

Examen de mécanique des fluides

123^{ème} promotion

- **Partie A** : traiter deux exercices au choix parmi les trois proposés. Aucun document n'est autorisé. Durée : 1h15. 8 points.
- **Partie B** : traiter l'intégralité du problème. Durée : 2h15. 12 points. Documents autorisés : notes de cours, notes personnelles manuscrites. Les ouvrages et photocopies d'ouvrages ne sont pas autorisés.
- Rédiger les parties A et B sur des copies séparées. La partie A sera ramassée après 1h15.
- Lire attentivement l'intégralité des énoncés.
- La plupart des résultats sont donnés dans l'énoncé. Ne vous bloquez pas sur une question si vous n'arrivez pas à la résoudre.

1 Partie A

1.1 Anémomètre à coupelle

Les stations météorologiques utilisent très souvent des anémomètres rotatifs (fig. 1) pour mesurer la vitesse du vent et ses fluctuations. L'appareil comprend essentiellement trois coupelles coniques montées sur un axe tournant vertical. Les calibrations faites en soufflerie montrent que la vitesse de rotation Ω est proportionnelle à la vitesse du vent U , supposée ici parfaitement horizontale.

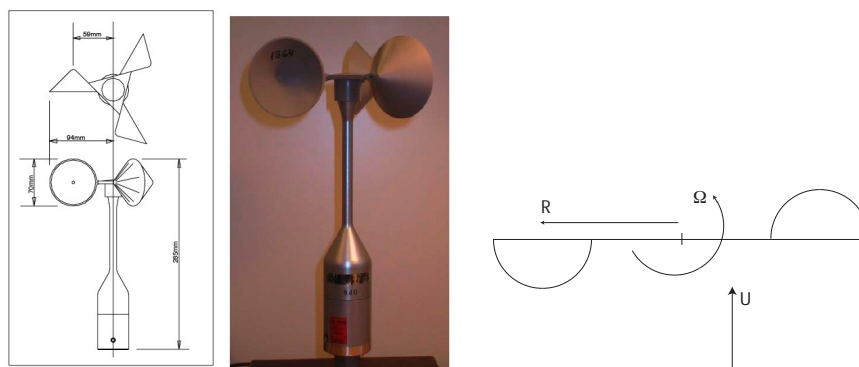


FIG. 1 – Schéma et photographie d'un anémomètre à trois coupelles (à gauche). Schéma simplifié d'un anémomètre à deux coupelles (à droite).

Pour simplifier la description de l'anémomètre, on considère un modèle comportant seulement deux coupelles (fig. 1).

1. Montrer que, lorsque le support des coupelles est perpendiculaire au vent, le couple résultant des forces aérodynamiques s'écrit :

$$\Gamma_a = \frac{1}{2} \rho U^2 R S [(C_a - C_r)(1 + \omega^2) - 2\omega(C_a + C_r)] \quad (1)$$

où ρ est la masse volumique de l'air, S la surface frontale des coupelles, R leur distance à l'axe de rotation et $\omega = \Omega R/U$.

Donner la signification physique des coefficients C_a et C_r et leur ordre de grandeur.

2. Comment varie qualitativement le couple aérodynamique en fonction de l'orientation des coupelles ?

- En supposant que la relation 1 reste valide lorsque le couple aérodynamique est moyenné sur la période de rotation, et que le couple de friction est très petit devant Γ_a , donner l'expression de la vitesse de rotation.
- Un vélocimètre de ce type peut-il être utilisé pour mesurer la vitesse d'un fluide très visqueux ?

Les caractéristiques de l'anémomètre étudié sont :

- Surface frontale des coupelles : $S = 38\text{cm}^2$
- Distance à l'axe de rotation : $R = 5,8\text{ cm}$
- Vitesse minimale d'utilisation $U_s = 0,22\text{m/s}$.
- Couple de friction solide sur l'axe de l'anémomètre, à vitesse angulaire nulle : $\Gamma_{f0} = 4 \times 10^{-6}\text{ N.m}$
- Force aérodynamique exercée sur l'anémomètre fixe ($\omega = 0$) à $U = 4\text{m/s}$: $5,3 \times 10^{-2}\text{ N}$

1.2 Écoulement de lave

Les propriétés d'écoulement des laves varient fortement selon leur composition et leur contenu en gaz. Cependant, en première approximation, on peut utiliser un modèle rhéologique de Bingham, où la contrainte de cisaillement σ est reliée au gradient de vitesse $\dot{\gamma}$ par la relation :

$$\sigma = \sigma_0 + \eta_p \dot{\gamma} \quad (2)$$

où σ_0 est la contrainte seuil d'écoulement et η_p est la viscosité plastique.

On décrit un écoulement de géométrie simple, l'épaisseur H de la coulée est constant et la pente α du terrain est également constante. L'écoulement est unidirectionnel, stationnaire.

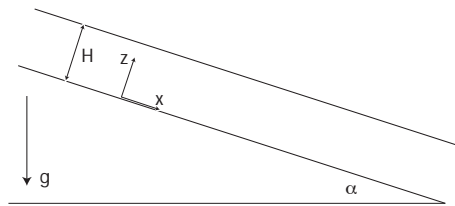


FIG. 2 – Schéma de la coulée de lave.

- Montrer que la répartition de contrainte tangentielle dans la coulée est donnée par :

$$\sigma_{xz} = \rho g \sin \alpha (H - z) \quad (3)$$

où ρ est la masse volumique de la lave.

- Quelle est l'épaisseur minimale de lave H_c au delà de laquelle la coulée avance ?
- Déterminer le profil de vitesse $u_x(z)$ lorsque H est supérieur à H_c . Quelle est la forme de ce profil dans la limite H très légèrement supérieur à H_c ($(H - H_c)/H_c \ll 1$) et dans la limite H très grand devant H_c ?
- Quels sont les régimes d'écoulement et la vitesse superficielle pour deux types de laves :
 - Lave basaltique hawaïenne : $\sigma_0 \approx 500\text{Pa}$, $\eta_p \approx 200\text{Pa.s}$, $\rho \approx 1200\text{kg/m}^3$, $H \approx 1\text{m}$, $\alpha \approx 10^\circ$
 - Andésite : $\sigma_0 \approx 10^5\text{Pa}$, $\eta_p \approx 10^7\text{Pa.s}$, $\rho \approx 2600\text{kg/m}^3$, $H \approx 100\text{m}$, $\alpha \approx 10^\circ$

1.3 Écoulement de deux fluides non miscibles dans une conduite.

On étudie l'écoulement de deux fluides non miscibles, de viscosités différentes η_1 et η_2 dans une conduite de section circulaire. Le liquide 1 occupe le centre du tube ($0 < r < R(1 - \epsilon)$) et le

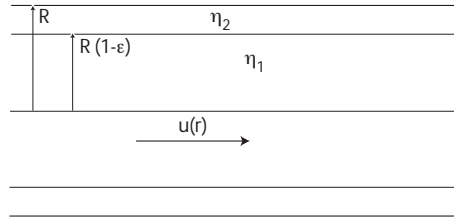


FIG. 3 – Deux fluides non miscibles dans une conduite de section circulaire.

liquide 2 la périphérie (fig. 3). On suppose que l'interface entre les deux liquides reste cylindrique au cours de l'écoulement et on néglige tous les effets liés à la tension interfaciale entre les deux fluides.

1. Les deux liquides sont mis en mouvement par un gradient de pression G . Montrer que le champ de vitesse est de la forme :

$$u = \frac{Gr^2}{4\eta} + A \ln r + B \quad (4)$$

dans chacun des liquides.

2. Quelles sont les conditions aux limites qui permettent de déterminer les constantes A et B pour chacun des liquides ?
3. On considère maintenant le cas où le liquide extérieur occupe une couche très mince le long de la paroi (c'est-à-dire $\epsilon \ll 1$). Montrer que les champs de vitesse sont alors :

$$u_1 = \frac{G}{4\eta_1} \left[r^2 - R^2 - 2R^2\epsilon \left(\frac{\eta_1}{\eta_2} - 1 \right) \right] \quad (5)$$

et

$$u_2 = \frac{G}{4\eta_2} (r^2 - R^2) \quad (6)$$

4. Représenter qualitativement le champ de vitesse lorsque le fluide le moins visqueux est à l'extérieur.
5. La présence d'une mince couche de fluide peu visqueux permet-elle d'augmenter le débit d'un fluide visqueux dans la canalisation, à gradient de pression donné ?

L'expression du Laplacien en coordonnées cylindriques est :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$$

2 Partie B : Impacts sur un liquide

Les deux parties, "Impacts" et "Rebonds" sont indépendantes.

2.1 Impacts

D'après V. Duclaux et al., "Dynamics of transient cavities", *J. Fluid Mech.* 2006.

Lorsqu'un projectile solide entre dans l'eau à une vitesse assez grande, une cavité d'air se forme à l'arrière du projectile (fig. 4). Nous essayons de décrire ici la dynamique de cette cavité.

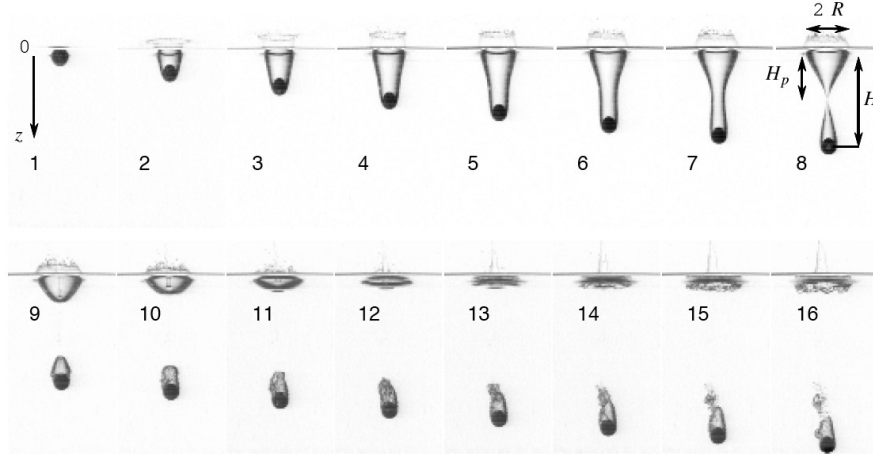


FIG. 4 – Chronophotographie de l'impact d'une sphère (rayon 12 mm) à 2,1 m/s. Les images sont espacées de 9,3 ms.

1. Quel est l'ordre de grandeur du nombre de Reynolds pour l'écoulement dans l'eau? Que peut-on en déduire pour la dynamique de l'écoulement?
2. Pourquoi peut-on considérer que le champ de vitesse \mathbf{u} dérive d'un potentiel ϕ , $\mathbf{u} = \nabla\phi$?
3. La tension interfaciale eau-air joue-t-elle un rôle significatif dans l'évolution de la cavité? Pour répondre à cette question, on construira les nombres sans dimension appropriés et on évaluera leur ordre de grandeur.
4. La cavité d'air est représentée schématiquement sur la fig. 5. Montrer que l'évolution du rayon R de la cavité à la profondeur z est donnée par :

$$\left. \frac{\partial\phi}{\partial t} \right|_{r=R} + \frac{1}{2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 = gz \quad (7)$$

5. Quelle équation doit satisfaire le potentiel de vitesse?
6. Une solution approchée pour le potentiel, respectant la symétrie cylindrique, est : $\phi = -R\dot{R} \exp(1 - r/R)$. Que devient alors l'équation d'évolution de R , en utilisant l'approximation, valide à temps court :

$$R \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 \approx \frac{1}{2} \frac{d^2 R^2}{dt^2}$$

7. En faisant l'hypothèse que $\dot{R}(t=0) = 0$ (hypothèse vérifiée dans le cas de l'impact d'objets cylindriques), montrer que la forme de la cavité est donnée par :

$$\left(\frac{R}{R_0} \right)^2 = 1 - \frac{gR_0}{U^2} \left(\frac{H}{R_0} \right)^3 \zeta(1 - \zeta)^2 \quad (8)$$

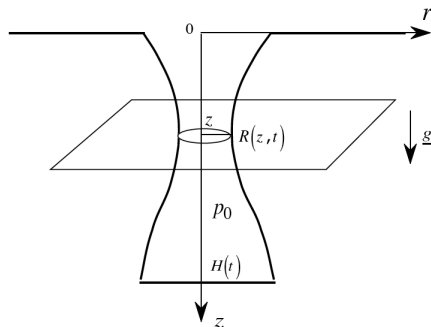


FIG. 5 – Schéma de la cavité formée derrière l'obstacle et définition des coordonnées.

où R_0 est le rayon à la base de la cavité, $H = Ut$ est sa profondeur et $\zeta = z/H$.
 Quelle est la signification physique du rapport gR_0/U^2 ?

8. Montrer que, dans ce modèle, lorsque la cavité se pince ($R = 0$), sa hauteur H est proportionnelle à $(U^2/gR_0)^{1/3}$. Comment ce résultat se compare-t-il aux données expérimentales de la fig. 6 ?

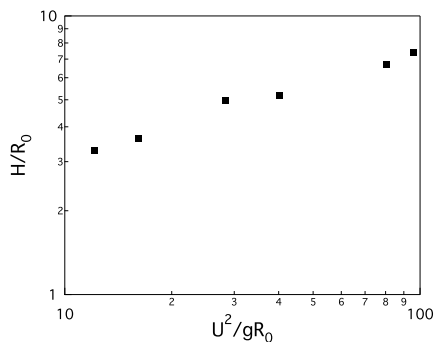


FIG. 6 – Hauteur réduite de la cavité au moment de son pincement en fonction de U^2/gR_0 . Diagramme en coordonnées logarithmiques.

2.2 Rebonds

D'après Y. Couder et al., "From bouncing to floating : noncoalescence of drops on a fluid bath", *Phys. Rev. Lett.*, **94**, 177801 (2005).

En général, lorsqu'on pose une goutte de liquide sur un bain du même liquide, la goutte coalesce avec le bain en un temps très court. Il est toutefois possible d'empêcher la coalescence en faisant vibrer le bain verticalement avec une accélération suffisamment grande et en utilisant de petites gouttes d'huile assez visqueuse (fig. 7).

2.2.1 Vibrations

Dans les expériences mentionnées ci-dessus, on observe que la goutte reste pratiquement sphérique. Nous commençons par chercher les conditions pour les quelles la goutte s'éloigne très peu d'une forme sphérique.

Fréquence propre d'oscillation. Une petite goutte, légèrement déformée (par exemple lorsqu'elle se détache d'un filet liquide) oscille à une fréquence bien déterminée. Montrer, par un raisonnement dimensionnel que cette fréquence propre est donnée par :

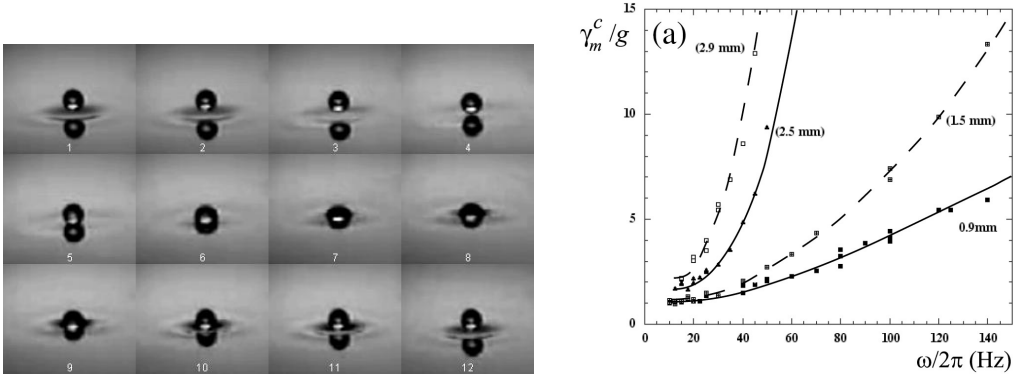


FIG. 7 – Goutte d’huile rebondissant sur un bain du même liquide, 12 photographies prises dans un seul cycle de rebond (à gauche). Accélération nécessaire (normalisée par g) pour empêcher la coalescence en fonction de la fréquence pour différentes tailles de goutte (huile silicone 1 Pa.s) (à droite).

$$\omega_0 \propto \sqrt{\frac{\gamma}{\rho R^3}} \quad (9)$$

Quelle est la valeur de cette fréquence propre pour une goutte d’huile ($\gamma=20$ mN/m) de rayon 1 mm ?

Atténuation des oscillations. Estimer la puissance dissipée par viscosité dans la goutte oscillante. Montrer que le temps d’atténuation des oscillations est, en ordre de grandeur :

$$\tau \propto R^2/\nu \quad (10)$$

Quel est ce temps d’atténuation pour les gouttes utilisées dans l’expérience ($R = 1$ mm, $\eta = 1$ Pa.s= 1000 η_{eau}) et comment se compare-t-il aux périodes d’oscillation du bain et de la goutte ?

2.2.2 Condition de rebond

L’absence de coalescence est assurée par un film d’air intercalé, d’épaisseur h et de rayon r_F , entre la goutte et le bain.

Temps de drainage du film. Montrer que, si U est la vitesse verticale de la goutte par rapport à la surface du bain, la force exercée sur la goutte est de l’ordre de :

$$F \approx \frac{\eta_a U r_F^4}{h^3} \quad (11)$$

où η_a est la viscosité de l’air.

Montrer que le temps de drainage du film d’air sous l’effet du poids de la goutte est, en ordre de grandeur :

$$t \approx \frac{\eta_a r_F^4}{\rho_L R^3 g h^2} \quad (12)$$

où ρ_L la masse volumique du liquide.

Comment la période d’oscillation doit-elle se comparer au temps de drainage pour qu’il n’y ait pas de coalescence ?

Quelle serait la différence essentielle entre l’expérience décrite ici et une expérience similaire avec des surfaces solides quasi indéformables, c’est-à-dire avec une petite bille posée sur un plan vibrant verticalement ?