

# Examen de mécanique des fluides

## 122<sup>ème</sup> promotion

24 février 2005 : 9h - 12h30

- **Partie A : traiter deux exercices au choix parmi les trois proposés. Durée : 1h15. 8 points.**
- **Partie B : traiter l'intégralité du problème. Durée : 2h15. 12 points**
- **Rédiger les parties A et B sur des copies séparées. La partie A sera ramassée après 1h15.**
- Lire attentivement l'intégralité des énoncés.
- La plupart des résultats sont donnés dans l'énoncé. Ne vous bloquez pas sur une question si vous n'arrivez pas à la résoudre.
- Documents autorisés : notes de cours, notes de travaux dirigés, notes personnelles manuscrites. Les ouvrages et photocopies d'ouvrages ne sont pas autorisés.

## 1 Partie A

### 1.1 Écoulement dans un tuyau souple

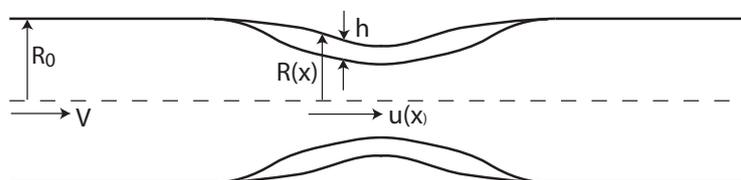


FIG. 1 – Schéma de l'écoulement dans un tube souple partiellement obstrué.

On modélise l'écoulement du sang dans une artère partiellement bloquée par *l'écoulement potentiel d'un fluide parfait* dans un long tube élastique de révolution autour d'un axe Ox (fig. 1). Le rayon extérieur du tube est égal à  $R(x)$  et le rayon intérieur est  $R(x) - h(x)$  ( $h(x)$  représente l'épaisseur des dépôts sur l'intérieur du tube).  $h(x)$  est une fonction à variation lente ( $dh/dx \ll 1$ ). La pression à l'extérieur du tube est égale à la pression atmosphérique  $p_0$ . La pression  $p(x)$  et la vitesse  $u(x)$  sont par ailleurs supposées constantes dans une section  $x = C^{te}$ . À grande distance en amont, la vitesse et le rayon du tube sont constants et prennent des valeurs respectives  $V$  et  $R_0$  tandis que  $h(x)$  est nul. On néglige l'influence de la pesanteur. Enfin, en raison de l'élasticité du tube, la pression  $p(x)$  à l'intérieur de celui-ci est liée à la pression extérieure  $p_0$  par :

$p(x) = p_0 + \kappa(R(x) - R_0)$ , où  $\kappa$  est une constante.

1. Quelle est la relation entre  $R(x)$ ,  $h(x)$  et  $u(x)$ , quelle est la relation entre  $p(x)$  et  $u(x)$  ?
2. Décrire qualitativement la répartition de pression le long du tube.
3. Montrer que  $u$  et  $h$  vérifient l'équation :

$$\frac{1}{\sqrt{\tilde{u}}} = 1 - \tilde{h} + \lambda(1 - \tilde{u}^2) \quad (1)$$

où  $\tilde{u} = u/V$ ,  $\tilde{h} = h/R_0$  et  $\lambda = \rho V^2 / 2\kappa R_0$

4. Quelle est la signification physique du paramètre  $\lambda$  ?
5. Quelle est la valeur de  $\tilde{u}$  correspondant à un extrêum ( $dh/dx = 0$ ) de  $h$  et quelle est la valeur  $\tilde{h}_m$  correspondante lorsque le paramètre  $\lambda$  est donné ?
6. Que se passerait-il si la valeur maximale de  $\tilde{h}(x)$  était supérieure à  $\tilde{h}_m(\lambda)$  ?

## 1.2 Bigoutte

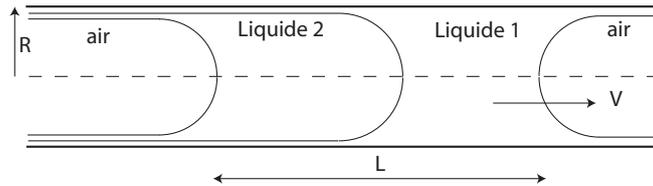


FIG. 2 – Schéma d'une "bigoutte" de longueur  $L$  placée dans un tube capillaire.

Marangoni a montré en 1871 qu'il est possible de choisir un couple de liquides de telle manière à se trouver dans la situation de "bigoutte filante" schématisée sur la fig. 2. Les deux liquides 1 et 2, de même viscosité dynamique  $\eta$  sont juxtaposés dans un tube capillaire de rayon  $R$  ( $R$  est de l'ordre de quelques dixièmes de mm). Leurs tensions superficielles sont respectivement  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ . La tension interfaciale entre les deux liquides est  $\gamma_{12}$ . Les deux liquides mouillent complètement la surface du tube et laissent sur celui-ci des films d'épaisseurs très petites devant  $R$ . On pourra donc faire l'hypothèse que les rayons de courbure des trois ménisques sont égaux à  $R$ . La longueur  $L$  du train de liquides est beaucoup plus grande que  $R$ .

1. Montrer que la force exercée sur la bigoutte est  $2\pi R(\gamma_1 - \gamma_{12} - \gamma_2)$
2. On constate expérimentalement que la bigoutte se déplace à une vitesse constante  $V$  (typiquement  $V$  est de l'ordre de 1 mm/s pour des liquides dont la viscosité est 20 fois celle de l'eau). Quel est le champ de vitesse dans les deux liquides, loin des ménisques ?
3. Représenter graphiquement la répartition de pression le long du tube lorsque la bigoutte est en mouvement.
4. Donner l'expression de la vitesse  $V$ .

## 1.3 De la chute de deux petits animaux

### 1.3.1 De la chute des fourmis

Une publication récente [*Nature*, **433**, 624 (2005)] décrit la trajectoire de chute de certaines ouvrières qui se laissent tomber des arbres sur lesquelles elles vivent. Les fourmis, dépourvues d'ailes, arrivent à planer suffisamment dans l'air pour atterrir sur le tronc et regagner ainsi leur colonie assez rapidement.

La masse moyenne des fourmis utilisées dans cette étude est 50 mg et la longueur moyenne de leurs corps est 12 mm.

1. Quel est l'ordre de grandeur du nombre de Reynolds de l'écoulement d'air ? Que pouvez vous en déduire sur l'expression des forces aérodynamiques ?
2. Déterminer les coefficients de portance et de traînée à partir de la trajectoire reportée fig. 3

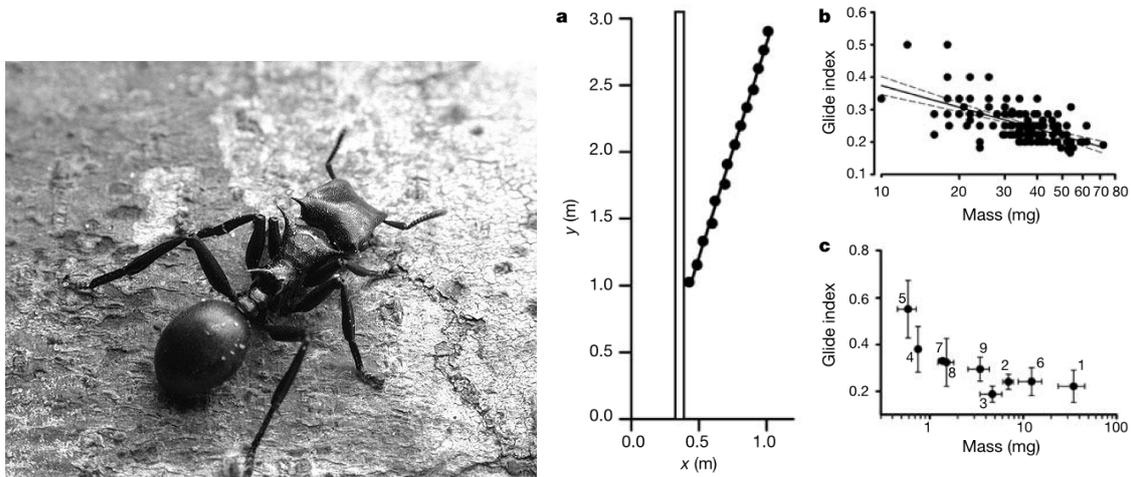


FIG. 3 – A gauche, photographie de *Cephalotes Atratus*, l'espèce utilisée dans cette étude. À droite, données relatives à la chute des fourmis : a) trajectoire représentative dans la phase planée, les points sont espacés dans le temps de 1/30s; b et c ) indice de portance (rapport distance horizontale/distance verticale) en fonction de la masse pour deux espèces différentes

### 1.3.2 De la chute des larves d'oursin

Certaines larves d'oursin ont un corps muni de "tiges" rectilignes (fig. 4). Ces tiges sont munies de cils microscopiques permettant la propulsion. Leur centre de gravité est placé sous le centre de flottabilité de manière à assurer une certaine stabilité angulaire. Le nombre et l'inclinaison  $\alpha$  des tiges est variable selon les espèces. On cherche ici à calculer les forces d'origine hydrodynamique exercées sur la larve lorsqu'elle se déplace. La forme du corps est réduite aux tiges cylindriques de longueur  $L$  et de rayon  $a$  (avec  $L \gg a$ ). Les tiges font un angle  $\alpha$  avec l'horizontale.

1. La vitesse de déplacement n'excède pas 0,1 mm/s. Donner un ordre de grandeur du nombre de Reynolds associé à l'écoulement autour de la larve. Que peut-on en déduire sur l'expression des forces ?
2. On s'intéresse uniquement au déplacement vertical passif de la larve sous son propre poids. Donner l'expression de la force exercée par l'écoulement sur une seule des tiges inclinées. Dans le cas où le corps porte quatre tiges identiques, donner l'expression de la force de traînée totale en fonction de l'angle  $\alpha$ .

## 2 Partie B : Bioconvection

D'après C. Dombrowski et al., Self-concentration and large-scale coherence in bacterial dynamics, *Phys. Rev. Lett.*, **93**, 098103 (2004).

On cherche à analyser une expérience de *bioconvection* représentée fig. 5 : une goutte de suspension de bactéries est placée, soit sur un substrat plan, soit entre deux parois verticales. Après quelques minutes, on constate que les bactéries migrent vers la surface libre. Cette migration est provoquée par le gradient de concentration en oxygène. Les bactéries étant légèrement plus denses que l'eau, leur migration provoque un changement de la masse volumique de la suspension. Ces inhomogénéités de densité provoquent à leur tour des écoulements dans la goutte de liquide, écoulements qui vont modifier de manière importante le transfert d'oxygène.

**Les quatre parties du problème sont indépendantes.**

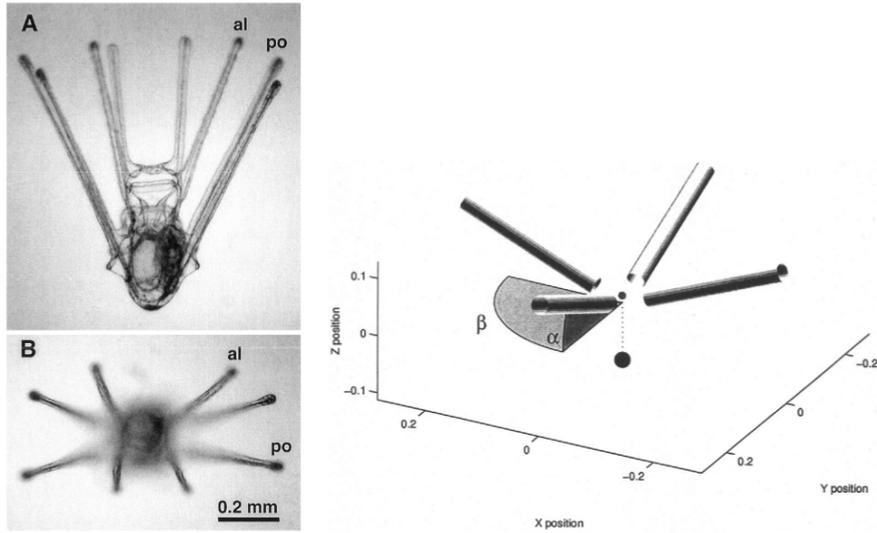


FIG. 4 – Photographie d'une larve d'oursin plat *Dendraster Excentricus*. Modèle simplifié composé de tiges inclinées d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontale.

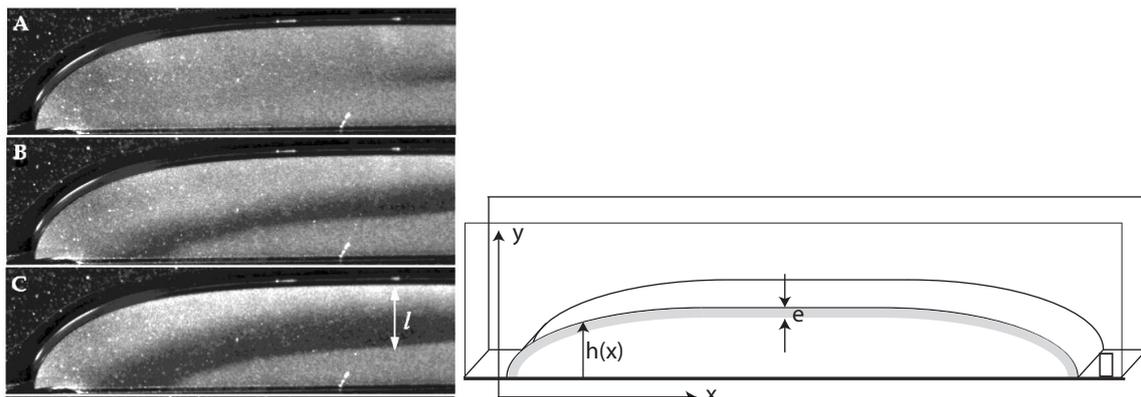


FIG. 5 – Suspension de *Bacillus Subtilis* placée entre deux parois de verre verticales. Initialement (A) la suspension est homogène. Ensuite (B et C) les bactéries migrent vers la surface libre où la concentration en oxygène est plus grande.

## 2.1 Migration chimiotactique

On cherche tout d'abord à décrire le mouvement vertical des bactéries vers la surface libre, en l'absence d'écoulement moyen.  $n$  est le nombre de bactéries par unité de volume,  $c$  est la concentration en oxygène. Le mouvement des bactéries est caractérisé par :

- un coefficient de diffusion  $D_n$  représentant le résultat de la nage dans des directions aléatoires
- une vitesse de migration moyenne, proportionnelle au gradient de concentration en oxygène :  
 $\mathbf{v} = a\nabla c$

L'oxygène a un coefficient de diffusion  $D_c$ . Il est consommé par les bactéries à un taux  $K$  par bactérie.

Les paramètres ont les valeurs suivantes :

- concentration initiale de bactéries :  $n_0 \approx 10^8/\text{cm}^3$
- diffusivité des bactéries  $D_n = 10^{-5}\text{cm}^2/\text{s}$
- diffusivité de l'oxygène  $D_c = 2 \times 10^{-5}\text{cm}^2/\text{s}$
- taux de consommation d'oxygène  $K = 10^6$  molécules/cellule/s
- $c_0 = 10^{17}$  molécules/ $\text{cm}^3$
- coefficient de mobilité chimiotactique  $a = 10^{-21}\text{cm}\cdot\text{s}^{-1}/(\text{molécules}/\text{cm}^4)$

1. Montrer que la concentration en oxygène et en bactéries sont régies par les équations suivantes :

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D_c \Delta c - nK \quad (2)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D_n \Delta n - \nabla \cdot (na\nabla c) \quad (3)$$

2. On cherche des solutions *stationnaires* des équations 2 et 3. La résolution de ces deux équations couplées est délicate dans un cas général. Donner tout d'abord un ordre de grandeur de la distance  $d$  sur laquelle s'établit le gradient de concentration en oxygène.
3. Quel est l'ordre de grandeur de la vitesse de migration chimiotactique  $v$  ?
4. En supposant que  $v$  est indépendant de la coordonnée verticale, donner un ordre de grandeur de l'épaisseur  $e$  sur laquelle les bactéries sont concentrées à la surface.

## 2.2 Instabilité

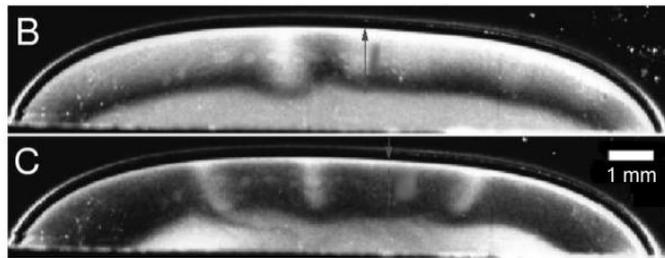


FIG. 6 – Evolution ultérieure de la suspension de bactéries, montrant l'instabilité de la couche dense rassemblée à la surface de la goutte

Dans la partie centrale de la goutte (fig. 6), la couche concentrée de bactéries est instable et redescend sous forme de "gouttes" dont nous pouvons essayer de calculer l'espacement  $\lambda$ . Une théorie complète nécessite la résolution globale du problème de stabilité linéaire avec les équations couplées pour le transport de la quantité de mouvement, des bactéries et de l'oxygène. Nous développons ici un raisonnement dimensionnel.

1. Estimer la vitesse de chute  $U$  d'une "goutte" de suspension dense (masse volumique  $\delta\rho$  au dessus de la masse volumique moyenne) d'extension latérale et verticale  $\lambda$ , en tenant compte du fait que le liquide est emprisonné entre deux parois verticales distantes de  $d \approx 1$  mm.
2. Donner un ordre de grandeur du temps  $t_D$  de diffusion des bactéries sur une distance  $\lambda$ .
3. Comparer le temps de diffusion  $t_D$  au temps que mettrait la goutte de fluide dense pour parcourir une distance verticale de l'ordre de  $\lambda$ . Que pouvez vous en déduire sur la stabilité ou l'instabilité de la couche dense à l'échelle spatiale  $\lambda$ ?

### 2.3 Ecoulement dans le coin

Sur le bord d'une goutte posée sur un substrat plan, l'écoulement est fortement influencé par la présence d'une surface libre inclinée. Pour évaluer la vitesse de l'écoulement induit par la couche dense de bactéries, on construit un modèle simple dans lequel la couche de bactéries d'épaisseur  $e$  est considérée comme une couche quasi-solide exerçant une traction sur l'interface.

Montrer que cette traction est, par unité de surface,  $\sigma = \delta\rho g e \sin\theta$  où  $\delta\rho$  est la différence de masse volumique entre la suspension concentrée de bactéries et la suspension sous-jacente, beaucoup moins dense,  $\theta$  est l'inclinaison de la surface libre.

Nous supposons que l'écoulement dans le coin est bidimensionnel et que l'angle  $\theta$  est petit. De plus, on fait l'hypothèse que, sous la couche concentrée de surface, la suspension est homogène.

1. Montrer que la composante verticale de vitesse  $v$  est petite devant la composante horizontale  $u$ .
2. Montrer que la composante  $u$  obéit aux équations :

$$\eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial p}{\partial x} \quad (4)$$

$$\int_0^{h(x)} u dy = 0 \quad (5)$$

3. Quelles sont les conditions aux limites que doit satisfaire  $u$ ?
4. Quel est le champ de vitesse  $u(y)$ ?
5. Donner l'ordre de grandeur de  $u$  lorsque  $\delta\rho \approx 100\text{kg/m}^3$ ,  $e \approx 0,1\text{mm}$ ,  $h \approx 2\text{mm}$  et  $\theta \approx 0,1$ .

### 2.4 Effet Boycott

Dans la publication citée plus haut, les auteurs font une analogie entre le phénomène qu'ils observent et "l'effet Boycott" décrit ci-dessous.

La sédimentation d'une suspension dans un récipient haut et allongé est considérablement accélérée si le récipient est légèrement incliné par rapport à la verticale. Cet effet a été observé pour la première fois par A. Boycott en 1920 lors de la séparation de cellules sanguines. Les expériences montrent que la suspension, initialement de concentration uniforme  $c_0$ , se sépare en trois régions (fig. 7) : une région de fluide clair ( $c = 0$ ) en haut et sur la paroi inclinée supérieure, une région centrale où la concentration reste voisine de  $c_0$  et une couche de sédiment en bas et sur la paroi inclinée inférieure.

La suspension est composée de petites particules sphériques (rayon  $a = 10\mu\text{m}$ , masse volumique  $\rho_p = 1100\text{kg/m}^3$  dispersées dans l'eau. Les particules sédimentent à une vitesse  $v_0 \approx 20\mu\text{m/s}$ .

Dans la suite, on s'intéresse uniquement à l'écoulement global observé dans le récipient, écoulement schématisé fig. 8. Pour déterminer l'écoulement dans le récipient incliné, on considère un fluide effectif de masse volumique  $\rho(c)$ , moyenne pondérée des masses volumiques du fluide et des particules. De la même manière, on définit une vitesse moyenne de la suspension  $\mathbf{u}$  qui est une moyenne pondérée de la vitesse du fluide et de celle des particules. On admettra que ce fluide effectif obéit à l'équation de Navier-Stokes avec une viscosité dynamique  $\eta$  qui reste très proche de celle de l'eau.

1. Si la répartition de pression restait hydrostatique, quelle serait la pression en deux points du récipient *situés à une même altitude*  $z$ , l'un étant situé dans la suspension, l'autre étant situé dans la mince couche de fluide clair ? Le liquide peut-il rester immobile avec une telle répartition de pression ?
2. On définit les deux paramètres sans dimension suivants :

$$R = \frac{\rho_0 v_0 l}{\eta} \quad \Lambda = \frac{(\rho_p - \rho_0) g l^2}{\eta u_0}$$

où  $l$  est une longueur comparable à la hauteur du récipient et à la hauteur  $H$  de la suspension. Quelle est la signification physique des ces deux paramètres ? Quel est leur ordre de grandeur lorsque  $l$  vaut 10 cm ?

3. Les termes inertiels sont-ils importants pour l'écoulement global, à l'échelle  $l$  ?
4. On cherche enfin à évaluer, par un raisonnement dimensionnel, l'épaisseur  $\delta$  de la couche de fluide clair. On note  $u$  et  $v$  les composantes de vitesse dans le repère lié au récipient (tourné d'un angle  $\alpha$  par rapport à la verticale, fig. 8).  $v$  a le même ordre de grandeur que  $v_0$ , la vitesse de sédimentation des particules.

Montrer que  $u$  est relié à  $v$  par :  $u \approx v(l/\delta)$ .

5. Montrer que l'ordre de grandeur de la composante  $u$  est donné par :

$$\frac{\eta u}{\delta^2} = \delta \rho g \cos \alpha \quad (6)$$

$\delta \rho$  étant la différence de masse volumique entre le fluide clair et la suspension.

6. En déduire l'ordre de grandeur de  $\delta$  en fonction de  $\Lambda$ .

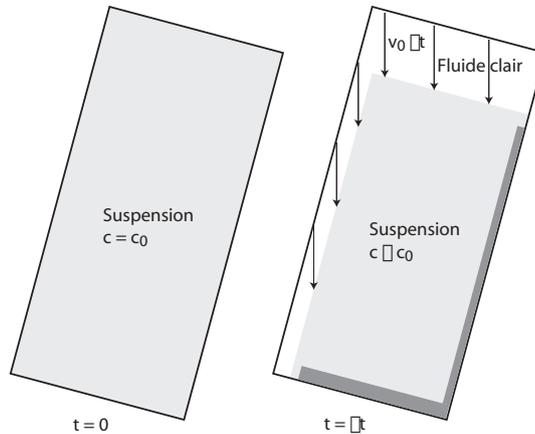


FIG. 7 – Sédimentation d'une suspension dans un récipient incliné. Création de la couche de fluide clair le long de la paroi inclinée supérieure.

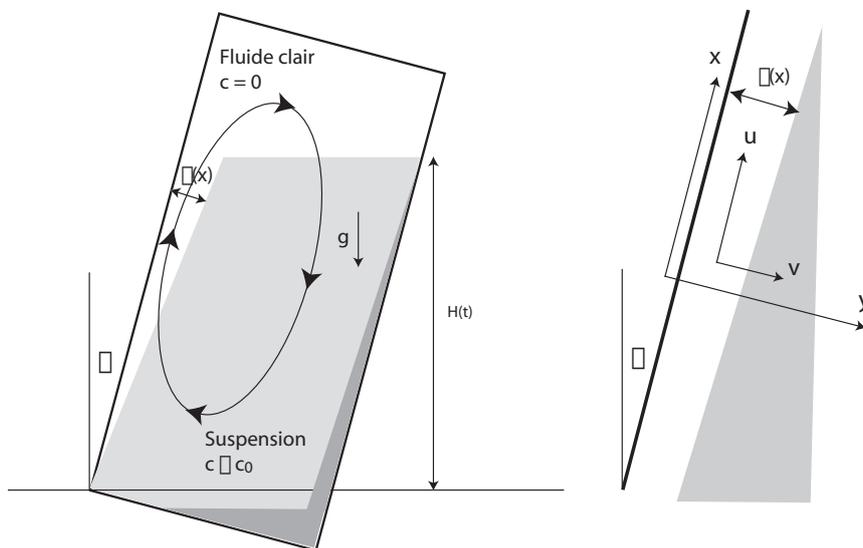


FIG. 8 – Sédimentation d'une suspension dans un récipient incliné. À gauche : écoulement global. À droite : détail de la géométrie de la mince couche de fluide clair.