

Examen de mécanique des fluides

124^{ème} promotion

16 février 2007 : 13h - 16h40

- **Partie A : traiter deux exercices au choix parmi les trois proposés. Durée : 1h15. 8 points.**
- **Partie B : traiter l'intégralité du problème. Durée : 2h15. 12 points**
- **Rédiger les parties A et B sur des copies séparées. La partie A sera ramassée après 1h15.**
- Lire attentivement l'intégralité des énoncés.
- La plupart des résultats sont donnés dans l'énoncé. Ne vous bloquez pas sur une question si vous n'arrivez pas à la résoudre.
- Documents autorisés : photocopié, notes de cours, notes personnelles manuscrites. Les ouvrages et photocopies d'ouvrages ne sont pas autorisés.

1 Partie A

1.1 Écoulement d'un coin de liquide sous gravité

L'écoulement sous gravité de couches de liquides visqueux est rencontré dans un certain nombre de situations géophysiques (écoulement de laves par exemple). On s'intéresse ici à une expérience modèle où on prépare un coin de liquide avec une surface libre faisant un petit angle α avec l'horizontale (fig. 1). On se focalisera sur l'écoulement au voisinage de la pointe.

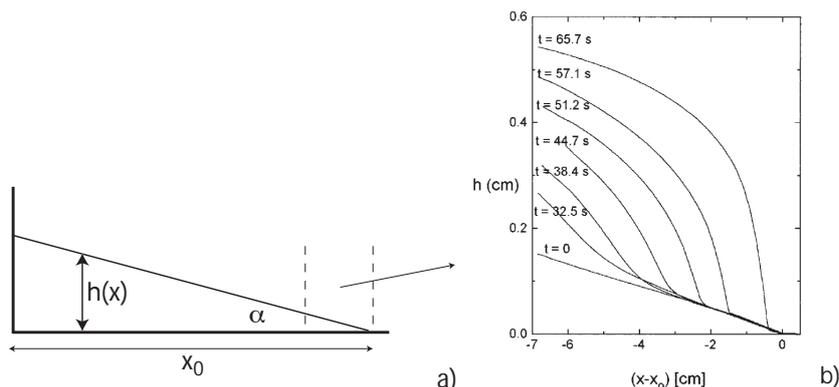


FIG. 1 – a) Schéma du coin de liquide. b) évolution du profil d'épaisseur à l'extrémité droite du coin de liquide, pour $\alpha = 0.02$ rad., $x_0 = 78$ cm et $\nu = 23\text{cm}^2/\text{s}$.

1. A partir des résultats expérimentaux de la fig. 1b, déterminer l'ordre de grandeur du nombre de Reynolds de l'écoulement. Que peut-on en déduire sur la dynamique de l'écoulement ?
2. Comment se comparent les composantes horizontale et verticale de vitesse ?

3. Montrer que la répartition de pression dans la couche de liquide reste de type hydrostatique.
4. Quelles sont les conditions aux limites pour la composante horizontale de vitesse en $z = 0$ et $z = h(x)$?
5. Montrer que, dans les limite des petits angles α , et en négligeant les effets de la tension de surface, la hauteur de la couche de fluide est régie par l'équation :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{h^3}{K\nu} g\alpha \right] = 0 \quad (1)$$

où K est un facteur numérique d'ordre unité que l'on ne calculera pas.

6. Comment varie initialement ($t = 0+$) la hauteur de liquide? Expliquer qualitativement l'évolution de h observée expérimentalement (fig. 1).

1.2 Concentration par évaporation en microcanal.

De nombreux dispositifs microfluidiques sont fabriqués par des procédés de "lithographie molle". Le matériau utilisé pour la paroi des canaux est un gel de polydiméthylsiloxane (PDMS) qui est légèrement perméable aux gaz et à l'eau. Cette perméation d'eau est mise à profit pour réaliser des dispositifs de concentration en soluté (fig. 2). Le canal contenant le soluté a une longueur $L = 10\text{mm}$, une largeur $w = 200\mu\text{m}$ et une hauteur $h = 20\mu\text{m}$. Il est fermé à une extrémité et raccordé à un réservoir à l'autre extrémité. Il est séparé par une fine membrane d'épaisseur $e = 2\mu\text{m}$ d'un autre canal de longueur $L_0 < L$ dans lequel circule de l'air. L'eau passe à travers la membrane poreuse avec une vitesse moyenne v_e . Le soluté a une concentration c_0 dans le réservoir.

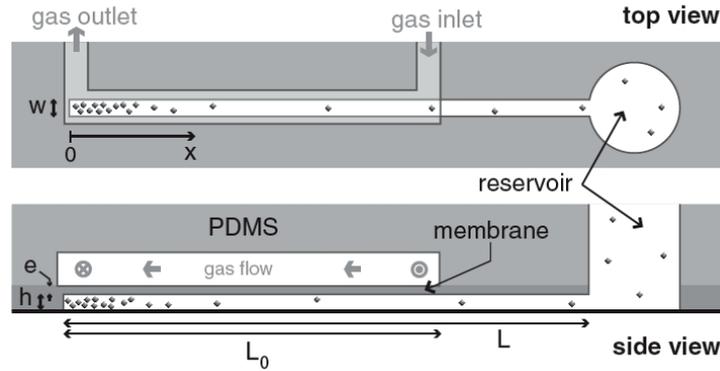


FIG. 2 – Schéma du dispositif de concentration de soluté. En haut, vue de dessus. En bas, vue de côté.

1. Montrer que la vitesse de l'eau, intégrée sur l'épaisseur h du canal est donnée par :

$$\langle v_x(x) \rangle = -\frac{v_e x}{h} \quad (2)$$

2. Quelles sont, en toute rigueur, les conditions aux limites pour les composantes v_x et v_z de la vitesse? (on admettra que v_y est nul).
3. En admettant que la concentration c en soluté ne dépend pas de la coordonnée verticale z , montrer qu'elle obéit à l'équation :

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[c \langle v_x \rangle - D \frac{\partial c}{\partial x} \right] = 0 \quad (3)$$

où D est le coefficient de diffusion du soluté.

4. On cherche des solutions stationnaires de l'équation de transport (3) et en particulier les solutions pour lesquelles le flux total de soluté est nul. Montrer qu'une longueur caractéristique de ce problème est donnée par :

$$l = \sqrt{\frac{Dh}{v_e}} \quad (4)$$

Quelle est valeur de l lorsque $D = 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$ et $v_e = 20 \text{ nm/s}$ et comment se compare cette valeur à la longueur L du canal ?

5. Déterminer le profil de concentration stationnaire lorsque le flux total est nul.

1.3 Lois d'échelle pour la propulsion aquatique

Pour les espèces de poissons migrateurs comme les saumons, qui parcourent de très grandes distances pour parvenir à leur lieu de reproduction, l'optimisation de la propulsion est un facteur essentiel. Nous intéressons ici aux lois d'échelle gouvernant leur vitesse de nage soutenue (sur des temps longs). La figure 3 montre l'activité métabolique, mesurée par la consommation en oxygène, pour une espèce de saumon en fonction de la masse des individus. La puissance motrice P_m disponible pour la nage est proportionnelle à cette activité métabolique.

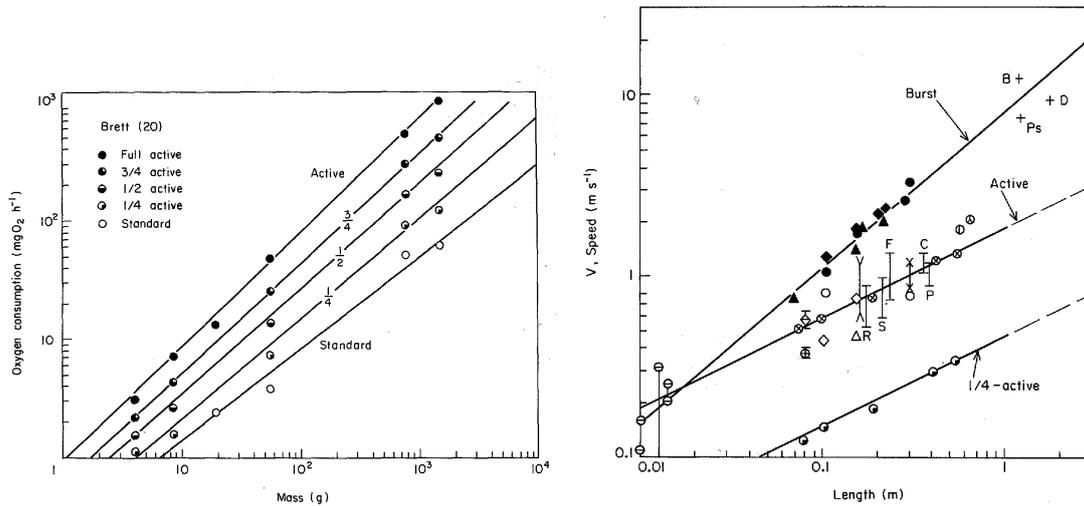


FIG. 3 – À gauche : consommation d'oxygène en fonction de la masse à différents niveaux d'activité. À droite : vitesse de nage en fonction de la longueur pour diverses espèces de poissons et cétacés.

1. Comment varie P_m en fonction de la masse ?
2. La traînée du corps d'un poisson « profilé » peut être assimilée à la traînée d'une plaque plane de longueur égale à celle du poisson. Cette force de traînée est caractérisée par un coefficient C_D . Comment varie ce coefficient de traînée avec le nombre de Reynolds Re si l'écoulement reste laminaire ?
3. Lorsque l'écoulement est turbulent, l'expérience montre que C_D est proportionnel à $Re^{-1/5}$. Quelle est la loi d'échelle reliant la vitesse de nage V à la longueur l du poisson dans les deux situations, écoulement laminaire et écoulement turbulent ? Comment se comparent ces lois d'échelle aux données reportées sur la figure 3 (on considèrera uniquement la courbe marquée « active ») ?
4. Le mode de propulsion des salmonidés et autres poissons dit « carangiformes » (thons, maquereaux, ...) consiste essentiellement à propager une onde de déformation le long du corps. Cette onde est caractérisée par sa pulsation ω et par sa vitesse de phase c . La force

propulsive, moyennée dans le temps, s'exprime comme : $F_p \propto \rho b^2 \omega^2 a^2 (1 - V/c)$ où ρ est la masse volumique de l'eau, a est l'amplitude des oscillations de la nageoire caudale, b est une dimension caractéristique de la nageoire caudale et V est la vitesse. Justifier la dépendance de F_p en $\rho b^2 \omega^2 a^2$.

5. En admettant que c/V soit indépendant de l'échelle de longueur l , déterminer la dépendance en l de la fréquence réduite $\omega l/V$.

2 Partie B : Bulles d'air et sillages des navires

D'après F. Caille, J. Magnaudet et C. Clanet, "Bubbly wakes behind a propeller", soumis à *J. Fluid Mech.* et F. Caille, J. Magnaudet et C. Clanet, "Bubble capture by a propeller", *J. Fluid Mech.* **560**, 311 (2006).

Le sillage produit par les navires de surface comporte une traînée de bulles qui est fortement conditionnée par les hélices (fig. 4). La présence de cette traînée de bulles est un problème de sécurité pour les navires, les torpilles équipées de sonar étant capables de les détecter.

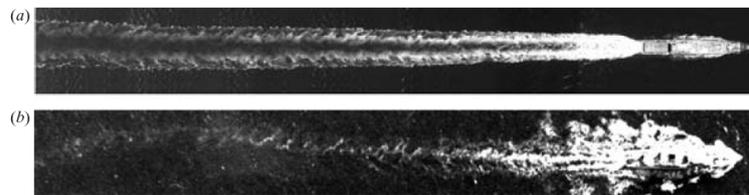


FIG. 4 – Deux sillages de navire vus d'avion. a) navire avec deux hélices b) navire avec une seule hélice

L'entraînement des bulles par une hélice est reproduite dans une expérience de laboratoire (fig. 5). La longueur du canal est de l'ordre du m. On utilise des hélices de modèle réduit avec des rayons de l'ordre de 2cm. De petites bulles d'air de diamètre contrôlé sont injectées à proximité de l'hélice par une aiguille reliée à une pompe à seringue. On peut suivre leur trajectoire et mesurer la longueur du sillage L_s . Une plaque de plexiglass est placée sur la surface libre pour empêcher l'éclatement des bulles.

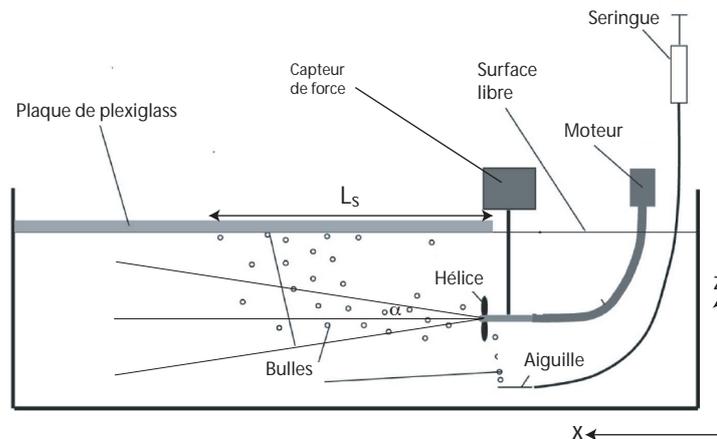


FIG. 5 – Schéma de l'expérience pour étudier la longueur du sillage.

L'observation principale tirée de cette étude est l'évolution de la longueur du sillage avec la vitesse de rotation de l'hélice : en dessous d'une vitesse de rotation critique ω_b , L_s varie proportionnellement à ω et au dessus de ω_b L_s varie comme ω^3 (fig. 6).

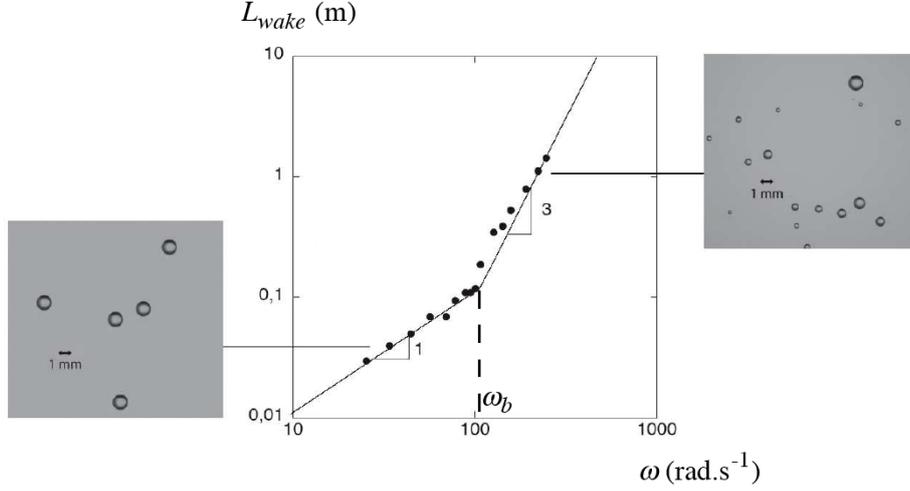


FIG. 6 – Longueur du sillage de bulles en fonction de la vitesse de rotation de l'hélice. Bulles de rayon initial 1mm, rayon de l'hélice $R_h=15$ mm. A gauche, photographie des bulles dans le premier régime ($\omega < \omega_b$). A droite, photographie des bulles dans le deuxième régime ($\omega > \omega_b$)

2.1 Mouvement des bulles

2.1.1 Remontée de bulles d'air en l'absence d'écoulement

Nous analysons d'abord la remontée des bulles de gaz dans un liquide, en l'absence d'écoulement du liquide. Montrer que dans la limite des petits nombres de Reynolds, la vitesse de remontée d'une bulle est :

$$V_0 = C \frac{ga^2}{\nu} \quad (5)$$

où a est le rayon des bulles, g l'accélération de la pesanteur et ν est la viscosité cinématique du liquide et C un coefficient numérique d'ordre unité. Quelle est la valeur de C lorsque l'interface gaz-liquide est immobile ?

Le paramètre sans dimension utilisé pour caractériser ce phénomène est le nombre de Galilée :

$$Ga = \frac{ga^3}{\nu^2} \quad (6)$$

Quelle est la signification physique du nombre de Galilée ?

On considère des bulles d'air de taille sub-millimétrique (rayon compris entre 100 et 250 microns), remontant dans l'eau. Quelle est la valeur du nombre de Galilée correspondant ? A quelle vitesse remontent-elles ?

2.1.2 Entraînement par un écoulement

Commençons par définir la notion de *masse ajoutée* : quand un corps est accéléré dans un fluide, il déplace le fluide qui l'environne. La masse de ce fluide s'ajoute à la masse propre de l'objet et en augmente l'inertie. On admettra simplement que, pour une sphère de rayon a dans

un fluide de masse volumique ρ_f , la masse ajoutée est :

$$m_a = \frac{2\pi a^3}{3}\rho_f \quad (7)$$

Montrer que, dans la limite des petits nombres de Galilée, l'équation de mouvement d'une bulle s'écrit :

$$m_e \frac{d\mathbf{V}_b}{dt} = \zeta(\mathbf{U} - \mathbf{V}_b) + \frac{4}{3}\pi a^3(\rho_l - \rho_g)\mathbf{g} \quad (8)$$

où \mathbf{V}_b est la vitesse de la bulle, \mathbf{U} est la vitesse du liquide, m_e est la masse effective (masse réelle + masse ajoutée) et ζ un paramètre dont on précisera les dimensions et la signification physique.

En normalisant les vitesses par V_0 et le temps par $\tau = a^2/9\nu_l$, montrer que l'équation de mouvement s'écrit :

$$\frac{d\tilde{\mathbf{V}}_b}{d\tilde{t}} = \tilde{\mathbf{U}} - \tilde{\mathbf{V}}_b + \mathbf{k} \quad (9)$$

où les quantités avec tilde sont sans dimension et \mathbf{k} est le vecteur unitaire dans la direction verticale. Quelle est la signification physique du temps τ ? Quelle est sa valeur pour des bulles de rayon $a = 100\mu\text{m}$ dans l'eau?

Sachant qu'on observe la trajectoire des bulles sur des temps typiques de plusieurs secondes, montrer qu'on peut réduire l'équation de mouvement à :

$$\tilde{\mathbf{V}}_b = \tilde{\mathbf{U}} + \mathbf{k} \quad (10)$$

2.2 Entraînement dans le sillage

L'écoulement en aval de l'hélice est un jet turbulent de demi-angle α petit. Son rayon $R(x)$ augmente linéairement avec la distance x en aval : $R(x) = \tan \alpha x \approx \alpha x$. La poussée exercée par l'hélice est mesurée en fonction de sa vitesse de rotation, pour différents diamètres d'hélice (fig. 7).

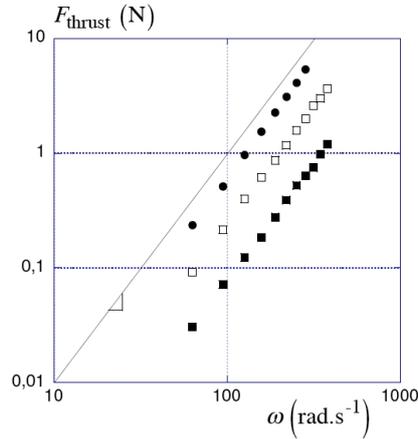


FIG. 7 – Force de poussée exercée par l'hélice en fonction de la vitesse de rotation ω , pour trois rayons différents de l'hélice : $\blacksquare R_h = 15 \text{ mm}$, $\square R_h = 20 \text{ mm}$, $\bullet R_h = 25 \text{ mm}$.

Montrer que, pour une vitesse de rotation et un rayon d'hélice donnés, la quantité $J = 1/2\rho U(x)^2\pi R(x)^2$ est constante et égale à la force de poussée exercée par l'hélice, $U(x)$ étant la vitesse moyenne du jet turbulent.

Comment la force de poussée varie-t-elle avec ω et R_h ?

Montrer que la trajectoire (x, z) d'une bulle injectée dans le sillage de l'hélice est donnée par le système d'équations différentielles :

$$\frac{dx}{dt} = A \frac{\omega R_h^2}{\alpha x} \quad (11)$$

$$\frac{dz}{dt} = V_0 \quad (12)$$

où A est un facteur numérique.

Montrer qu'une bulle injectée sur l'axe du sillage sort du jet turbulent à une position axiale x_s telle que :

$$x_s = \frac{2A\omega R_h^2}{V_0} \quad (13)$$

Comparer ce résultat à la longueur du sillage mesurée pour des bulles de 1 mm de rayon et $R_h = 15$ mm.

2.3 Second régime de sillage

2.3.1 Fractionnement des bulles

Au delà de la vitesse de rotation ω_b , on constate que les bulles sont fractionnées par leur passage dans l'hélice. On modélise l'écoulement autour de l'hélice comme un écoulement turbulent homogène obéissant aux lois d'échelle de Kolmogorov : les fluctuations de vitesse $u(l)$ à l'échelle l sont telles que : $u(l) = \epsilon^{1/3} l^{1/3}$ où ϵ est le taux de transfert d'énergie entre les différentes échelles de l'écoulement. Un point crucial de cette description est que le taux de transfert d'énergie ϵ est le même à toutes les échelles.

Quelle est, en ordre de grandeur, l'énergie de surface mise en jeu dans le fractionnement d'une bulle de rayon a en deux bulles identiques, à volume constant de gaz ?

Montrer, qu'en ordre de grandeur, la rupture des bulles de rayon a se produit lorsque la vitesse de rotation de l'hélice atteint la valeur ω_b telle que :

$$\gamma \approx \rho \omega_b^2 R_h^{4/3} a^{5/3} \quad (14)$$

où γ est la tension superficielle de l'eau.

En prenant $\gamma = 50$ mN/m, comparer la valeur de ω_b donnée par l'éqn. 14 aux données expérimentales.

2.3.2 Variation de L_s avec la vitesse de rotation

On se place maintenant à une vitesse de rotation supérieure à ω_b . Déterminer la taille $a(\omega)$ des bulles qui subsistent après le passage dans l'hélice.

En utilisant le résultat établi ci-dessus pour la trajectoire des bulles dans le sillage, déterminer la longueur du sillage et sa variation avec ω . Comment ce résultat se compare-t-il aux données expérimentales ?

2.4 Capture des bulles par une hélice

Cette question est indépendante de la partie 2.3.

Une deuxième partie de l'étude concerne la capture de bulles par l'hélice. Les bulles sont injectées en amont et au-dessus de l'axe de l'hélice (fig. 8). Pour chaque diamètre de bulle et chaque position d'injection, on augmente lentement la vitesse de rotation de l'hélice ω pour déterminer la vitesse ω_{capt} à laquelle les bulles sont entraînées dans le jet produit par l'hélice.

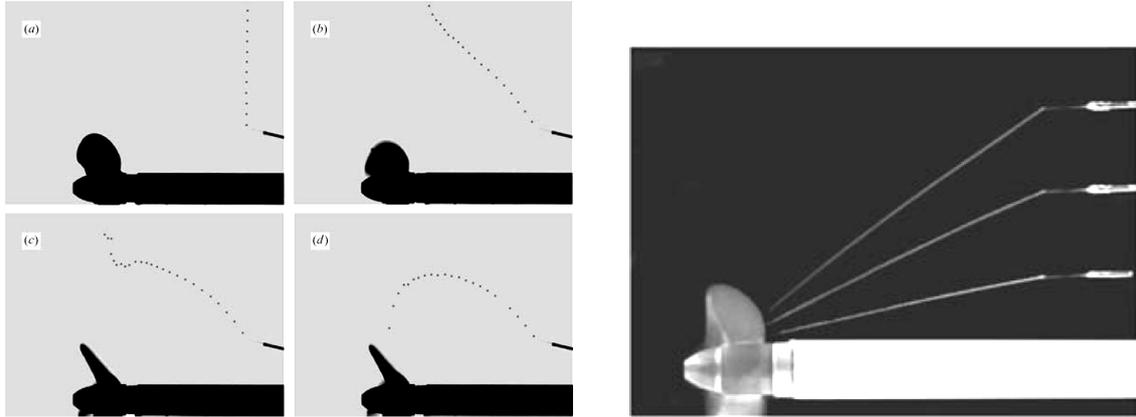


FIG. 8 – A gauche : Trajectoires de bulles injectées en amont de l’hélice. a) sans rotation b) $\omega < \omega_{capt}$ c) ω très légèrement inférieur à ω_{capt} d) $\omega > \omega_{capt}$. A droite, lignes d’émission obtenues à partir de trois injecteurs de colorant placés en amont de l’hélice.

2.4.1 Ecoulement produit en amont de l’hélice

Pour caractériser l’écoulement produit par l’hélice, on place trois injecteurs de colorant en amont. Les lignes d’émission ainsi obtenues sont représentées sur la fig. 8.

Montrer que cette forme de lignes de courant implique pour l’écoulement en amont de l’hélice un champ de vitesse de la forme :

$$u_r(r) = -\frac{Q}{2\pi r^2} \quad (15)$$

Quelle est la signification physique de Q et comment dépend-il de la vitesse de rotation et du rayon de l’hélice ?

2.4.2 Critère de capture

Les bulles sont injectées en amont à une distance r_0 de l’hélice. Montrer par un raisonnement dimensionnel (il n’est pas question de calculer exactement la trajectoire des bulles) que la vitesse critique de capture est telle que :

$$\omega_{capt} \propto \frac{r_0^2}{R_h^3} V_0 \quad (16)$$

où V_0 est toujours la vitesse d’ascension des bulles en l’absence d’écoulement externe.