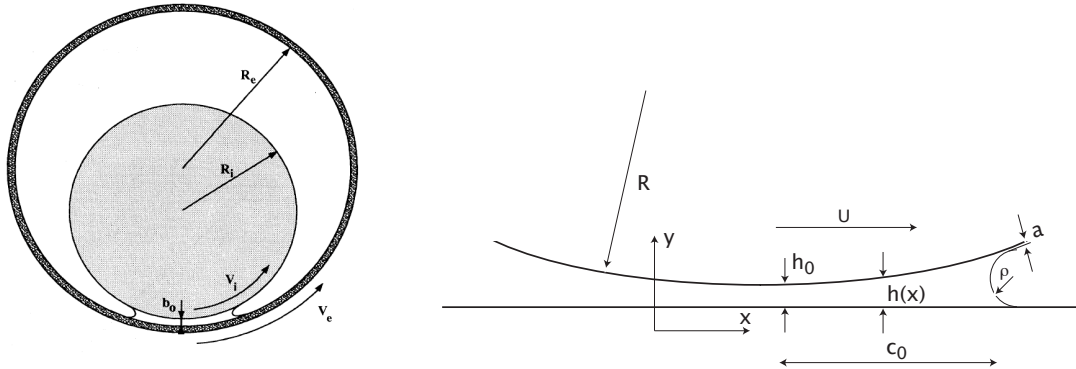


FIGURE 2 – Schéma de l'expérience pour l'étude de l'instabilité de l'imprimeur, vue dans l'axe des cylindres. À droite, géométrie équivalente pour la couche de liquide confinée entre les cylindres.

2.2 Champ de pression

On note \bar{h} l'épaisseur de la couche de fluide telle que $\partial p / \partial x = 0$.

- Quelle relation existe-t-il entre Q et \bar{h} ?
- Montrer que le gradient de pression est tel que :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{6\eta U}{h^2} \left(1 - \frac{\bar{h}}{h}\right) \quad (10)$$

- Une résolution complète de l'équation ci-dessus, donne : $\bar{h} \approx 1,22h_0$. Tracer qualitativement le profil de vitesse (u_x en fonction de y) dans les différentes régions de l'écoulement.

La pression s'exprime sous la forme :

$$p = \frac{6\eta U \sqrt{2Rh_0}}{h_0^2} f(x) \quad (11)$$

où $f(x)$ est une fonction adimensionnelle qui reste voisine de l'unité.

- Quelle est la longueur qui caractérise l'écoulement dans la direction x ?
- Quel est l'ordre de grandeur de la pression, avec les valeurs numériques données ci-dessus ?
- Quel est l'ordre de grandeur de la force verticale subie par le cylindre tournant (en fonction de η , U , R et h_0 et par unité de longueur dans la direction z) ?

2.3 Analyse de stabilité

On cherche maintenant à caractériser la stabilité de la position du ménisque. Supposons que le ménisque soit initialement placé en $x = c_0$ et qu'il subisse une perturbation sinusoïdale qui l'amène à la position $x = c_0 + \epsilon \sin(qz)$ (fig. 3).

- Si A est le point où le ménisque s'est avancé de ϵ , montrer que la pression au point B, situé à une distance L derrière la ligne non perturbée, est :

$$p_B = p_0 - \frac{\gamma}{h(c_0) - a} + \frac{\epsilon \gamma}{(h(c_0) - a)^2} \frac{dh}{dx} - \frac{dp}{dx}(L + \epsilon) \quad (12)$$

où p_0 est la pression dans le gaz et γ la tension superficielle du liquide. Quelle est la pression au point D, placé à une distance $L - \epsilon$ derrière le ménisque ?

- Quel est, qualitativement, l'écoulement engendré par une différence de pression entre les points B et D ?
- Montrer que la position du ménisque est stable vis-à-vis de petites perturbations si :

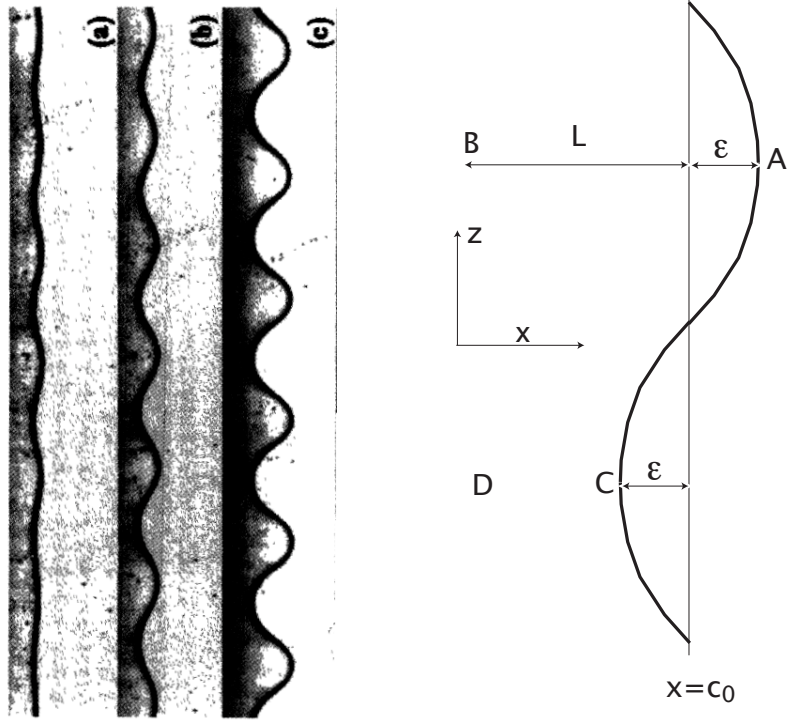


FIGURE 3 – À gauche : photographie du ménisque déformé à différentes vitesses de rotation. A droite, schéma de la déformation du ménisque dans le plan xz .

$$\frac{\gamma}{(h(c_0) - a)^2} \frac{dh}{dx} > \frac{dp}{dx} \quad (13)$$

En supposant que l'épaisseur du film entraîné par le cylindre tournant a est beaucoup plus petite que h , écrire l'équation qui définit la position critique x_c à partir de laquelle le ménisque devient instable, en fonction de R , h et du nombre capillaire $Ca = \eta U / \gamma$.