

Examen de mécanique des fluides

125^{ème} promotion

18 février 2008 : 9h15 - 12h

- Traiter les trois parties. Ces trois parties sont complètement indépendantes.
- Lire attentivement l'intégralité des énoncés.
- Les temps (très) approximatifs nécessaires à la résolution de chacune des parties sont : Partie 1 Éjection de spores de champignon : 40 min, Partie 2 Bulle parachute 30 min et Partie 3 Filaments 1h 35 min.
- Documents autorisés pour toute la durée de l'examen : polycopié, notes de cours, notes personnelles manuscrites. Les ouvrages et photocopies d'ouvrages ne sont pas autorisés.

1 Éjection de spores de champignon

D'après un séminaire de Jacques Dumais, département de biologie de Harvard et A. Pringle et al., "The captured launch of a ballistospore", *Mycologia*, **97**, 866 (2005).

Certaines espèces de champignons ont développé une stratégie efficace pour éjecter les spores depuis les lamelles situées sous le chapeau. À la base du support du spore se trouve une petite zone hydrophile qui permet la croissance d'une goutte d'eau. Lorsque la goutte d'eau est assez grande, elle fusionne avec une très mince couche d'eau présente sur la surface du spore et s'étale à son tour en une couche très mince. Le rayon du spore est de l'ordre de $4 \mu\text{m}$, sa masse est de l'ordre de 4×10^{-10} g.

- Estimer la variation d'aire interfaciale et la variation d'énergie interfaciale associée.
- En admettant que la variation d'énergie interfaciale est intégralement récupérée en énergie cinétique, estimer la vitesse initiale d'éjection du spore.
- Quel est le nombre de Reynolds associé à l'écoulement d'air autour du spore ?
- Comment s'exprime la force de traînée exercée par l'air sur le spore en mouvement ?
- Si le spore est éjecté horizontalement, décrire sa trajectoire et donner en particulier la longueur et le temps de freinage.
- Quelle serait la vitesse de chute du spore dans l'air sous le seul effet de la gravité ?
- La gravité joue-t-elle un rôle dans le mouvement montré sur la fig. 1 ?
- Comparer votre prédiction au mouvement réel représenté sur la fig. 1.

2 Ascension d'une bulle de gaz dans un liquide.

L'expérience montre que des bulles de gaz de quelques cm de diamètre qui remontent dans un liquide ont une forme de parachute : la partie avant de la bulle est sphérique et sa partie arrière est à peu près plate. G.I. Taylor a étudié expérimentalement la relation entre la vitesse d'ascension des bulles et le rayon de courbure R de la partie avant. Dans ses expériences, des bulles d'air s'élèvent dans du nitrobenzène (viscosité cinématique $\nu = 0,015\text{cm}^2/\text{s}$, masse volumique $\rho = 1,2\text{g}/\text{cm}^3$). Les rayons de courbure sont compris entre 2,4 et 4,8 cm, les vitesses d'ascension entre 29 et 48 cm/s et les dimensions transverse ($2R \sin \theta_0$) entre 2,8 et 6,2 cm.

1. - Dans les expériences décrites ci-dessus, quel est l'ordre de grandeur du nombre de Reynolds pour l'écoulement dans le liquide ? Qu'en concluez-vous sur l'importance relative des effets visqueux et inertiels dans l'écoulement ?
 - Quelle relation pouvez-vous utiliser pour relier la pression à la vitesse du fluide ?
2. - Quelle est la pression dans le liquide, au voisinage immédiat de la partie sphérique de la bulle ? (on supposera que la pression à l'intérieur de la bulle est constante).
 - Quelle est la vitesse du liquide à la surface de la bulle, près du point de stagnation S en fonction de l'angle θ ? (on pourra supposer que l'angle θ est petit et faire les approximations correspondantes).

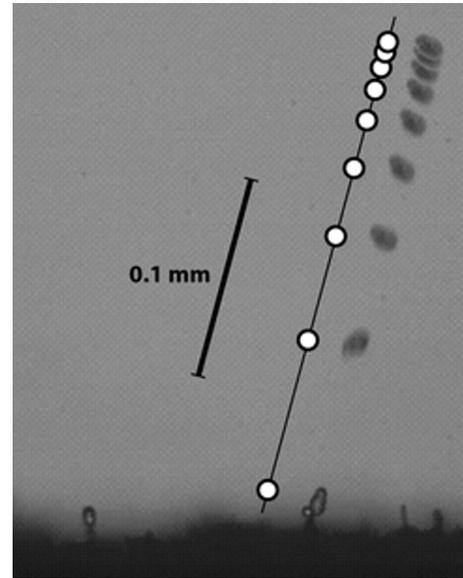
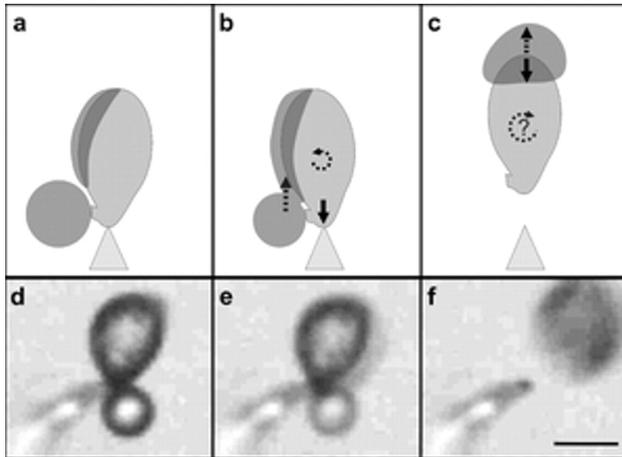


FIG. 1 – Éjection d'un ballistospore de champignon. À gauche, a,b,c : schéma de la coalescence de la goutte d'eau sur le spore. d,e,f : trois vues de l'éjection prises avec une caméra ultra-rapide (barre : $10 \mu\text{m}$). À droite, surimpression des positions d'un spore à des intervalles de temps de $100 \mu\text{s}$.

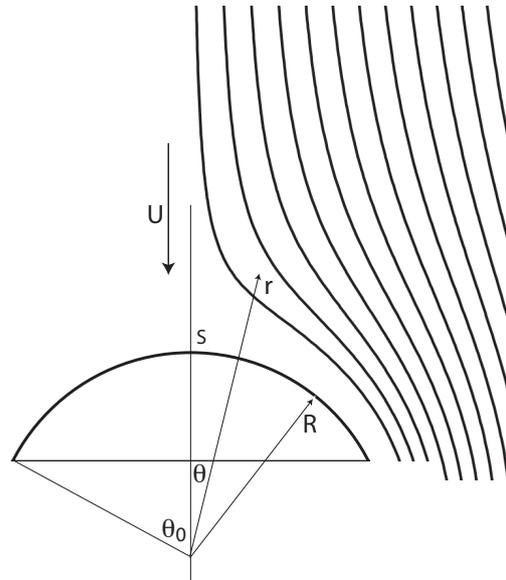
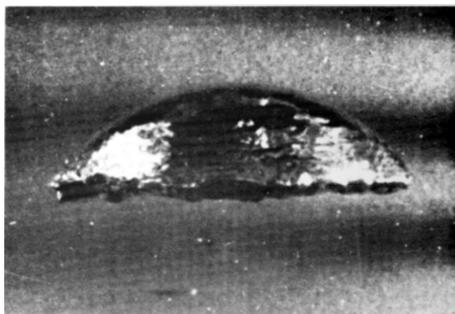


FIG. 2 – Schéma et photographie d'une bulle parachute (ici volume 40 cm^3 remontant dans l'eau).

3. On fait l'hypothèse que l'écoulement du liquide autour de la partie sphérique de la bulle est le même que l'écoulement potentiel autour d'une sphère. Le champ de vitesse est donné par :

$$u_r = U \left(1 - \frac{R^3}{r^3} \right) \cos \theta \quad (1)$$

$$u_\theta = -U \left(1 + \frac{R^3}{2r^3} \right) \sin \theta \quad (2)$$

dans le repère où la bulle est immobile et où le liquide se déplace à la vitesse U loin de la bulle.

- Justifier cette hypothèse.
- Montrer que la vitesse d'ascension de la bulle est : $2/3\sqrt{gR}$

3 Le robinet, le filet de miel et la chaînette visqueuse : histoires d'étirement.

Il est assez difficile de sortir de l'eau d'un verre à l'aide d'un couteau tenu verticalement. En revanche, c'est tout à fait possible pour du miel liquide. Une fois tiré hors du pot, le miel y retombe si on maintient le couteau fixe (fig. 4). Nous allons, dans un premier temps, nous intéresser à cet écoulement.

Le miel liquide est un fluide newtonien de viscosité $\eta = 1\text{Pa}\cdot\text{s}$, masse volumique $\rho = 1000\text{kg}/\text{m}^3$

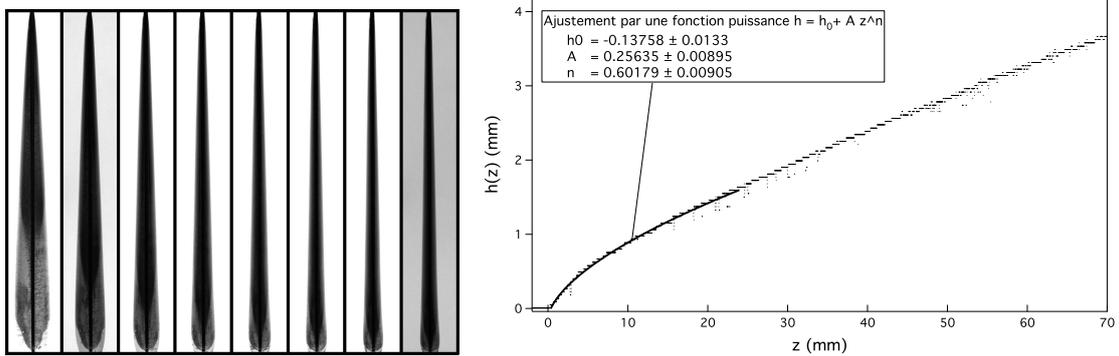


FIG. 3 – Miel liquide tiré hors d'un pot par un couteau. À gauche, évolution de la couche de miel entraînée par le couteau (hauteur des images 10 cm, intervalle de temps 1s). À droite, profil de l'épaisseur de miel au début du drainage; points expérimentaux et ajustement par une loi de puissance sur le début de la courbe.

Écoulement le long du couteau.

On note $h(z, t)$ l'épaisseur du miel déposé le long du couteau. Justifier l'utilisation de l'approximation de lubrification dans ce problème.

Quelles sont les conditions aux limites pour le champ de vitesse sur la surface du couteau ($x = 0$) et sur la surface libre ($x = h$) ?

Déterminer le champ de vitesse et la vitesse moyenne $\langle u \rangle$ dans la couche de miel.

Montrer que l'épaisseur locale $h(z, t)$ obéit à l'équation :

$$\frac{\partial \langle u \rangle h}{\partial z} + \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \quad (3)$$

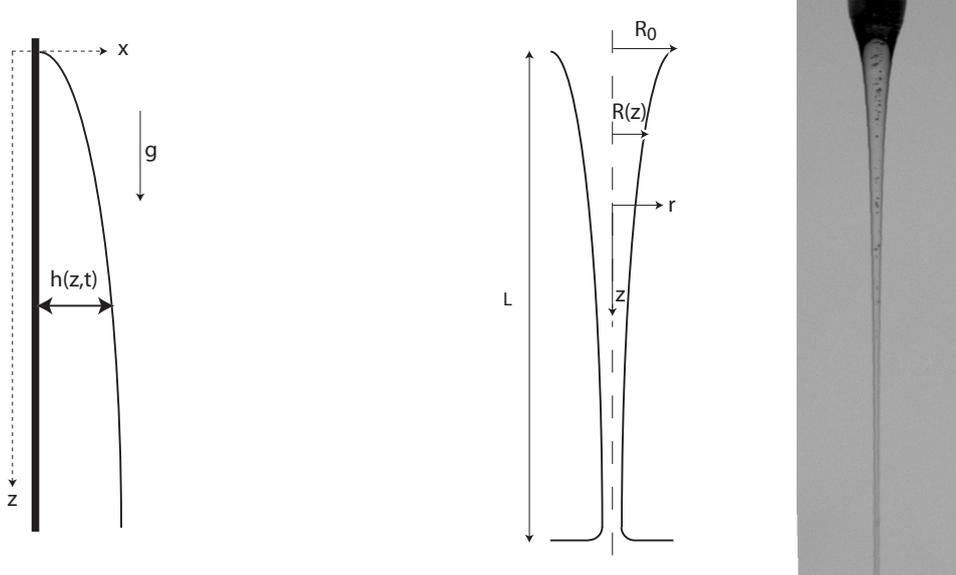


FIG. 4 – Schémas de la couche de miel se drainant du couteau (à gauche), du filet de miel coulant sous le couteau (milieu).

On cherche des solutions avec des variables séparées, de la forme : $h(z, t) = f(z)g(t)$. Quelle est alors la forme de la couche liquide et comment son épaisseur varie-t-elle avec le temps ?

Écoulement sous le couteau

Regardons maintenant le filet de miel de section circulaire qui s'écoule sous le couteau. Nous nous intéressons maintenant à une situation stationnaire où le débit de miel Q est constant. Le filet, dont le rayon initial est $R_0 \approx 4$ mm, et la hauteur $L \approx 10$ cm retombe dans le pot de miel. Dans un premier temps, négligeons la tension de surface du liquide.

Quelle est alors la pression à l'intérieur du filet de liquide ?
 Pourquoi peut-on supposer que la vitesse du liquide est indépendante de la coordonnée radiale r ?
 Montrer que la vitesse du liquide $u(z)$ obéit à l'équation :

$$\eta \frac{d^2 u}{dz^2} = -\rho g \quad (4)$$

Donner l'évolution de la vitesse $u(z)$, en supposant qu'il n'y a pas d'étirement du liquide à l'endroit où le filet rejoint le bain. En déduire l'évolution du rayon $R(z)$ avec la position.

Considérons à présent l'effet de la tension interfaciale miel-air, $\gamma \approx 50$ mN/m. Comment la tension interfaciale modifie-t-elle la pression dans le filet de liquide ?

Montrer que l'équation de mouvement devient :

$$\eta \frac{d^2 u}{dz^2} = \frac{\gamma}{R^2} \frac{dR}{dz} - \rho g \quad (5)$$

Estimer l'ordre de grandeur relatif des termes de tension interfaciale et de gravité. Lequel est dominant ?

Robinet

Le couteau enduit de miel doit être lavé. Pour cela, on le passe sous le filet d'eau du robinet. Quel est le nombre de Reynolds associé à l'écoulement d'eau ? Dans ce cas, quel est le terme

dominant de l'équation de mouvement, la viscosité ou l'inertie du fluide ?
 Comment est modifié le raisonnement fait précédemment pour le filet de miel ?
 Quelle est l'équation définissant $u(z)$ et comment varie le rayon du filet d'eau en fonction de la hauteur ?

Chaînette visqueuse

D'après F. Brochard-Wyart et P.G. de Gennes, "The viscous catenary, a poor man's approach", *Europhys. Lett.* **80**, 36001 (2007) et J.P. Koulakis et al., "The viscous catenary revisited : experiments and theory", soumis à *J. Fluid Mech.*

L'étirement d'un filet liquide se manifeste aussi dans l'expérience suivante : une goutte d'huile silicone extrêmement visqueuse (viscosité dynamique $\eta = 100$ Pa.s, masse volumique $\rho = 900$ kg/m³) est déposée entre deux disques qu'on sépare très rapidement, formant ainsi un filet horizontal. On observe ensuite la déformation de ce filet sous l'effet de la gravité (fig. 5).

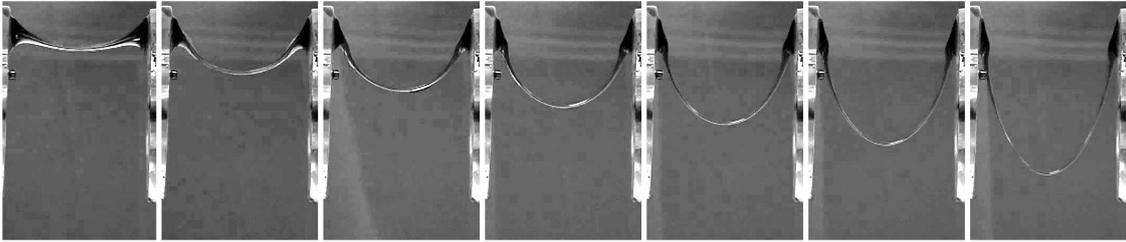


FIG. 5 – Evolution temporelle d'un filament de liquide visqueux (huile silicone) tiré entre deux plans. Intervalle de temps entre deux images : 1 s. Longueur initiale du filament : 30 mm

S'il est assez épais, le filet liquide garde une forme de parabole ($z \propto x^2$), paramétrée par sa hauteur totale qui augmente au cours du temps. Pour déterminer la dynamique initiale de déformation, on peut alors raisonner sur une forme simplifiée en V, paramétrée par l'angle θ entre le filament et l'horizontale (fig.6). Cet angle θ est supposé petit devant 1. La longueur initiale du filament est $2L$

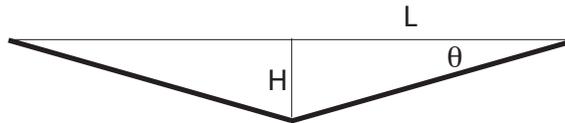


FIG. 6 – Géométrie simplifiée pour la chaînette visqueuse

Exprimer la puissance dissipée par viscosité au sein du filament, en fonction de θ et de sa variation au cours du temps.

Quelle est la variation temporelle d'énergie potentielle ?

En déduire une loi de variation pour θ en fonction du temps et un temps caractéristique de déformation du filament.

Comparer ce temps caractéristique à la dynamique montrée sur la fig. 5.

TAB. 1 – Propriétés physiques de l'eau et de l'air à 20°C

	masse volumique $\rho(\text{kg/m}^3)$	viscosité dynamique η (Pa.s)	viscosité cinématique $\nu(\text{m}^2/\text{s})$	tension de surface γ (mN/m)
eau	998	$1,002 \times 10^{-3}$	10^{-6}	73
air	1,205	$1,81 \times 10^{-5}$	1.5×10^{-5}	