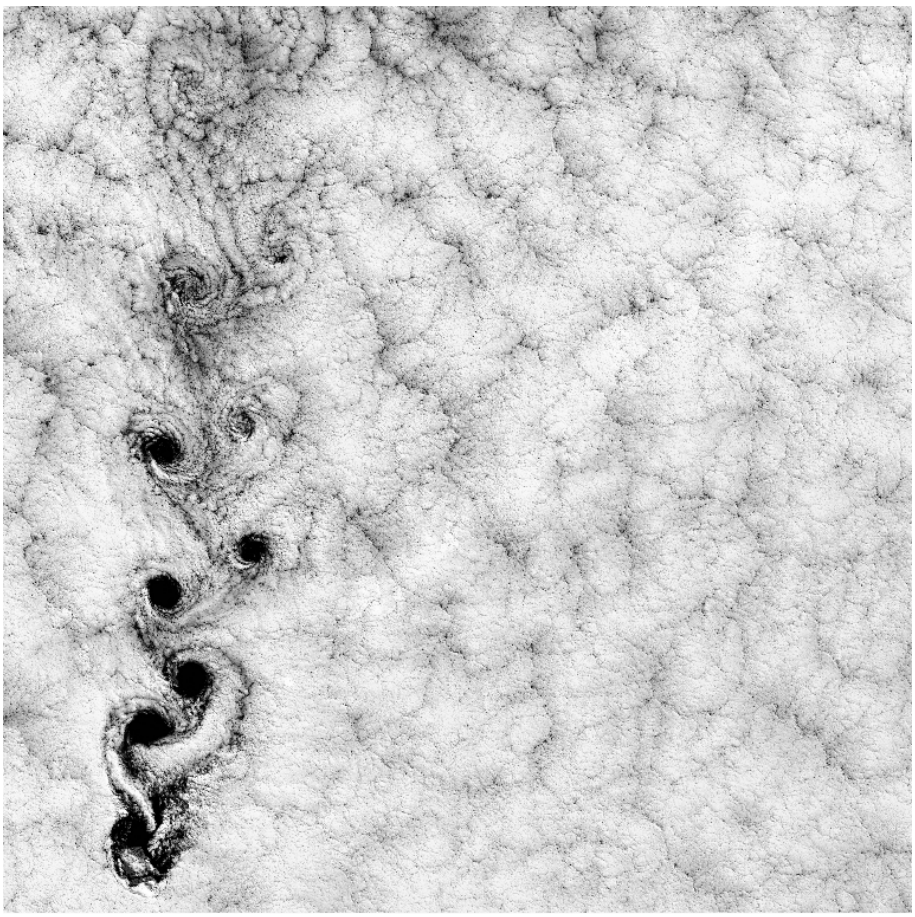
Mécanique des Fluides



Marc Fermigier

ParisTech - ESPCI - Laboratoire de Physique et Mécanique des Milieux Hétérogènes

Les figures 1.11, 2.5, 8.1, 8.3, 8.4, 8.5 et 8.6 sont tirées du livre de M. Van Dyke, " An Album of Fluid Motion ", Parabolic Press, 1982. La figure A.13a est tirée du livre de D.V. Bogers et K. Walters, " Rheological Phenomena in Focus ", Elsevier 1993. Les résultats présentés sur la figure 10.3 ont été obtenus par A. Bakker avec le logiciel Fluent. Les simulations numériques sont réalisées avec le logiciel Charisma écrit par Ralph Goodwin et Andrew Yeckel à l'Université d'Illinois Urbana-Champaign.

Photographie de couverture : allée de tourbillons de Bénard-von Karman sous le vent de l'île Alexander Selkirk (Image courtesy of USGS National Center for EROS and NASA Landsat Project Science Office).

Copyright M. Fermigier 2007
Reproduction interdite sans autorisation

Table des matières

1 INTRODUCTION **1**
- 1.1 Du microscopique à la géophysique . . . 1
- 1.2 Qu'est-ce qu'un fluide ? . . . 5
- 1.3 L'hypothèse de continuité . . . 7
- 1.4 Notion de viscosité . . . 7
- 1.5 Transport diffusif . . . 8
- 1.6 Transport convectif . . . 10

2 CINÉMATIQUE **13**
- 2.1 Descriptions eulérienne et lagrangienne. . . . 13
- 2.2 Dérivée "particulaire" de la vitesse. . . . 13
- 2.3 Lignes de courant.Tubes de courant. . . . 14
- 2.4 Conservation de la masse. . . . 16
- 2.5 Fonction de courant . . . 17
- 2.6 Déformations dans un écoulement . . . 18
  - 2.6.1 Décomposition du gradient de vitesse . . . 18
  - 2.6.2 Écoulement de cisaillement simple . . . 20
  - 2.6.3 Écoulement élongationnel . . . 20

3 DYNAMIQUE **22**
- 3.1 Contraintes . . . 22
  - 3.1.1 Représentation des forces de surface par le tenseur des contraintes . . . 22
  - 3.1.2 Tenseur des contraintes dans un fluide en mouvement . . . 23
- 3.2 Ecoulements simples . . . 25
  - 3.2.1 Écoulement dans un tube (écoulement de Poiseuille) . . . 25
  - 3.2.2 Écoulement entre deux cylindres (écoulement de Couette) . . . 27
- 3.3 L'équation de Navier-Stokes . . . 29
  - 3.3.1 Equation de la vorticité . . . 30
- 3.4 Conditions aux limites . . . 30
  - 3.4.1 Interface solide-fluide . . . 30
  - 3.4.2 Interface fluide-fluide. Tension de surface . . . 30
- 3.5 Notion de similitude . . . 33

4 LOIS DE CONSERVATION **35**
- 4.1 Quantité de mouvement . . . 35
  - 4.1.1 Conservation de la quantité de mouvement . . . 35
  - 4.1.2 Exemple d'application de la conservation de la quantité de mouvement : force exercée par l'écoulement sur une conduite coudée . . . 36
- 4.2 Conservation de l'énergie . . . 37
  - 4.2.1 Loi d'évolution de l'énergie cinétique . . . 37
  - 4.2.2 Dissipation d'énergie par viscosité . . . 38
  - 4.2.3 Loi de Bernoulli . . . 39

4.3 Applications des lois de conservation . . . 41
4.3.1 Ressaut hydraulique . . . 41
4.3.2 Ecoulement à surface libre au-dessus d'un obstacle . . . 43

5 ÉCOULEMENTS VISQUEUX 45
5.1 Équation de Stokes . . . 45
5.1.1 L'équation de Stokes . . . 45
5.1.2 Réversibilité cinématique . . . 46
5.1.3 Additivité des solutions . . . 48
5.2 Forces à petit Reynolds . . . 48
5.2.1 Ecoulement autour d'une sphère . . . 48
5.2.2 Écoulement autour d'un corps élancé . . . 50
5.3 Lubrification . . . 50
5.3.1 Principe de la lubrification . . . 50
5.3.2 Sustentation d'une tête de lecture . . . 53
5.4 Milieux poreux . . . 54
5.4.1 Loi de Darcy . . . 54
5.4.2 Modèle de tubes tortueux . . . 55
5.4.3 Ecoulements multiphasiques . . . 56

6 ÉCOULEMENTS INERTIELS 57
6.1 Répartition de pression. Effet Coanda . . . 57
6.1.1 Effet Coanda. . . . 58
6.2 Ecoulements potentiels . . . 58
6.2.1 Propriétés du potentiel des vitesses . . . 58
6.2.2 Ecoulements potentiels simples . . . 59
6.2.3 Ecoulement autour d'un cylindre . . . 61
6.3 Forces en écoulement potentiel . . . 63
6.3.1 Potentiel des vitesses à grande distance du corps . . . 63
6.3.2 Force sur un corps solide . . . 64
6.4 Conservation de la circulation. Théorème de Kelvin. . . . 66
6.4.1 Théorème de Kelvin . . . 66
6.4.2 Une manifestation du théorème de Kelvin : le tourbillon de vidange . . . 67
6.4.3 Théorème de Kelvin et dynamique de la vorticité. . . . 67
6.5 Surfaces portantes . . . 68

7 COUCHES LIMITES 71
7.1 La notion de couche limite . . . 71
7.1.1 Approximations de l'équation de Navier-Stokes dans une couche limite. . . . 72
7.2 Couche limite sur une plaque plane . . . 73
7.3 Avec gradient de pression extérieur . . . 76
7.3.1 Influence de l'accélération ou décélération de l'écoulement externe . . . 76
7.3.2 Solutions autosimilaires pour un écoulement externe en x^m . . . 77
7.3.3 Conséquences du décollement de la couche limite . . . 77
7.3.4 Contrôle de la couche limite . . . 79

8 INSTABILITES ET TURBULENCE 81
8.1 Instabilités . . . 81
8.1.1 Instabilité de Taylor-Couette . . . 81
8.1.2 Instabilité de Kelvin-Helmholtz . . . 82
8.1.3 Instabilité de Rayleigh-Bénard . . . 83
8.2 Turbulence . . . 84
8.2.1 La nature de la turbulence . . . 84
8.2.2 Description statistique du champ de vitesse . . . 85

8.2.3 Couche limite turbulente . . . 86
8.2.4 Multiplicité des échelles spatiales et caractère dissipatif . . . 86

9 TRANSPORT CONVECTIF 89
9.1 Transport de masse et chaleur . . . 89
9.2 Diffusion et convection couplées . . . 90
9.3 De l'art de bien mélanger . . . 93
9.4 Dispersion de Taylor . . . 95

A FLUIDES NON NEWTONIENS 96
A.1 Fluides non newtoniens et rhéologie . . . 96
A.2 Comportement non linéaire . . . 96
A.2.1 Relations empiriques pour la viscosité . . . 96
A.2.2 Fluide de Bingham . . . 98
A.2.3 Comportement rhéoépaississant . . . 98
A.3 Viscoélasticité linéaire . . . 99
A.3.1 Expérience de fluage . . . 100
A.3.2 Relaxation de contrainte . . . 101
A.3.3 Sollicitation périodique . . . 101
A.4 Anisotropie des contraintes normales . . . 102

B Propriétés physiques de quelques fluides 106

C Petit catalogue de nombres sans dimension 107

D Notions élémentaires sur les tenseurs 109

E Coordonnées cylindriques et sphériques 111
E.1 Équation de Navier-Stokes . . . 111
E.1.1 Coordonnées cylindriques r, θ, x . . . 111
E.1.2 Coordonnées sphériques r, θ, φ . . . 111
E.2 Relations entre vitesse , potentiel et fonction de courant . . . 112
E.2.1 Ecoulement bidimensionnel . . . 112
E.2.2 Ecoulement tridimensionnel . . . 112
E.2.3 Ecoulement tridimensionnel avec symétrie de révolution . . . 112

F Quelques repères historiques 113

G Références bibliographiques 115
G.1 Ouvrages généraux . . . 115
G.2 Ouvrages plus spécialisés . . . 115
G.3 Pour une application ludique de la mécanique des fluides . . . 116

Chapitre 1

INTRODUCTION

1.1 La mécanique des fluides du microscopique à la géophysique

La dynamique des fluides joue un rôle essentiel dans de nombreux systèmes avec des échelles de vitesse et de longueur extrêmement différentes, aussi bien dans les écoulements naturels que dans les procédés industriels.

Prenons quelques exemples pour illustrer cette ubiquité de la dynamique des fluides en commençant par un domaine classique de l'ingénieur : l'aéronautique. La conception aérodynamique d'un avion de ligne doit satisfaire, a priori, à des exigences relativement simples : assurer une force de sustentation (portance) donnée tout en minimisant la résistance à l'avancement (force de traînée) en vitesse de croisière et assurer la sécurité des phases transitoires de vol (décollage, atterrissage). L'écoulement de l'air autour des ailes ne sert qu'à modifier la répartition de pression de manière à assurer la sustentation de l'avion. En réalité, la conception des surfaces portantes nécessite de longues études expérimentales et numériques et des profils à géométrie variable sont utilisés dans les phases transitoires du vol. On pourrait penser, en comparant un Boeing 707 vieux de cinquante ans et un récent Airbus A380, que l'aviation civile a atteint un optimum dans la conception, les deux avions ayant une forme générale très voisine. Néanmoins, le concept d'aile volante déjà utilisé en aviation militaire pourrait apporter des améliorations significatives de consommation et de nuisances sonores (fig. 1.1).

Dans les applications aéronautiques, les vitesses d'écoulement mises en jeu vont du m/s à quelques centaines de m/s et les échelles de longueur caractéristiques de l'écoulement vont de quelques cm à quelques dizaines de m.

Pour descendre dans les échelles de longueur, empruntons un exemple à la biologie : la circulation de l'oxygène dans notre organisme est assurée par l'écoulement du sang à travers un système complexe de canalisations, artères et veines, dont le diamètre varie du cm à quelques microns. La consommation d'oxygène est régulée en partie par le débit sanguin : la fréquence cardiaque contrôle le débit global ; la vasodilatation permet un contrôle local du débit, par exemple lors d'un effort physique, la proportion de sang envoyé vers les muscles augmente. De nombreuses pathologies sont liées à l'obstruction partielle des vaisseaux et à la diminution de débit qui en résulte. Dans les systèmes biologiques, les effets purement mécaniques sont généralement intimement liés à des effets physico-chimiques. Ainsi l'adaptation à la vie en haute altitude conduit à une augmentation de la concentration en globules rouges, augmentation de concentration qui s'accompagne d'une augmentation de la viscosité du sang, donc d'une résistance à l'écoulement accrue.

Différence essentielle avec l'aéronautique : le rôle premier de l'écoulement du fluide est ici le transport d'une substance en solution. Il existe un autre mécanisme de transport essentiel : la diffusion moléculaire (mouvement brownien) mais il est terriblement inefficace à grande échelle : il suffit de ne pas agiter son thé ou son café avec une cuillère pour se rendre compte que la diffusion du sucre est extrêmement lente ; en fait, il faudrait une journée entière pour que le sucre diffuse dans toute la tasse.



FIG. 1.1 – Les progrès de l'aviation en un pe plus d'un siècle, depuis le planeur d'Otto Lilienthal (1894) jusqu'aux avions de ligne modernes Boeing 707 (1954), Airbus A380 et au concept d'aile volante, illustré par le prototype X48. Photos : Archive Otto-Lilienthal-Museum / www.lilienthal-museum.de, Boieng, Airbus et NASA.

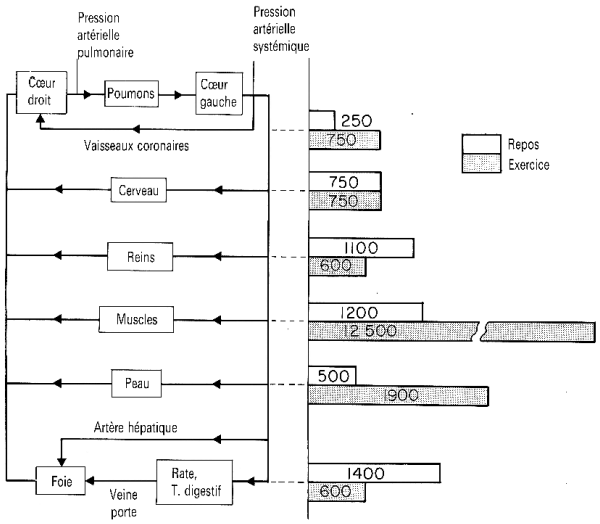


FIG. 1.2 – Répartition schématique du débit sanguin dans les principaux organes, au repos et pendant un exercice physique.Illustration tirée de J.F. Lamb et al., Manuel de Physiologie, Masson 1990

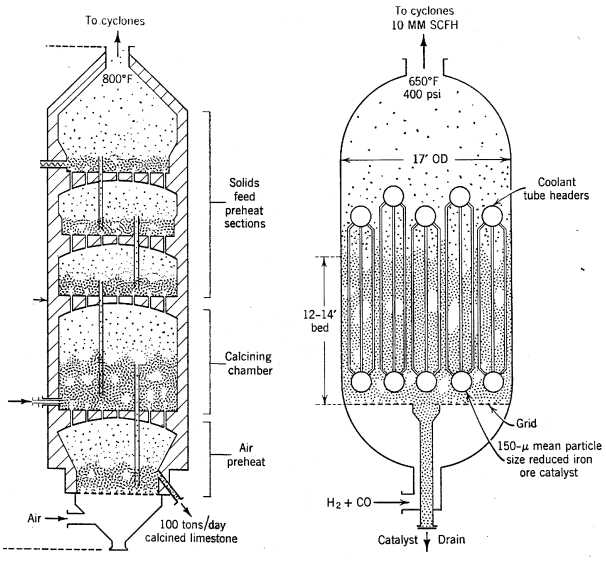


FIG. 1.3 – Schéma de deux lits fluidisés l'un pour la calcination du calcaire, l'autre pour effectuer une réaction catalytique. D'après The Kirk-Othmer Encyclopedia of Chemical Technology.

Autre différence essentielle : le fluide mis en jeu n'est plus un corps simple en phase fluide mais un liquide complexe, une suspension de vésicules déformables, avec de nombreux ions et macromolécules en solution. Néanmoins, à une échelle macroscopique, son comportement peut être décrit par les mêmes équations qui régissent l'écoulement de l'air ou de l'eau. Pour l'ingénieur du génie chimique, un écoulement est presque toujours le moyen utilisé pour amener les réactifs en contact. La technique dite du lit fluidisé, dans laquelle des particules solides sont mises en suspension par un courant ascendant de fluide est souvent mise à profit pour les réactions catalytiques, le catalyseur étant dispersé dans les particules solides.

Remontons maintenant dans les échelles de longueur pour examiner des écoulements à l'échelle de notre planète. La différence d'éclairement solaire entre les zones polaires et les zones tropicales induit de grandes différences de température entre les différentes régions du globe. Les écoulements atmosphériques et les courants marins servent essentiellement aux échanges de chaleur entre pôles et tropiques ; la température moyenne qui règne à la surface du globe est impossible à évaluer correctement sans prendre en compte les effets de ces circulations à grande échelle. Par la même occasion, les écoulements atmosphériques transportent de nombreuses substances, en particulier les polluants et les cendres volcaniques. Par exemple, contrairement à ce que certains ont affirmé, les éléments radioactifs émis par l'accident de la centrale de Tchernobyl ne se sont pas arrêtés à nos frontières, ils ont été largement disséminés sur toute l'Europe. Heureusement, les écoulements atmosphériques ont également réalisé un mélange très efficace du nuage radioactif et ont permis la dilution des polluants.

Notre expérience quotidienne nous enseigne que les prévisions des météorologistes ne sont pas d'une fiabilité à toute épreuve. Pourtant ceux-ci utilisent à temps plein les plus puissants ordinateurs existants et les équations de la mécanique des fluides sont connues depuis le milieu du 19ème siècle. La prévision météorologique se heurte ici à un problème fondamental : l'existence de la turbulence et le caractère d'imprévisibilité à long terme des écoulements turbulents. L'examen de l'atmosphère révèle des mouvements à des échelles très différentes : un champ de blé dont la température est supérieure à celle du bois voisin suffit à provoquer une cellule de convection thermique dont l'extension ne dépasse pas quelques centaines de mètres. Le même phénomène se produit le long des côtes, provoquant la brise de mer ; cette fois, la convection fait sentir ses effets sur une dizaine de km. Les perturbations qui balaient régulièrement l'Atlantique Nord pendant l'hi-

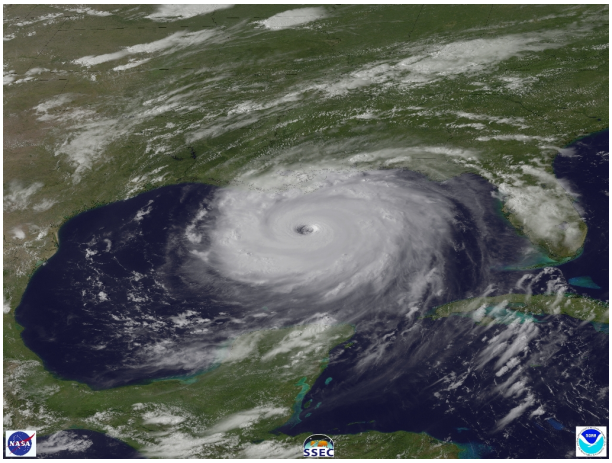


FIG. 1.4 – Photographie de l'ouragan Katrina sur le golfe du Mexique le 28 Aout 2005. Le tourbillon associé à la perturbation s'étend sur un millier de kilomètres.

ver ou les ouragans (fig. 1.1) sont des tourbillons de plusieurs centaines de km de diamètre. En haut de cette organisation, on trouve la circulation zonale : au niveau des tropiques les alizés soufflent essentiellement de l'est, alors qu'aux latitudes moyennes les vents d'ouest prédominent. L'existence de tourbillons sur une très grande gamme d'échelles spatiales est une des caractéristiques de la turbulence et l'une des raisons essentielles de la difficulté des simulations numériques.

Au delà de la prévision météorologique, la mécanique des fluides joue un rôle essentiel dans la régulation et l'évolution climatique. La température moyenne de l'atmosphère est fortement influencée par l'effet de serre du à l'absorbtion du rayonnement infra-rouge réémis vers l'espace par la vapeur d'eau, le CO_2, le méthane et d'autres gaz. Arrhénius avait déjà pressenti que l'utilisation massive de combustibles fossiles conduirait à un renforcement de l'effet de serre. Le réchauffement global du aux activités humaines (fig. 1.5) est maintenant un fait reconnu par l'ensemble de la communauté scientifique, mais pour en arriver là et pour tenter de prédire quelle sera l'importance de ce réchauffement dans les décennies à venir, il a fallu comprendre et modéliser la dynamique atmosphérique et la dynamique océanique.

Les modèles utilisés pour la prédiction climatique sont maintenant capables de reproduire assez fidèlement le climat passé et présent et peuvent être extrapolés jusqu'à la fin du 21ème siècle. Ils sont encore toutefois assez sensibles à une série de paramètres phénoménologiques : une étude récente d'un groupe britannique[1] a montré que l'ampleur du réchauffement global pouvait aller de 2 à 11°C pour un doublement de la concentration de CO_2. En outre, des phénomènes cruciaux comme la dynamique des grandes masses glaciaires sont encore très mal modélisés.

Il est maintenant clair que l'humanité est en train de faire une expérience de climatologie sans précédent (l'ampleur du réchauffement sera comparable à celui de la dernière déglaciation il y a 15 000 ans) et devra subir des conséquences sans doute dramatiques, qui seront aggravées par le choc de la disparition du pétrole (même si cela entraîne une diminution forcée des émissions de CO_2)[2]. Il est donc crucial de trouver au plus vite des énergies de substitution aux combustibles fossiles. Dans ce domaine, la mécanique des fluides joue également un rôle important : l'utilisation systématique de l'énergie éolienne, de l'énergie des vagues, des courants de marée permettra de répondre partiellement à cette demande. Mentionnons également les projets de tours solaires qui convertissent l'énergie solaire recueillie par des capteurs horizontaux en un écoulement d'air vertical dans une gigantesque cheminée. Il est malheureusement évident que ces procédés ne peuvent

[1] D.A. Stainforth et al., *Nature 433*, 403 (2005), www.climateprediction.net

[2] Voir l'excellent site de Jean-Marc Jancovici www.manicore.com et H. Le Treut, JM. Jancovici, "L'effet de serre" Flammarion 2004 ainsi que les documents publiés par l'IPCC (www.ipcc.ch).

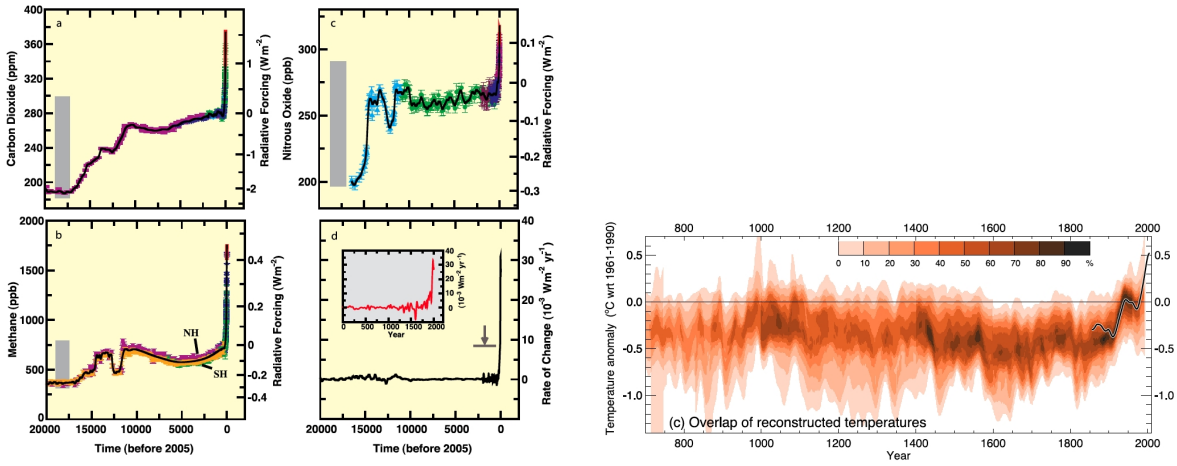


FIG. 1.5 – À gauche : Évolution pendant les 20000 dernières années de la concentration des principaux gaz à effet de serre et du forçage radiatif associé. Données obtenues par carottages glaciaires. À droite : Évolution de la température moyenne de l'hémisphère nord durant le dernier millénaire (variation par rapport à la moyenne1961-1990 ; la courbe noire est tirée des données instrumentales depuis 1850 ; les données antérieures sont tirées de diverses corrélations). La température reste essentiellement constante jusqu'au début de l'ère industrielle puis augmente de presque 1° pendant le 20ème siècle. Courbes tirées du rapport 2007 de l'IPCC (International Panel on Climate Change).

produire les quelques 4×10^{20}J que l'humanité consomme actuellement[3] chaque année, mais il faudra peut-être s'en contenter.

1.2 Qu'est-ce qu'un fluide ?

Pour le physicien versé vers la thermodynamique, un fluide est un corps simple, composé d'une assemblée d'atomes ou molécules identiques, en phase liquide ou gazeuse. La transition entre les différents états s'accompagne de la discontinuité de certaines grandeurs thermodynamiques qui permettent de construire un diagramme des phases sans ambiguïté et sans avoir recours à une mesure des propriétés mécaniques. Par exemple, nous savons que, à la pression atmosphérique, l'eau se liquéfie à 0°C et se vaporise à 100°C, que l'hélium reste liquide à 0 K.

Le mécanicien donnerait une définition plus empirique : un fluide, c'est quelque chose qui coule. Vue depuis les sommets environnants, la Mer de Glace présente des bandes alternées, sombres et claires, de forme parabolique. Ces bandes de Forbes qui sont dues à l'alternance saisonnière de l'enneigement, révèlent le lent écoulement du glacier vers la vallée de Chamonix. Il s'agit bien d'eau en phase solide, mais la présence des crevasses et leur réarrangement permanent font, qu'à grande échelle, le glacier se comporte comme un liquide très visqueux (fig. 1.6). Il en est de même des matériaux qui constituent le manteau terrestre. Observés sur des échelles de temps suffisamment longues, ils coulent comme des liquides.

Pour caractériser un matériau, le mécanicien mesurerait la déformation en fonction de la contrainte appliquée au matériau. Il définira un solide à partir de sa réponse élastique : la déformation croît linéairement avec la contrainte appliquée. La déformation reste en général petite jusqu'à la rupture du solide. En revanche, dans un fluide la déformation peut être arbitrairement grande sans qu'il y ait une perte de cohésion. Pour un fluide visqueux, c'est la *vitesse de déformation* qui est proportionnelle à la contrainte appliquée. Une telle distinction entre fluides et solides basée sur la réponse à une sollicitation mécanique peut être plus subtile : les pâtes aux

[3] P.B. Weisz, *Physics Today* **57**, n°7, 47 (2004)



FIG. 1.6 – Glacier Barnard en Alaska. Photo : National Snow and Ice Data Center/World Data Center for Glaciology.

silicones vendues sous le nom de "silly-putty" se comportent à la fois comme des solides et comme des liquides. Une boule de silly-putty rebondit comme une balle de caoutchouc, pourtant la même boule de silly-putty abandonnée sur une table s'étalera lentement en une couche mince, comme le ferait une huile visqueuse ou du miel. Les macromolécules qui rentrent dans la composition du silly-putty ont un temps de réponse aux sollicitations extrêmement long (à l'échelle moléculaire), aussi leur réaction est-elle différente selon qu'elles ont le temps ou non de se déformer de manière significative.

Ainsi la notion de fluidité dépend de l'échelle spatiale d'observation(ou de sollicitation), c'est le cas du glacier, et du temps caractéristique d'observation du système, c'est le cas du silly-putty. Nous entrevoyons également ici la relation entre la structure microscopique des fluides et leurs propriétés mécaniques macroscopiques. L'étude du comportement sous écoulement (discipline qui porte le nom de rhéologie) joue un grand rôle dans de nombreuses industries (peintures, adhésifs, agro-alimentaire, extraction du pétrole, ...) et jusque dans la texture des aliments que nous absorbons.

Les relations structure-propriétés mécaniques sont en général difficiles à établir et mettent en oeuvre des considérations subtiles de physique statistique. Un des exemples les plus frappants est l'ajout de polymères de très grande masse moléculaire dans un solvant. Une très petite quantité de polymère (0,1 % en fraction massique) suffit à modifier considérablement la viscosité de la solution, du fait de l'enchevêtrement des chaînes macromoléculaires. On ne peut clore ce paragraphe sans mentionner les milieux granulaires secs (poudres, sable) du fait de leur importance dans l'industrie (beaucoup de matériaux sont stockés et transportés sous forme de poudres) et dans l'environnement. L'observation rapide de l'écoulement dans un sablier pourrait nous faire croire qu'il est possible d'analyser ce phénomène comme l'écoulement d'un fluide possédant des propriétés mécaniques particulières. En fait, il n'en est rien et la " physique du tas de sable " est un domaine assez éloigné de la mécanique des fluides et qui est encore en pleine évolution.

Pour illustrer le comportement particulier des milieux granulaires, considérons l'exemple simple de l'équilibre statique d'un silo : si on mesure la pression exercée sur le fond du silo en remplissant celui-ci de plus en plus, on constate que cette pression n'augmente plus au delà d'une certaine hauteur de remplissage, proportionnelle au diamètre du silo. Ce comportement, tout à fait différent de celui d'un liquide, est dû au frottement solide sur les parois latérales du silo qui supporte partiellement le poids de l'empilement de grains.

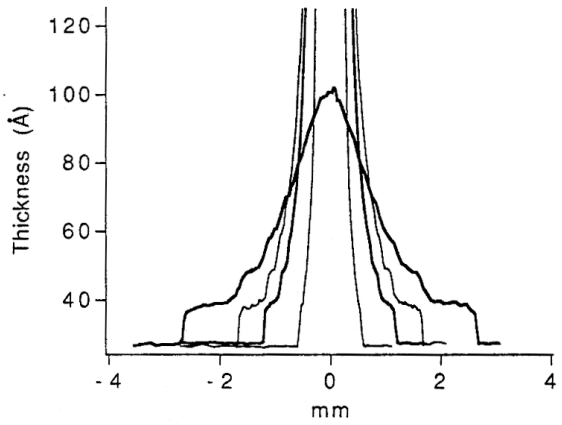


FIG. 1.7 – Profil d'une goutte de polydiméthylsiloxane (huile silicone) s'étalant sur une surface de silicium. Epaisseur mesurée par ellipsométrie optique, 3.5h, 11.4h, 45.4 h et 148.9 h après le dépôt de la goutte. Noter que les échelles verticale et horizontale sont très différentes. D'après N. Fraysse et al., *J. Colloid Interface Sci.* **158**, 27 (1993)

.

1.3 L'hypothèse de continuité

Si on considère un fluide simple comme l'air ou l'eau, le problème de l'échelle d'observation se pose également. A très petite échelle, il est impossible d'ignorer la nature atomique ou moléculaire des fluides. A ces échelles moléculaires, il est clair que les propriétés physiques d'un fluide varient très largement d'un point de l'espace à l'autre. Néanmoins, il suffit de considérer un volume de fluide assez grand à l'échelle microscopique pour que les propriétés du fluide, moyennées sur un grand nombre de molécules, apparaissent comme dépendant lentement de la coordonnée spatiale. Dans la plupart des situations pratiques, ce volume "suffisamment grand" reste très petit comparé aux dimensions globales de l'écoulement ; les mesures effectuées à cette échelle peuvent être considérées comme "locales".

Des expériences récentes et des simulations numériques de dynamique moléculaire ont permis de mieux cerner l'influence de la structure moléculaire sur les écoulements de films très minces de liquide. Lorsque l'épaisseur du film est inférieure à 10 diamètres moléculaires, l'organisation moléculaire du liquide est révélée par les "marches" que forme le liquide en s'étalant (fig. 1.7).

Dans un gaz, c'est le libre parcours moyen qui fixe la limite de l'hypothèse de continuité. Lorsque la pression est suffisamment basse pour que la distance moyenne entre molécules devienne plus grande que les dimensions caractéristiques de l'écoulement, on ne peut plus appliquer les lois classiques de la mécanique des fluides. Une telle situation se rencontre dans la très haute atmosphère (rentrée des véhicules spatiaux) et dans les systèmes d'ultravide utilisés en physique du solide. Dans la suite de ce cours, nous ignorerons ces subtilités et considérerons tous les fluides comme des milieux continus dont les propriétés physiques et la dynamique peuvent être décrits par des fonctions des coordonnées spatiales.

1.4 Propriétés physiques des fluides. Introduction de la notion de viscosité

Du point de vue de la mécanique, nous avons vu que la propriété essentielle des fluides est la possibilité de supporter des déformations arbitrairement grandes sans perte de cohésion. Les contraintes engendrées dans un fluide ne dépendent donc pas de l'amplitude de déformation, comme c'est le cas dans les solides. En revanche, ces contraintes dépendent de la vitesse de déformation

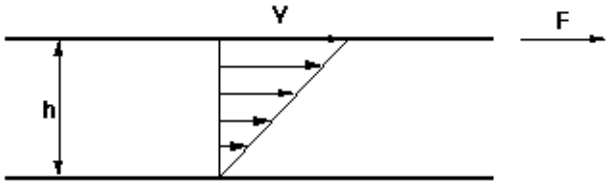


FIG. 1.8 – Écoulement de cisaillement simple. Deux plaques parallèles en mouvement relatif.

ainsi que le montre l'expérience suivante : enfermons un liquide entre deux plaques planes, parallèles et distantes d'une longueur h. Déplaçons la plaque supérieure (dans son propre plan) à la vitesse V et mesurons la force qui s'exerce sur la plaque inférieure (également dans son propre plan). Cette force, ramenée à l'unité de surface en contact avec le liquide est proportionnelle à V/h., soit : $F/S \propto V/h$ Le coefficient de proportionnalité η est la viscosité dynamique du fluide. Le membre de gauche de l'équation ci-dessus a la dimension d'une pression, c'est la contrainte de cisaillement s'exerçant sur le fluide. Le membre de droite est le gradient de vitesse présent dans l'écoulement ; il a la dimension de l'inverse d'un temps. La viscosité dynamique a donc la dimension du produit d'une pression par un temps. Dans le Système International de mesures, la viscosité dynamique s'exprime en Poiseuilles (1Poiseuille = 1Pa s = 1kg $\mathrm{m}^{-1}s^{-1}$). La viscosité de l'eau à 20° C est 1 m Pa s ; celle de l'air est à peu près cent fois plus petite : $1,8 \times 10^{-5}$ Pa s. Le glycérol, quant à lui, est plus de mille fois plus visqueux que l'eau (1,3 Poiseuille). Le Poiseuille représente donc la viscosité d'un liquide que nous qualifierions de très visqueux dans le langage courant.

Pour des raisons de commodité, les unités du système C.G.S. (centimètre, gramme, seconde) sont également utilisées. L'unité de viscosité dans le système C.G.S. est le Poise (1 Poise = 0,1 Poiseuille). La viscosité dynamique de l'eau à 20°C est 1 centipoise.

1.5 Transport de la quantité de mouvement dû à la viscosité

En pratique, la mesure de viscosité décrite ci-dessus s'effectue dans une géométrie circulaire : le fluide est confiné entre deux cylindres concentriques de rayons légèrement différents. L'un des cylindres est fixe, l'autre est mis en rotation à une vitesse imposée. La viscosité du fluide est proportionnelle au couple nécessaire à l'entretien de la rotation. C'est le viscosimètre développé par M. Couette au tout début du siècle. Nous reviendrons plus en détail sur cet appareil dans le chapitre suivant.

Examinons en détail ce qui se passe lorsque un des cylindres est mis brusquement en rotation (sa vitesse angulaire passe très rapidement de zéro à une valeur finie). Les couches de fluide au voisinage immédiat de la paroi solide sont mises en mouvement avec la paroi. Cet effet est dû à l'échange de quantité de mouvement entre le solide et le fluide. Dans tous les fluides visqueux, les mesures de vitesse locale montrent que le champ de vitesse s'extrapole à zéro sur une paroi solide : il n'y a pas de mouvement relatif à une interface entre un solide et fluide visqueux. Ces observations macroscopiques ont été confirmées récemment à l'échelle microscopique par des simulations de dynamique moléculaire. Ensuite, les couches de fluide de plus en plus éloignées de la paroi sont mises progressivement en mouvement. L'information relative au déplacement de la paroi diffuse au sein du fluide.

Pour analyser la cinétique de ce phénomène, considérons une géométrie plane, plus simple que l'écoulement entre les deux cylindres concentriques (en fait, si l'espacement des cylindres est petit devant leurs rayons, l'effet de la courbure sur l'écoulement est négligeable. De la même manière, à notre échelle humaine, nous ne percevons pas la courbure de la Terre) : une plaque solide plane, au contact avec un fluide visqueux, est mise brusquement en mouvement dans son propre plan (fig. 1.9). Quel est l'effet des contraintes de cisaillement sur un élément de volume fluide parallèlépipèdique d'épaisseur dz et d'aire dS dans le plan xy parallèle à la plaque en mouvement ?

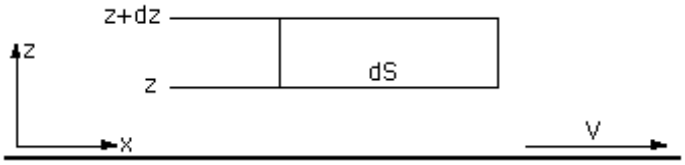


FIG. 1.9 – Plaque mise en mouvement brusquement.

La force horizontale exercée sur la face supérieure est :

$$\eta \frac{\partial u_x}{\partial z}|_{z+dz}$$

et la force sur la face inférieure est :

$$-\eta \frac{\partial u_x}{\partial z}|_{z}$$

La résultante de ces deux forces est égale à la variation temporelle de quantité de mouvement de l'élément de fluide :

$$\frac{\rho dz dS \partial u_x}{\partial t}$$

où ρ est la masse volumique du fluide. La relation fondamentale de la dynamique conduit donc à l'équation suivante :

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} = \frac{\eta}{\rho}\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} = \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \tag{1.1}$$

où ν est la *viscosité cinématique* du fluide, définie comme le rapport entre la viscosité dynamique et la masse volumique. L'équation ci-dessus est une équation de diffusion de la quantité de mouvement, formellement identique à l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho C_p}\Delta T = \kappa \Delta T \tag{1.2}$$

où λ est la conductivité thermique, C_p la chaleur spécifique et κ la diffusivité thermique. La viscosité cinématique a donc les mêmes dimensions que la diffusivité thermique, soit le carré d'une longueur divisé par un temps. La viscosité cinématique de l'eau, à 20°C est $10^{-2}\mathrm{cm}^2/\mathrm{s}$; l'air a une viscosité cinématique $(0,15\mathrm{cm}^2/\mathrm{s})$ plus grande que celle de l'eau , ce qui peut paraître surprenant mais qui tient à sa faible masse volumique.

Le mouvement du fluide est ici décrit par l'équation aux dérivées partielles 1.1. Les solutions particulières sont déterminées par les conditions aux limites. En l'occurrence : le fluide est entièrement au repos avant la mise en mouvement de la plaque solide, soit : $u = 0$ si $t <= 0$. D'autre part, la condition de non glissement sur la paroi solide impose : $u = U$ si $z = 0$, $t > 0$. Il existe une caractéristique commune à toutes les équations de diffusion : la quantité$(\nu t)^{1/2}$ est une longueur. C'est, en ordre de grandeur, la longueur sur laquelle diffuse la quantité de mouvement pendant un temps t. La dépendance en racine carrée du temps est une des "signatures" d'un phénomène de diffusion. En normalisant la coordonnée z par cette longueur caractéristique et en introduisant la variable sans dimension $\zeta = z(\nu t)^{-1/2}$, on transforme l'équation aux dérivées partielles en une équation différentielle ordinaire :

$$\frac{d^2 u}{d\zeta^2} + \frac{1}{2}\zeta \frac{du}{d\zeta} = 0 \tag{1.3}$$

dont la solution est :

$$u = A \int_0^{\zeta} \exp\left(-\frac{y^2}{4}\right) dy + B \tag{1.4}$$

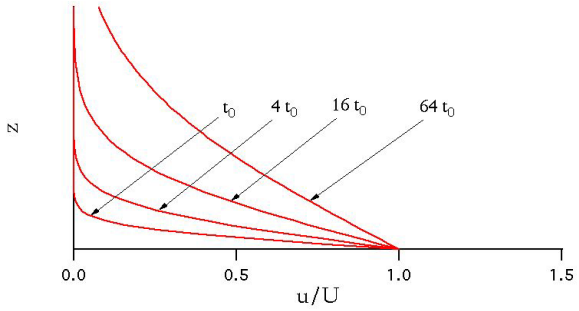


FIG. 1.10 – Plaque plane mise brusquement en mouvement. Profils de vitesse à différents instants.

A et B sont déterminés par les conditions aux limites : $u(\zeta = 0) = U$ et $u \to 0$ si $\zeta \to \infty$. Soit :

$$u = U\left[1 - erf\left(\frac{\zeta}{2}\right)\right] \tag{1.5}$$

où la fonction d'erreur erf est définie par : $erf(\zeta) = 2/\sqrt{\pi}\int_0^\zeta e^{-y^2}dy$. La solution ne dépend que de la variable sans dimension ζ. Au cours du temps, les profils de vitesse restent identiques, à une dilatation près, suivant l'axe des z, avec un rapport de dilatation qui varie comme la racine carrée du temps (fig. 1.8). Revenons maintenant au cas de l'écoulement entre deux cylindres. Lorsque le cylindre intérieur est mis en mouvement, la quantité de mouvement diffuse dans le fluide. L'épaisseur de la couche où le fluide est en mouvement croît proportionnellement à $\sqrt{\nu t}$. Si h est l'épaisseur de l'espace entre les deux cylindres, le cylindre extérieur se mettra en mouvement au bout d'un temps qui est de l'ordre de h^2/ν . Remarquons enfin que c'est la quantité de mouvement dans la direction de l'axe x qui est transportée dans une direction orthogonale, celle de l'axe z. Ecrivons l'équation 1.1 sous la forme :

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\eta\frac{\partial u}{\partial z}\right) \tag{1.6}$$

le membre de gauche représente la variation de quantité de mouvement, par unité de temps, d'un élément de fluide de volume unité. Le membre de droite est la divergence de la contrainte de cisaillement créée par la viscosité. La variation globale de quantité de mouvement résulte du bilan de flux de quantité de mouvement à travers les faces supérieure et inférieure de l'élément de volume. L'expression 1.6 montre que le flux de quantité de mouvement dû à la viscosité est : $\eta\partial u/\partial z$. Ce flux n'est rien d'autre que la contrainte de cisaillement ; son ordre de grandeur est : $\eta U/L$.

1.6 Transport par convection de la quantité de mouvement. Introduction du nombre de Reynolds

La diffusion due à la viscosité n'est pas le seul mécanisme de transport de la quantité de mouvement. L'écoulement lui-même participe à ce transport. Un élément de fluide de volume unité possède une impulsion $\rho\mathbf{U}$. Le volume de fluide qui traverse une surface unité par unité de temps est : $q = \mathbf{U}.\mathbf{n}$ où n est la normale à cette surface. Le flux de quantité de mouvement à travers cette surface est donc vectoriellement : $\mathbf{j} = \rho\mathbf{U}\mathbf{U}.\mathbf{n}$ et, en module :ρU^2. En général, les deux mécanismes, diffusif et convectif, de transport de l'impulsion sont présents dans un écoulement. L'importance relative des deux mécanismes est définie par le rapport :

$$Re = \frac{\rho U^2}{\eta U/L} = \frac{\rho UL}{\eta} = \frac{UL}{\nu} \tag{1.7}$$

dans lequel U est une vitesse représentative de l'écoulement (essentiellement la vitesse moyenne du fluide) et L une échelle de longueur également représentative de l'écoulement (essentiellement, la longueur sur laquelle la vitesse passe de 0 à U). Ce rapport est appelé nombre de Reynolds. Lorsqu'il est très grand devant 1, le transport d'impulsion est gouverné par la convection, c'est-à-dire par l'inertie du fluide. En revanche, lorsque $Re \ll 1$, le transport d'impulsion est essentiellement diffusif et l'écoulement est gouverné par la viscosité. Les deux types d'écoulement ont des caractéristiques très différentes. Les écoulements que nous observons couramment dans l'eau ou dans l'air sont presque tous à très grand nombre de Reynolds. En voici quelques exemples :

- écoulement atmosphérique : $U \approx 10$ m/s, $L \approx 100$ km, $Re \approx 10^{11}$.
- écoulement autour d'une aile d'avion : $U \approx 100$ m/s, $L \approx 10$ m, $Re \approx 10^{8}$.
- écoulement autour d'une voiture : $U \approx 30$ m/s, $L \approx 4$ m, $Re \approx 10^{6}$ à 10^{7}.
- jet d'eau sortant d'un robinet : $U \approx 10$ cm/s , $L \approx 1$ cm, $Re \approx 10^{3}$.
- écoulement du sang dans l'aorte : $U \approx 1$ m/s, $L \approx 1$ cm, $Re \approx 10^{4}$.

L'obtention d'un petit nombre de Reynolds nécessite soit un fluide de grande viscosité, soit un écoulement de très petite taille, soit une vitesse très faible ou une combinaison de ces trois paramètres. Si vous vouliez nager à $Re = 1$, il faudrait vous immerger dans du sirop de sucre et vous interdire de déplacer vos bras ou vos jambes à plus de 1 cm/min. ! Alors que l'écoulement du sang dans l'artère aorte se fait à $Re \approx 10^{4}$, dans les capillaires dont le diamètre est d'une dizaine de microns, la vitesse du sang est 100 μm/s et le nombre de Reynolds descend jusqu'à 10^{-3}. Autres exemples d'écoulements à petit nombre de Reynolds :

- lubrification de pièces mécaniques en mouvement
- mouvement de particules dans les suspensions colloïdales
- propulsion des micro-organismes
- écoulement des roches et du magma dans le manteau terrestre

Nous verrons dans la suite que la relation entre le champ de pression et le champ de vitesse est très différente selon que le nombre de Reynolds est petit ou grand, selon que l'effet de la viscosité est prépondérant ou négligeable. L'augmentation de Re est également associée à l'apparition d'instabilités, puis de la turbulence dans l'écoulement. La fig. 1.11 montre l'évolution du champ de vitesse dans le sillage d'un cylindre lorsque le nombre de Reynolds passe de 0,16 à 10000.

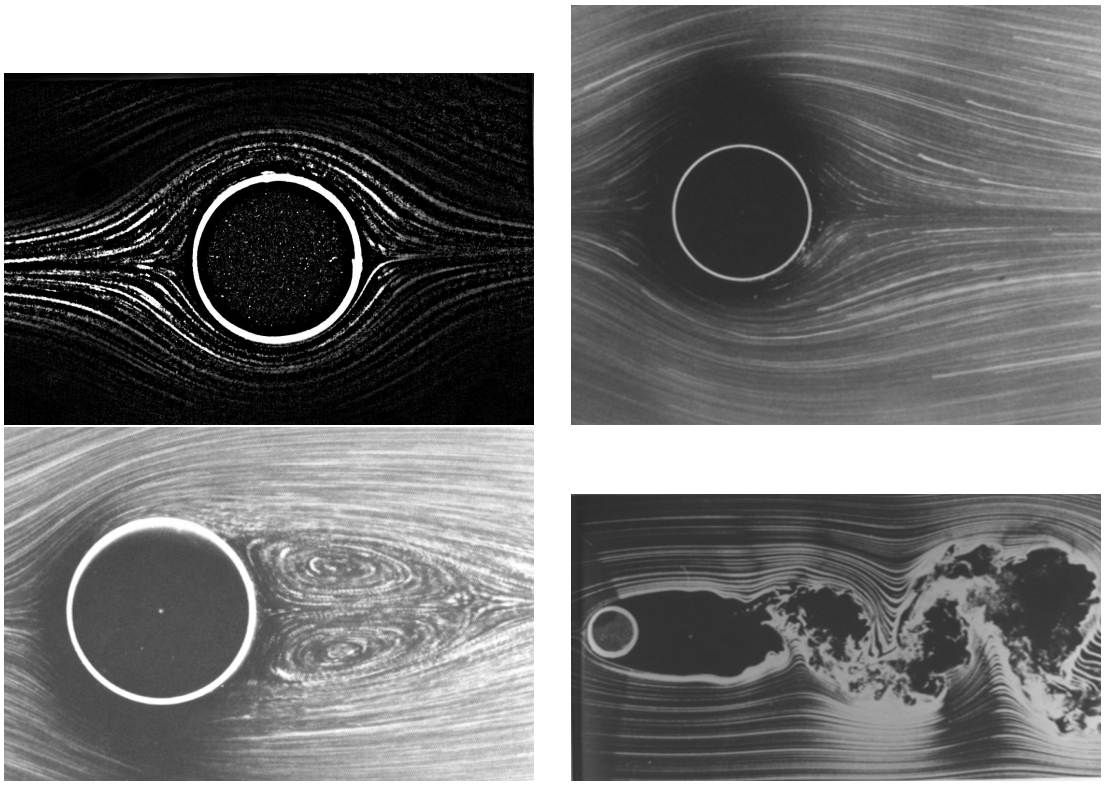


FIG. 1.11 – Ecoulement autour d'un cylindre à différents nombres de Reynolds. Rangée du haut $Re = 0.16$ et $Re = 1.5$. Visualisation à l'aide de particules réfléchissantes dans l'écoulement. Rangée du bas : $Re = 26$ et $Re = 10000$. Photographies : S. Taneda., J. Phys. Soc. Jpn. (Re 0.16, 1.5, 26), T. Corke et H. Nagib (Re 10000).