Chapitre 5

ÉCOULEMENTS À PETITS NOMBRES DE REYNOLDS

5.1 Le monde étrange des petits nombres de Reynolds

Nous avons mentionné dès l'introduction que le transport de la quantité de mouvement peut être dû à la viscosité ou bien à la convection par l'écoulement lui-même. L'importance relative de ces deux mécanismes de transport peut être appréciée par la valeur du nombre de Reynolds $Re = UL/\nu$. La faible valeur de la viscosité de l'eau et de l'air fait que la plupart des écoulements que nous observons dans la vie courante sont des écoulements à grand nombre de Reynolds où l'inertie est prépondérante devant la viscosité. Aussi, nombre de raisonnements "intuitifs" que nous avons sur les écoulements sont influencés par cette expérience quotidienne et ne s'appliquent pas lorsque le nombre de Reynolds est petit.

Nous allons maintenant examiner les circonstances dans lesquelles les effets visqueux sont dominants et quelles sont les particularités des écoulements à faible nombre de Reynolds. La définition de Re nous montre que nous pouvons rendre la viscosité prépondérante de trois manières : i) : en diminuant la vitesse, ii) : en diminuant la taille de l'écoulement, iii) : en augmentant la viscosité ou bien en combinant ces effets.

Des écoulements à vitesse extrêmement faible sont rencontrés en géophysique : l'écoulement d'un glacier ou le mouvement du magma dans le manteau terrestre. Bien que les matériaux mis en jeu ne soient pas, à proprement parler des fluides, leur mouvement sur des échelles de temps suffisamment longues peuvent être décrits comme ceux d'un liquide très visqueux avec une inertie complètement négligeable.

Parmi les écoulements avec des échelles de longueur très petites, mentionnons les écoulements dans les milieux poreux (roches poreuses, colonnes de chromatographie), les écoulements autour de petites objets en suspension (macromolécules, particules colloïdales) ainsi que la propulsion des microrganismes comme les bactéries ou les paramécies. Les dévelopements récents des micro-systèmes mécaniques (MEMS) et des dispositifs d'analyse physico-chimique intégrés accroissent encore le champ d'application des écoulements à petits nombres de Reynolds.

5.1.1 L'équation de Stokes

En éliminant de l'équation de Navier-Stokes les termes proportionnels à la masse volumique du fluide, on obtient l'équation de Stokes :

$$\eta \Delta \mathbf{u} = \nabla p \tag{5.1}$$

La différence fondamentale entre les deux équations est que le terme non linéaire en vitesse a disparu ; l'équation de Stokes est une équation aux dérivées partielles *linéaire*. Les écoulements à

petit nombres de Reynolds ont presque toujours lieu dans des conditions où le fluide est incompressible. Le mouvement du fluide est donc spécifié par (5.1) et par l'équation de conservation : $\nabla.\mathbf{u} = 0$. En combinant ces deux équations, il est possible de reformuler l'équation de Stokes de deux manières :

- i) en prenant le rotationnel de (5.1), on obtient :

$$\Delta\omega = 0 \tag{5.2}$$

  où on a introduit la vorticité ω qui est le rotationnel du champ de vitesse. On utilisera (5.2) en particulier si les conditions aux limites sont spécifiées en fonction du champ de vitesse.
- ii) en prenant la divergence de (5.1), on obtient :

$$\Delta p = 0 \tag{5.3}$$

  ce qui montre que le champ de pression obéit à l'équation de Laplace.

On utilisera (5.3) si les conditions aux limites sont spécifiées en fonction de la pression. Après calcul de p, la vitesse sera déterminée à l'aide de (5.1). On peut remarquer que la viscosité a disparu des équations (5.2) et (5.3) : η détermine seulement l'amplitude relative du gradient de pression et de la vitesse. C'est-à-dire que, *pour des conditions aux limites données*, dans la limite des très petits nombres de Reynolds, les lignes de courant seront toujours les mêmes, quelle que soit la viscosité du fluide.

5.1.2 Réversibilité cinématique

Une des conséquences de la linéarité de l'équation de Stokes est la réversibilité des écoulements à très petits nombres de Reynolds. Si l'écoulement du fluide est créé par le mouvement de parois solides, lorsqu'on inverse le mouvement des parois, les particules de fluide reprennent exactement les mêmes trajectoires, mais en sens inverse. Cette réversibilité peut également être comprise comme une diffusion "instantanée" de la quantité de mouvement à travers tout l'écoulement : la présence de parois solides influence l'écoulement par la condition de non glissement sur les parois. Lorsque les effets visqueux sont totalement prépondérants, c'est la diffusion de la quantité de mouvement par la viscosité qui "véhicule " cette information.

La réversibilité peut être mise en évidence par l'expérience suivante : dans un écoulement de Couette (entre deux cylindres coaxiaux) on place un fluide très visqueux. On injecte localement dans le fluide du colorant dilué dans le même fluide très visqueux de façon à former un dessin dans le liquide. Puis, on met un des deux cylindres en mouvement et on lui fait effectuer une rotation de plusieurs tours. Le dessin coloré est complètement distordu par le cisaillement. Ensuite, on inverse le sens de rotation du cylindre et on lui fait effectuer exactement le même nombre de tours qu'à l'aller. On voit alors le dessin coloré se reconstituer exactement au même endroit qu'au départ du mouvement. La seule transformation irréversible subie par le colorant est une légère diffusion due à l'agitation moléculaire.

En l'absence d'inertie, les lignes de courant peuvent être parcourues dans un sens ou dans l'autre. Si $\mathbf{u}$ est solution de l'équation de Stokes, alors $-\mathbf{u}$ l'est aussi. Ce n'est plus le cas dès l'instant où l'inertie du fluide joue un rôle. Sur la fig. 5.2 nous voyons les lignes de courant dans un élargissement brusque (ou rétrécissement brusque selon la direction de l'écoulement). A $Re = 0$, les lignes de courant sont les mêmes pour les deux sens d'écoulement. En revanche, à $Re = 50$, l'écoulement dans le divergent forme un "jet" au centre de la partie large. Ce jet n'est pas visible si l'écoulement est convergent : souffler ou aspirer dans un entonnoir ne produit le même écoulement que si Re est très petit.

La réversibilité a également une conséquence sur la symétrie des lignes de courant. Considérons l'écoulement autour d'un obstacle possédant un plan de symétrie (par exemple, le plan $x = 0$). Si $u(x, y, z)$ est solution de l'équation de Stokes, alors $-u$ est également solution. En renversant l'écoulement, la face amont est devenue la face aval et vice versa et comme l'obstacle est symétrique, on doit obtenir les mêmes lignes de courant que dans la configuration initiale, ce qui implique que : $u(x, y, z) - - > -u(-x, y, z) = -u(x, y, z)$ On remarquera sur la fig. 1.9 qui montre l'écoulement

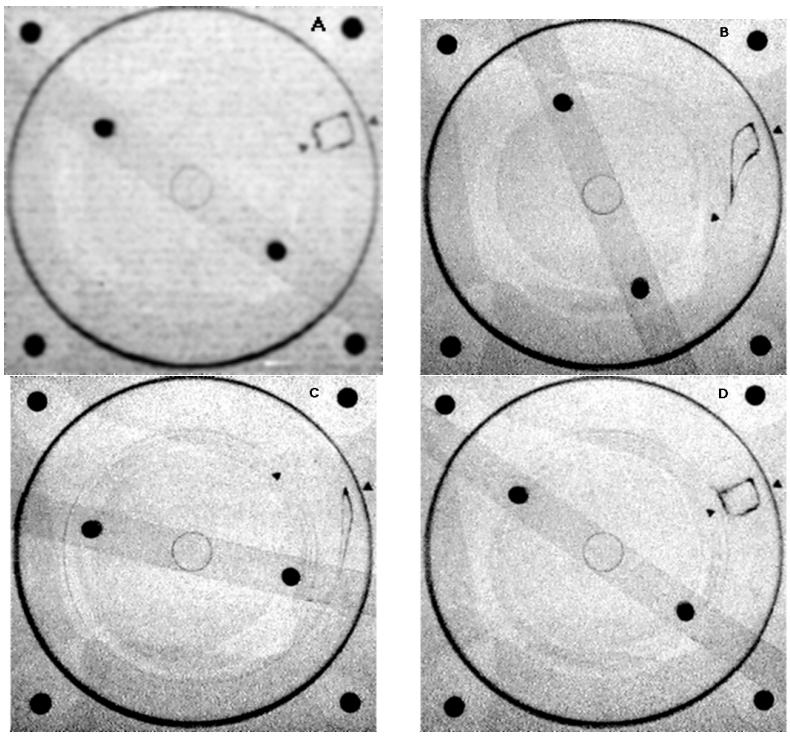


FIG. 5.1 – réversibilité de l'écoulement de Couette (vue de dessus). Au départ (en haut à gauche), on dessine un carré avec du colorant entre les deux cylindres. La position des cylindres est repérée par deux petits triangles. La rotation du cylindre intérieur déforme complètement le carré (en haut, à droite : θ= 20°, en bas à gauche, θ = 345°). Ensuite, on ramène le cylindre intérieur à son point de départ (en bas, à droite) ; le carré coloré se reconstitue. Il est légèrement déformé par la diffusion.

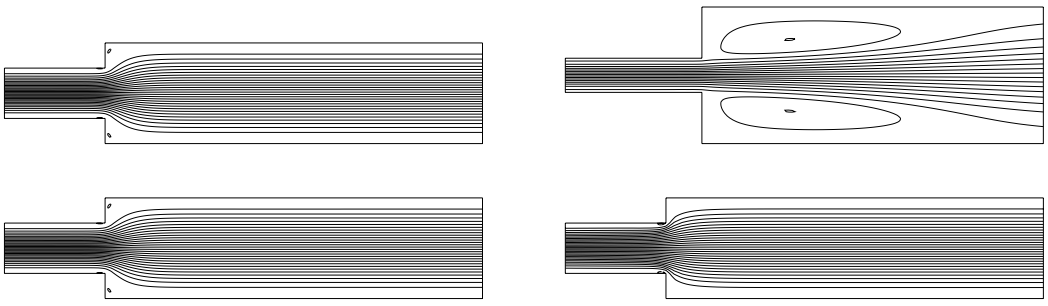


FIG. 5.2 – écoulement dans un convergent (ou divergent) à $Re = 0$ (à gauche) et $Re = 50$ (à droite). Sur les figures du haut l'écoulement va de gauche à droite, sur les figures du bas, de droite à gauche. Lignes de courant déterminées par résolution numérique de l'équation de Navier-Stokes.

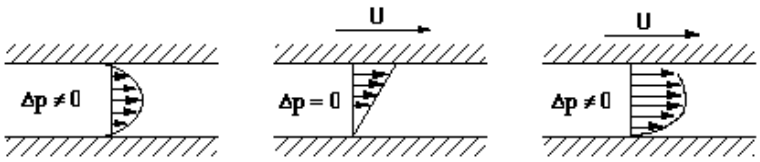


FIG. 5.3 – additivité des solutions de l'équation de Stokes pour l'écoulement dans un canal.

autour d'un cylindre à $Re = 1.5$ que la symétrie entre l'amont et l'aval est déjà brisée. Il faut effectivement des nombres de Reynolds très petits pour que l'inertie du fluide ne se manifeste pas dans ce type d'écoulements.

Enfin, la réversibilité cinématique a des conséquences fondamentales sur les modes de propulsion animale. Les organismes de très petite taille comme les bactéries et les spermatozoïdes vivent dans un monde où l'inertie est négligeable devant la viscosité. L'évolution a donc conduit à des modes de propulsion utilisant des cils ou des flagelles (fig. 3.9, 5.7 et 5.8) qui sont radicalement différents des modes de propulsion des organismes plus grands qui tirent partie de l'inertie du fluide[1].

5.1.3 Additivité des solutions

Une autre conséquence de la linéarité de l'équation de Stokes est la possibilité d'additionner simplement des solutions pour former une autre solution. Par exemple, considérons l'écoulement bidimensionnel dans un canal. Si les deux parois sont fixes, la solution est un profil de vitesse parabolique avec une courbure du profil proportionnelle au gradient de pression (voir le calcul de cet écoulement dans le § III.2.1). En revanche, si une des parois est mobile et s'il n'y a pas de gradient de pression, la solution est un écoulement avec un profil de vitesse linéaire. L'addition des deux solutions (addition des champs de vitesse et addition des gradients de pression) est également une solution de l'équation de Stokes. Elle correspond à la présence d'un gradient de pression dans le canal et à un mouvement d'une des parois.

5.2 Forces sur des objets à petit nombre de Reynolds

Une des applications importantes de l'équation de Stokes concerne les fluides contenant de petites particules solides (suspensions) ou des gouttelettes (émulsions). Le transport de sédiments fluviaux et marins, la flottation des minerais, l'écoulement de pâtes de céramiques, les solutions diluées de polymères sont, entre autres, décrits par la physique des suspensions. Si les dimensions des particules ou gouttelettes sont assez petites, l'écoulement sera décrit (au moins localement) par l'équation de Stokes.

5.2.1 Ecoulement autour d'une sphère

La première approche des écoulements de suspensions consiste à examiner l'écoulement d'une sphère : la symétrie du problème simplifie les résultats et bon nombre de particules colloïdales sont sphériques pour des raisons physico-chimiques.

Commençons par déterminer l'ordre de grandeur de la vitesse de sédimentation d'une sphère à petit nombre de Reynolds. La vitesse de sédimentation est telle que la force de traînée T équilibre le poids apparent de la sphère : $P = 4/3\pi a^3 \delta\rho g$ où $\delta\rho$ est la différence de masse volumique entre la sphère et le fluide. T est l'intégrale des contraintes sur la surface de la sphère. D'après l'équation de Stokes, l'ordre de grandeur de la pression et des contraintes de cisaillement est : $\eta U/a$. Le rayon de la sphère a est en effet la seule longueur caractéristique du problème et : $\Delta u \approx U/a^2$ et $\nabla p \approx p/a$.

[1] E.M. Purcell, "Life at low Reynolds number", *Am. J. Phys.* **45**, 3 (1977)

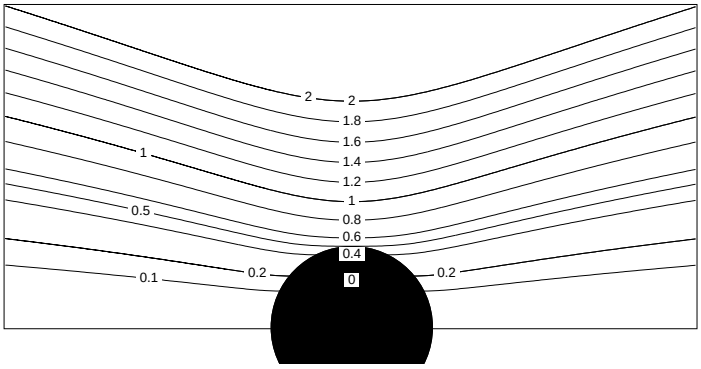


FIG. 5.4 – écoulement à petit Re autour d'une sphère. Lignes de courant dans le repère où le fluide est immobile à l'infini. Les valeurs de ψ sont normalisées par Ua^2.

En intégrant la contrainte sur la surface totale de la sphère, on obtient : $T \approx a^2\eta U/a = \eta a U$ et la vitesse de sédimentation :

$$U_{sed} \approx \frac{P}{\eta a} \approx \frac{\delta \rho g a^2}{\eta} \tag{5.4}$$

Ce raisonnement simple nous montre que la vitesse de sédimentation varie comme le carré du rayon de la particule. La résolution complète de l'équation de Stokes est assez longue et nous allons simplement donner les résultats du calcul. Dans le référentiel où la sphère est en mouvement à une vitesse U et le fluide à l'infini immobile, le champ de vitesse est donné par :

$$u_r = U\cos\phi\left(\frac{3a}{2r} - \frac{a^3}{2r^3}\right) \text{ et } u_\phi - U\sin\phi\left(\frac{3a}{4r} + \frac{a^3}{4r^3}\right) \tag{5.5}$$

où r et ϕ sont les coordonnées polaires définies par le centre de la sphère et l'axe x suivant lequel la sphère se déplace. Les lignes de courant correspondant au champ de vitesse donné par (5.5) sont représentées sur la figure 5.4. Elles correspondent à une fonction de courant :

$$\psi = Ur^2\sin^2\phi\left(\frac{3a}{4r} - \frac{a^3}{4r^3}\right)$$

Pour obtenir le champ de vitesse dans le repère où la sphère est immobile, il suffit d'ajouter $-U$ partout à la vitesse, ce qui correspond à ajouter $-1/2Ur^2\sin^2\phi$ à la fonction de courant. Les lignes de courant correspondantes sont représentées sur la fig. 5.5. Il faut noter que la perturbation engendrée par la sphère décroît très lentement (en $1/r$) à grande distance. En revanche, dans un écoulement à nombre de Reynolds élevé, le sillage d'un objet en mouvement s'atténue très rapidement (dans la direction normale à l'écoulement). Cette lente décroissance de la perturbation à $Re \ll 1$ fait que dans une suspension les particules interagissent fortement entre elles dès l'instant où la concentration dépasse quelques % en volume. Ce sont des interactions hydrodynamiques dues au mouvement du fluide entre les particules et qui se rajoutent aux autres interactions (électrostatiques par exemple).

A partir du champ de vitesse (5.5) on calcule les contraintes à la surface de la sphère et la force de traînée :

$$T = 6\pi\eta a U \tag{5.6}$$

La valeur exacte de la vitesse de sédimentation est donc :

$$U_{sed} = \frac{2}{9}\frac{\delta \rho g a^2}{\eta} \tag{5.7}$$

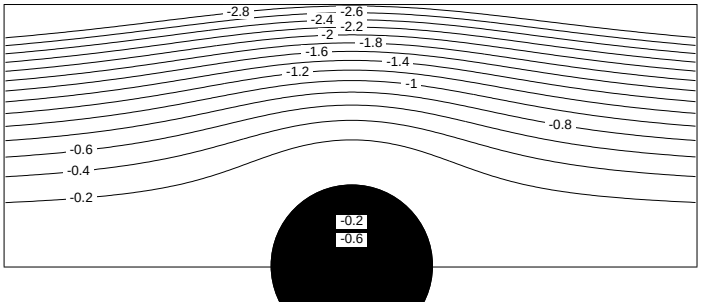


FIG. 5.5 – écoulement à petit Re autour d'une sphère. Lignes de courant dans le repère où la sphère est immobile.

5.2.2 Écoulement autour d'un corps élancé

La détermination de la force exercée sur un objet très allongé est essentielle pour comprendre les modes de propulsion par cils et flagelles des microorganismes. Dans le cas d'un objet cylindrique de grand rapport d'aspect ($L \gg a$) la force de traînée F_n pour un déplacement perpendiculaire à l'axe et F_t pour un déplacement parallèle à l'axe sont :

$$F_n = \frac{4\pi\eta L U_n}{\ln(L/a) + 0.5} \; F_t = \frac{2\pi\eta L U_t}{\ln(L/a) - 0.5} \tag{5.8}$$

où U_n et U_t sont les vitesses normale et tangente à l'axe de l'objet. On notera que pour les très grands allongements $\ln(L/a) \gg 1$, la résistance au déplacement orthogonal à l'axe est deux fois plus grande que la résistance au déplacement longitudinal. Cette anisotropie des résistances implique que la force visqueuse n'est pas colinéaire à la vitesse lorsque l'axe du bâtonnet est incliné par rapport à la direction de déplacement (fig. 5.6).

Le résultat obtenu sur un batonnet rigide, à savoir l'anisotropie de friction d'un facteur 2, peut être étendu à tout corps très allongé et, en particulier, aux cils et flagelles propulsant les microorganismes (fig.5.7 et 5.8). Connaissant la vitesse locale de déplacement d'un cil, on peut ainsi en déduire forces normales et tangentielles et les intégrer le long du cil pour calculer la force propulsive totale.

5.3 Lubrification

5.3.1 Principe de la lubrification

Une des circonstances importantes dans laquelle l'inertie du fluide peut être négligée concerne les écoulements dits de lubrification. Ce terme recouvre les écoulements de fluides visqueux confinés entre deux parois solides très proches en mouvement relatif. Les deux parois délimitent un espace de très grand rapport d'aspect : l'épaisseur moyenne $< h >$ est très petite devant la longueur L. De plus, si l'épaisseur h varie d'un point à un autre de l'écoulement, nous nous restreignons au cas où cette variation est très lente, c'est-à-dire : $dh/dx \ll 1$.

Cette géométrie particulière a deux conséquences :

– la composante longitudinale de vitesse u est beaucoup plus grande que la composante transverse v. En effet, la conservation de la masse impose :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \approx \frac{u}{L} + \frac{v}{h} = 0 \tag{5.9}$$

d'où :

$$u \approx v\frac{L}{h} \gg v \tag{5.10}$$

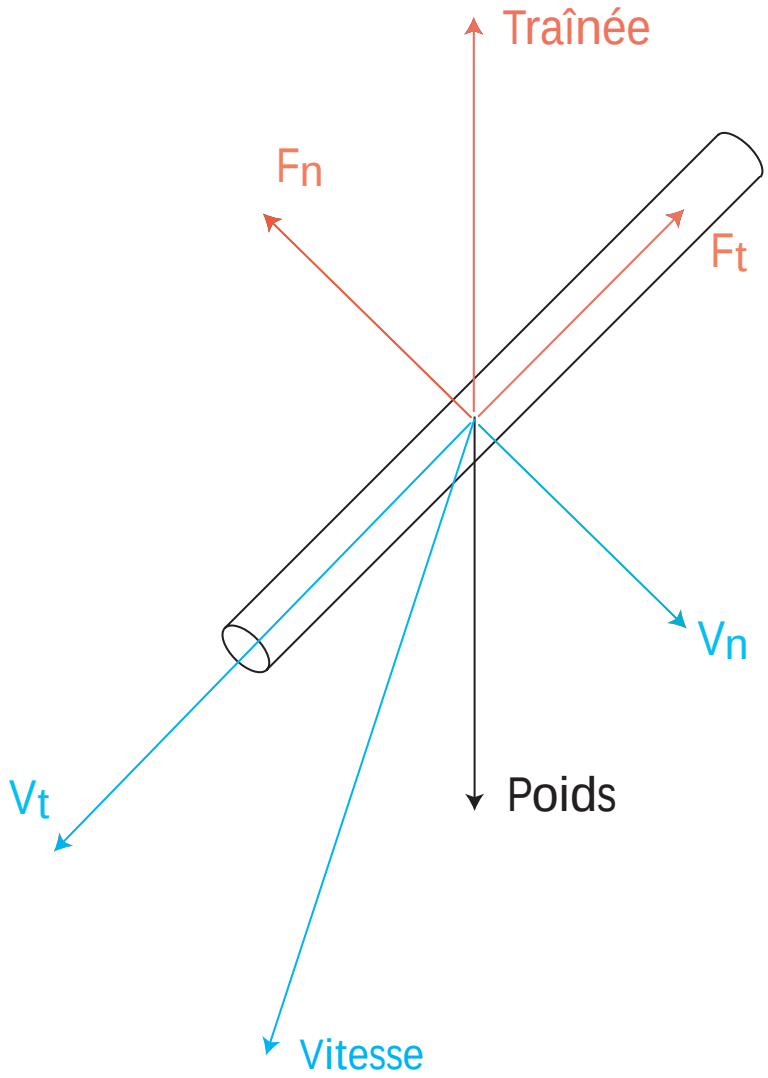


FIG. 5.6 – Décomposition des composantes de vitesse et de force sur un objet allongé à petit nombre de Reynolds.

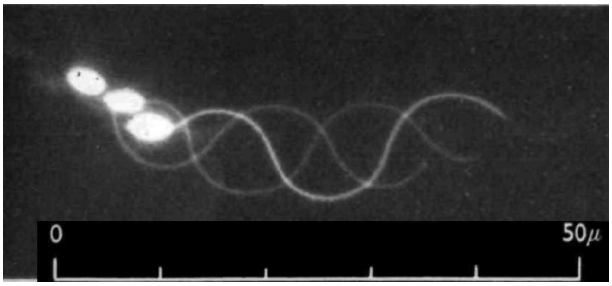


FIG. 5.7 – Propulsion par flagelle unique : spermatozoïde de *Ciona intestinalis* photographié à des intervalles de 20 ms. Une onde progressive de déformation se propage le long du flagelle. Image tirée de C.J. Brokaw, *J. Exp. Biol.* **43**, 155 (1965)

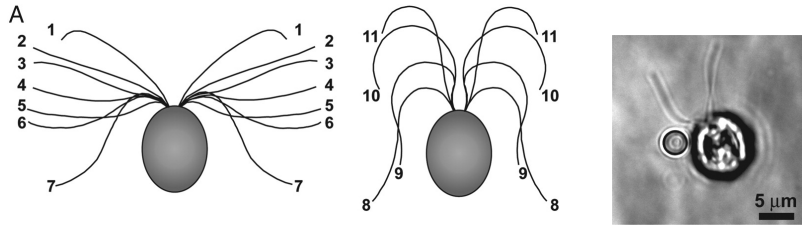


FIG. 5.8 – Propulsion par deux cils de l'algue verte *Chlamydomonas*. À gauche, séquence de battement ciliaire, phase de propulsion (1-7) et phase de retour (8-11).À droite, micrographie de la cellule avec un colloïde attaché. Noter que la forme des cils dans les phases aller et retour est différente. C'est une absolue nécessité à très petit Reynolds pour obtenir une force propulsive moyenne non nulle. Images tirées de D.B. Weibel et al., *PNAS*, **102**, 11963 (2005)

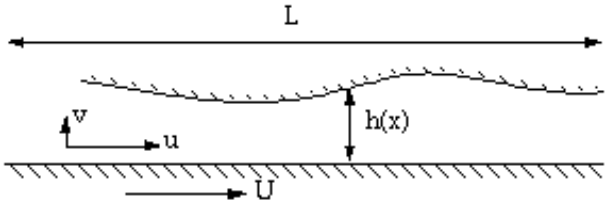


FIG. 5.9 – Géométrie typique d'un écoulement de lubrification.

– la force qui s'exerce sur les parois est beaucoup plus grande dans la direction normale à l'écoulement que dans la direction parallèle à l'écoulement. La force normale F_n est l'intégrale de la pression sur une des parois solides : $F_n = \int_0^L (p-p_0)\,dx \approx (p-p_0)L$. Toujours en tenant compte du rapport d'aspect $L/h \gg 1$, il est possible de déterminer un ordre de grandeur de la pression à partir de l'équation de Stokes :

$$\eta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \approx \eta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \eta\frac{U}{h^2} = \frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{p-p_0}{L} \tag{5.11}$$

d'où :

$$p - p_0 \approx \eta\frac{UL}{h^2}\ et\ F_n \approx \eta\frac{UL^2}{h^2} \tag{5.12}$$

D'autre part la force F_t dans la direction parallèle à l'écoulement est l'intégrale de la contrainte tangentielle sur la paroi solide :

$$F_t = \int_0^L \sigma_{xy}\,dx = \int_0^L \eta\frac{\partial u}{\partial y}\,dx \approx \eta\frac{UL}{h} \tag{5.13}$$

d'où :

$$F_t = F_n\frac{h}{L} \ll 1 \tag{5.14}$$

Le rapport des deux composantes de force est égal au rapport des dimensions caractéristiques de l'écoulement. Ceci permet de supporter des charges importantes tout en conservant la possibilité d'un mouvement relatif avec une résistance faible. C'est le principe utilisé dans la lubrification des pièces mécaniques en rotation, dans les articulations entre les os, dans la sustentation des têtes de lecture de disques magnétiques ...

Notons que les approximations faites ci-dessus peuvent aussi s'appliquer au cas d'une couche mince de liquide s'étalant sur une surface solide, c'est-à-dire aux problèmes de mouillage ainsi qu'à l'écoulement dans les films de savon.

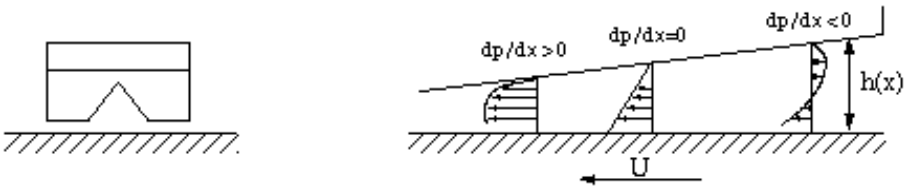


FIG. 5.10 – Tête de lecture vue de face (à gauche). Profils de vitesse dans une couche de liquide d'épaisseur variable.

5.3.2 Sustentation d'une tête de lecture

L'augmentation de la densité de données sur les disques durs impose une distance entre la tête de lecture et la surface du disque très faible. Cette distance est actuellement couramment de 0,25 μm. Elle devrait descendre très prochainement à 0,05 μm. Aucun asservissement n'étant capable de maintenir cette "hauteur de vol", c'est l'écoulement d'air entre la tête et le disque qui assure cette fonction. Dans beaucoup de cas, la tête de lecture a une forme de "catamaran" avec deux patins séparés par une encoche et une partie avant en pente douce. Nous allons calculer l'écoulement dans cette partie en biseau qui définit une couche de fluide d'épaisseur : $h = h_0 + \theta x$.

Pour la composante u, l'équation de Stokes se ramène à :

$$\eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial p}{\partial x} = G \tag{5.15}$$

où le gradient de pression G ainsi que u dépendent, a priori, de x. En supposant que h varie lentement ($\theta \ll 1$), donc que le champ de vitesse évolue également lentement avec x, nous pouvons intégrer 5.15 en y comme si l'écoulement était unidimensionnel et comme si u ne dépendait que de y. En se plaçant dans le repère où la tête est immobile et le disque se déplace, les conditions aux limites sont : $u = -U$ en $y = 0$ et $u = 0$ en $y = h(x)$. Ce qui donne :

$$u = \frac{G}{2\eta}(y^2 - yh) + U\left(\frac{y}{h} - 1\right) \tag{5.16}$$

Ce profil de vitesse est la superposition d'un profil parabolique dû au gradient de pression et d'un profil linéaire dû au mouvement relatif des deux surfaces solides. En intégrant 5.16 sur toute l'épaisseur, nous obtenons le débit de fluide qui est constant dans toute la longueur de l'écoulement :

$$Q = \int_0^h u dy = -\frac{Gh^3}{12\eta} - \frac{Uh}{2} \tag{5.17}$$

d'où :

$$G = \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial h}\frac{dh}{dx} = -6\eta\left(\frac{2Q}{h^3} + \frac{U}{h^2}\right) \tag{5.18}$$

Le gradient de pression s'annule lorsque $h = h_m = -2Q/U$ (le débit est négatif parce que le fluide se déplace dans la direction $-x$). Il est positif lorsque h est inférieur à h_m et négatif si h est supérieur à h_m. Le profil de vitesse est linéaire lorsque $G = 0$. Si h est différent de h_m, le profil de vitesse est parabolique avec une concavité dont le signe dépend de G. En intégrant 5.18 en h et en prenant $p = p_0$ en $h = h_0$, il vient :

$$p - p_0 = \frac{6\eta}{\theta}\left[Q\left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{h_0^2}\right) + U\left(\frac{1}{h} - \frac{1}{h_0}\right)\right] \tag{5.19}$$

Si nous supposons qu'à l'autre extrémité du plan incliné, où $h = h_1 = h_0 + \theta L$, la pression est aussi égale à p_0, l'équation 5.19 fixe le débit :

$$Q = -U\frac{h_0 h_1}{h_0 + h_1} \tag{5.20}$$

La force de sustentation F_N est obtenue par intégration de la surpression qui règne dans le coin de fluide :

$$F_N = \int_0^L (p - p_0)dx = \frac{6\eta U}{\theta^2}\left[\ln\frac{h_1}{h_0} - \frac{2(h_1 - h_0)}{h_0 + h_1}\right] \tag{5.21}$$

alors que la force tangentielle est obtenue par intégration de la contrainte de cisaillement :

$$F_T = \int_0^L \eta\frac{\partial u}{\partial y}dx = -2\frac{\eta U}{\theta}\left[\ln\frac{h_1}{h_0} - \frac{3(h_1 - h_0)}{h_0 + h_1}\right] \tag{5.22}$$

L'ordre de grandeur de F_N/F_T est $1/\theta$ soit $L/(h_1-h_0) \ll 1$. Le fait d'avoir un plan très légèrement incliné permet d'engendrer une force normale très importante.

5.4 Écoulement dans un milieu poreux

5.4.1 Loi de Darcy

Les écoulements dans les milieux poreux sont a priori très difficiles à modéliser compte tenu de l'extrême complexité de la géométrie de ces milieux. Néanmoins, il est possible d'établir une relation simple entre la vitesse moyenne du fluide $\bar{u}$ et le gradient de pression moyen $\bar{G}$. Dans chacun des pores qui constitue l'espace occupé par le fluide, l'écoulement est similaire à un écoulement de Poiseuille, même si la géométrie du pore est plus complexe que celle d'un tube de section circulaire. Le point essentiel est que de la vitesse moyenne u dans chacun des pores est proportionnelle au gradient de pression local G : $u \propto (1/\eta)d^2G$ où d est une longueur représentative du diamètre des pores. Si nous regardons maintenant l'écoulement à une échelle beaucoup plus grande que celle des pores, mais qui peut être nettement plus petite que les dimensions totales du milieu poreux, nous pouvons définir une vitesse moyenne $\bar{u}$ et un gradient de pression moyen $\bar{G}$. Ces deux quantités sont obtenues par intégration de u et g sur une longueur assez grande pour que les fluctuations dues à la variabilité des pores disparaissent. L'intégration conserve la linéarité de la relation entre u et G et l'équation qui en résulte est la loi de Darcy :

$$\bar{\mathbf{u}} = -\frac{k}{\eta}\nabla\bar{p} \tag{5.23}$$

où k est un paramètre qui caractérise le milieu poreux et qui a la dimension du carré d'une longueur ; c'est la perméabilité du milieu poreux. Notons que la loi de Darcy, écrite sous la forme suivante :

$$\eta\frac{\bar{\mathbf{u}}}{k} = -\nabla\bar{p} \tag{5.24}$$

est analogue à l'équation de Stokes, le terme u/k remplaçant Δu. Pour une géométrie donnée (par exemple un empilement régulier de sphères), la perméabilité est proportionnelle au carré de la dimension des objets qui constituent le milieu poreux. Exemples de perméabilités :

- sable : 2×10^{-7} à $2 \times 10^{-7}\text{cm}^2$
- grès : 5×10^{-12} à $3 \times 10^{-8}\text{cm}^2$
- sols : 3×10^{-9} à $1 \times 10^{-7}\text{cm}^2$
- cigarette : 10^{-5}cm^2

Pour les très faibles perméabilités, en particuliers les sols, on utilise une unité de perméabilité adaptée, le Darcy égal à 1 micron carré

Le champ de vitesse moyenné dérive d'un potentiel proportionnel à la pression moyennée. Cette propriété simple permet de résoudre assez aisément les problèmes d'écoulement dans les sols : la condition d'incompressibilité associée à la loi de Darcy implique que le champ de pression obéisse à l'équation de Laplace. Il suffit donc en principe de résoudre l'équation de Laplace avec les conditions aux limites appropriées.

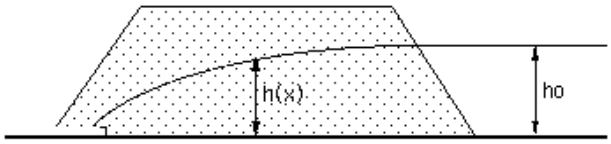


FIG. 5.11 – Schéma d'une digue en terre

Exemple d'application de la loi de Darcy : écoulement dans une digue en terre

Parfois une solution approchée peut être trouvée comme dans l'exemple du barrage en terre, expliqué ci-dessous. Un barrage en terre n'est pas totalement imperméable : l'eau s'infiltre dans la masse de la digue. Mais cette infiltration n'est pas catastrophique si l'eau ne ressort pas sur la face aval du barrage et n'érode pas la digue. L'eau infiltrée est recueillie par un drain placé au bas de la face aval de la digue (fig. 5.11).

Supposons que l'écoulement dans le barrage est suffisamment faible pour ne perturber que très peu la répartition de pression hydrostatique. Alors, dans chaque section x du barrage, la répartition de pression est : où p_0 est la pression atmosphérique et $h(x)$ la hauteur d'eau à l'intérieur de la digue. Dans cette approximation, l'écoulement n'a qu'une seule composante de vitesse suivant l'axe x :

$$u_x = -\frac{k}{\eta}\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{k\rho g}{\eta}\frac{\partial h}{\partial x} \tag{5.25}$$

et le débit d'eau infiltrée est donné en intégrant u_x sur toute la hauteur h :

$$Q = \int_0^{h(x)} u_x dz = -\frac{k\rho g}{2\eta}\frac{\partial h^2}{\partial x} \tag{5.26}$$

La hauteur d'eau est donc telle que :

$$h^2 = h_0^2 - \frac{2\eta Q}{k\rho g}x \tag{5.27}$$

où h_0 est la hauteur d'eau dans le réservoir. La longueur minimale du barrage pour que l'eau infiltrée ne sorte pas sur la face aval est donc donnée par :

$$L = \frac{k\rho g h_0^2}{2\eta Q} \tag{5.28}$$

Si le drain (où règne la pression p_0, ce qui implique $h(l) = 0$) est placé à une distance l de la face amont de la digue, le débit d'eau infiltrée est fixé par (5.27) :

$$Q = \frac{k\rho g h_0^2}{2\eta l} \tag{5.29}$$

On pourrait retrouver le résultat ci-dessus par un raisonnement dimensionnel : l'ordre de grandeur du gradient de pression à travers la digue est : $\nabla p \approx \frac{\rho g h_0}{l}$. La vitesse moyenne est donnée par la loi de Darcy : $u = \frac{k}{\eta}\nabla p$ et le débit est de l'ordre de $Q \approx u h_0$. Les résultats énoncés ci-dessus ne sont valides que si le champ de vitesse reste approximativement unidimensionnel, c'est-à-dire si dh/dx reste petit devant 1. En effet, la surface libre étant à pression constante il s'agit d'une ligne de courant. La surface inférieure de la digue ($z = 0$) est également une ligne de courant. La ligne de courant la plus inclinée sur l'horizontale est la surface libre et le rapport u_y/u_x est donné par la pente de la surface libre dh/dx .

5.4.2 Modèle de tubes tortueux

Si l'on met à part quelques configurations simples comme l'empilement périodique de sphères, il est impossible de prédire exactement la perméabilité d'un milieu poreux même si sa géométrie

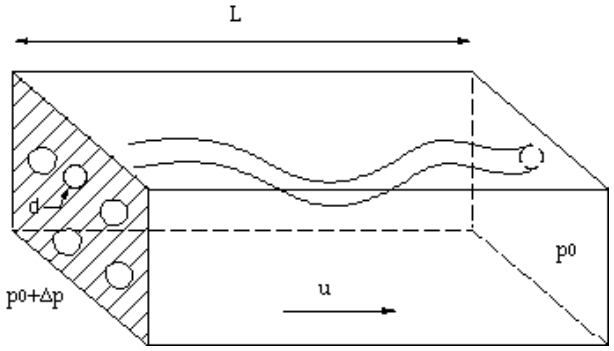


FIG. 5.12 – Modèle de tubes tortueux pour un milieu poreux.

est parfaitement connue. Il faut avoir recours à la détermination expérimentale ou à des modèles approximatifs pour connaître k. Un de ces modèles consiste à remplacer le milieu poreux réel par un ensemble de canaux tortueux de section circulaire. Si L est la longueur du milieu poreux dans la direction moyenne de l'écoulement, la longueur effective de chaque tube est : $L' = TL$ où T est la tortuosité du chemin emprunté par le fluide. Dans un milieu à très faible porosité, T peut être nettement plus grand que 1. Le gradient de pression effectif dans chaque tube est $\Delta p/L' = \Delta p/TL$ où Δp est la différence de pression entre les deux extrémités du poreux. Nous appliquons la loi de Poiseuille qui donne le débit dans chaque tube de diamètre d :

$$q = \frac{\pi d^4}{128\eta}\frac{\Delta p}{TL} \tag{5.30}$$

Le débit total dans le milieu poreux est : $Q = Nq$ où N est le nombre total de tubes et la vitesse moyenne est : $\bar{u} = nq$ où n est le nombre de tubes par unité de surface (sur une coupe du poreux perpendiculairement à l'écoulement). Exprimons maintenant la perméabilité du milieu en fonction de sa porosité α, de sa surface spécifique σ et de la tortuosité. La porosité est la fraction de volume occupée par le fluide. La surface spécifique est l'aire de contact entre le fluide et le solide par unité de volume. Dans notre modèle de tubes : $\alpha = n\pi d^2/4$ et $\sigma = n\pi dT$, ce qui donne une perméabilité telle que :

$$k = \frac{\alpha^3}{2\sigma^2 T^2} \tag{5.31}$$

Ce résultat est connu sous le nom de relation de Cozeny-Karman. Il n'est pas restreint à un modèle de tubes et s'applique correctement à un certain nombre de milieux poreux. Mais il est souvent incorrect pour des distributions de particules (ou de pores) très larges, pour des particules non sphériques. Il existe évidemment d'autres modèles plus sophistiqués qui rendent compte plus précisément des perméabilités mesurées.

5.4.3 Ecoulements multiphasiques

Nous avons parlé jusqu'à présent d'écoulements monophasiques dans le milieux poreux (au sens où il y a une seule phase fluide). Mais en hydrologie et en génie pétrolier, on est toujours confronté à des écoulements multiphasiques (eau-air ou huile-eau). La présence d'interfaces fluides ajoute encore à la complexité du problème. Mentionnons simplement que la répartition de pression est considérablement modifiée par le pression capillaire : $p_c \approx \gamma/d$, où γ est la tension interfaciale, et que la forme globale (à une échelle plus grande que le pores) de l'interface entre les deux phases peut être différente selon les conditions de déplacement des fluides.