CORRIGÉS DES EXERCICES PROPOSÉS

MODÉLISATION

MODÉLISATION D'UN MOTEUR A COURANT CONTINU

Modèle d'état du premier ordre : une seule variable d'état, qui est la variable de sortie ω :

$$\dot{\omega}(t) = -\frac{K_1 K_2}{JR}\omega(t) + \frac{K_1}{JR}v(t)$$
$$y(t) = \omega(t)$$

MODÉLISATION D'UN MOTEUR À COURANT CONTINU AVEC FROTTEMENT VISQUEUX ET COUPLE ANTAGONISTE

Modèle d'état :

Couple développé par le moteur : $\gamma(t) = K_1 i(t)$

Force contre-électromotrice : $e(t) = K_2\dot{\theta}(t)$

Loi d'Ohm dans l'induit : $v(t) - e(t) = Ri(t)$

Loi fondamentale de la mécanique : $\gamma(t) - f\omega(t) - \gamma_p(t) = J\ddot{\theta}$

En suivant la même démarche que pour la modélisation du moteur sans frottement, on réécrit la loi d'Ohm :

$$\begin{aligned} v(t) - K_2\omega(t) &= R\frac{\gamma(t)}{K_1} \\ &= \frac{R}{K_1}\left[J\dot{\omega}(t) + f\omega(t) + \gamma_p(t)\right] \end{aligned}$$

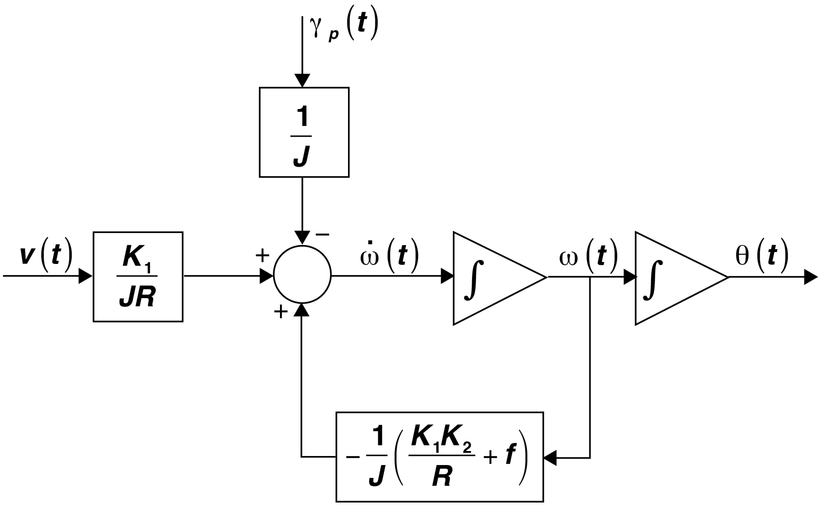
D'où le modèle :

$$\dot{\theta}(t) = \omega(t)$$
$$\dot{\omega}(t) = -\frac{1}{J}\left(\frac{K_1 K_2}{R} + f\right)\omega(t) + \frac{K_1}{JR}v(t) - \frac{\gamma_p(t)}{J}$$

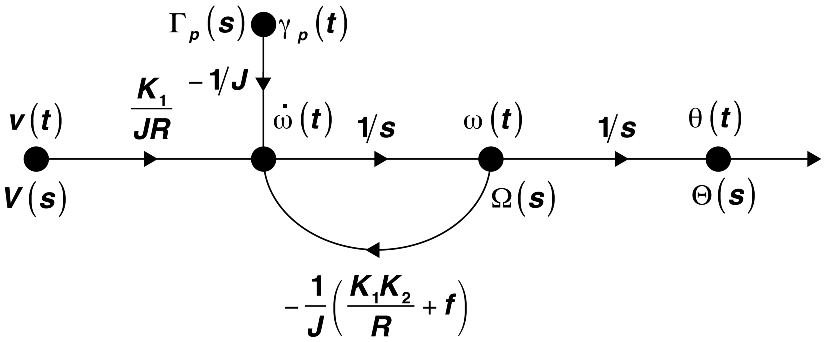
ou encore sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta}(t) \\ \dot{\omega}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{J}\left(\frac{K_1 K_2}{R} + f\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \theta(t) \\ \omega(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{K_1}{JR} & -\frac{1}{J} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v(t) \\ \gamma_p(t) \end{pmatrix}$$

Schéma fonctionnel :



Graphe de fluence :



Matrice de transfert :

Le processus ayant deux entrées et une sortie, sa matrice de transfert est une matrice (1x2) : $G(s)=\begin{pmatrix}G_1(s) & G_2(s)\end{pmatrix}$

Pour trouver les deux éléments de la matrice, on applique successivement la règle de Mason à chaque couple (entrée, sortie) correspondant.

Pour les deux couples, on a :

$$\Delta = 1+\frac{1}{Js}\left(\frac{K_1K_2}{R}+f\right)$$

Pour l'élément G_1 : un seul chemin direct entre $V(s)$ et $\Theta(s)$, pas de boucle disjointe du chemin direct :

$$M_1=\frac{K_1}{JRs^2}\ ;\ \Delta_1=1$$

Pour l'élément G_2 : un seul chemin direct entre $\Gamma_p(s)$ et $\Theta(s)$, pas de boucle disjointe du chemin direct :

$$M_2=\frac{-1}{Js^2}\ ;\ \Delta_2=1$$

On a donc

$$G(s) = \frac{1}{1+\frac{1}{Js}\left(\frac{K_1K_2}{R}+f\right)}\left(\frac{K_1}{JRs^2} \quad -\frac{1}{Js^2}\right)$$

$$= \frac{1}{s\left[s+\frac{1}{J}\left(\frac{K_1K_2}{R}+f\right)\right]}\left(\frac{K_1}{JR} \quad -\frac{1}{J}\right)$$

APPROXIMATION DE LA FONCTION DE TRANSFERT EN z

Exemple 1 : intégrateur

La fonction de transfert de l'intégrateur en temps continu est $G(s) = 1/s$. La fonction de tansgert exacte d'un intégrateur commandé en temps discret est

$$G'(z) = \left(1-z^{-1}\right)ZL^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right)$$

$$= \left(1-z^{-1}\right)\frac{Tz}{\left(z-1\right)^2} = \frac{T}{z-1}$$

En remplaçant s par $(z - 1) / T$ dans $G(s)$, c'est-à-dire en établissant l'expression approchée de $G'(z)$, on obtient la même expression. C'est normal puisque l'intégrale d'une fonction "en escalier" (qui sort du bloqueur) est une fonction "en trapèzes". Donc l'approximatiopn d'Euler, qui consiste à considérer que la dérivée de la variable d'état est constante, est en fait réalisée de manière exacte dans ce cas particulier ;

Exemple 2 : moteur.

Calcul direct à partir de G (s) :

$$\frac{G(s)}{s} = \frac{\beta}{s^2\left(s+\alpha\right)} = \frac{\beta}{\alpha s^2} - \frac{\beta}{\alpha}\frac{1}{s\left(s+\alpha\right)}$$

$$L^{-1}\left(\frac{G(s)}{s}\right) = \frac{\beta}{\alpha}t - \frac{\beta}{\alpha^2}\left(1-e^{-\alpha t}\right)$$

$$ZL^{-1}\left(\frac{G(s)}{s}\right) = \frac{\beta}{\alpha}\frac{Tz}{\left(z-1\right)^2} - \frac{\beta}{\alpha^2}\frac{\left(1-e^{-\alpha T}\right)z}{\left(z-1\right)\left(z-e^{-\alpha T}\right)}$$

$$= \frac{\beta}{\alpha^2}\frac{z}{z-1}\left[\frac{\alpha T}{z-1} - \frac{1-e^{-\alpha T}}{z-e^{-\alpha T}}\right]$$

Donc $G'(z) = \frac{\beta}{\alpha^2}\left[\frac{\alpha T}{z-1} - \frac{1-e^{-\alpha T}}{z-e^{-\alpha T}}\right]$

Calcul à partir des équations récurrentes :

$$zI-\phi=\begin{pmatrix} z-1 & -\dfrac{1-e^{-\alpha T}}{\alpha} \\ 0 & z-e^{-\alpha T}\end{pmatrix}$$

$$\left(zI-\phi\right)^{-1}=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{z-1} & \dfrac{1-e^{-\alpha T}}{\alpha}\dfrac{1}{\left(z-1\right)\left(z-e^{-\alpha T}\right)} \\ 0 & \dfrac{1}{z-e^{-\alpha T}}\end{pmatrix}$$

$$G'\left(z\right)=C\left(zI-\phi\right)^{-1}\Gamma\left(T\right)$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{z-1} & \dfrac{\left(1-e^{-\alpha T}\right)}{\alpha\left(z-1\right)\left(z-e^{-\alpha T}\right)} \\ 0 & \dfrac{1}{z-e^{-\alpha T}}\end{pmatrix}\frac{\beta}{\alpha}\begin{pmatrix} T-\dfrac{1-e^{-\alpha T}}{\alpha} \\ -e^{-\alpha T}+1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{\beta}{\alpha}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{z-1} & \dfrac{\left(1-e^{-\alpha T}\right)}{\alpha\left(z-1\right)\left(z-e^{-\alpha T}\right)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} T-\dfrac{1-e^{-\alpha T}}{\alpha} \\ -e^{-\alpha T}+1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{\beta}{\alpha^2}\left[\frac{\alpha T-\left(1-e^{-\alpha T}\right)}{z-1}+\frac{\left(1-e^{-\alpha T}\right)^2}{\left(z-1\right)\left(z-e^{-\alpha T}\right)}\right]=\frac{\beta}{\alpha^2}\frac{\left(z-e^{-\alpha T}\right)\left(\alpha T-\left(1-e^{-\alpha T}\right)\right)+\left(1-e^{-\alpha T}\right)^2}{\left(z-1\right)\left(z-e^{-\alpha T}\right)}$$

$$=\frac{\beta}{\alpha^2}\left[\frac{\alpha T}{z-1}+\frac{\left(1-e^{-\alpha T}\right)}{z-1}\left(-1+\frac{1-e^{-\alpha T}}{z-e^{-\alpha T}}\right)\right]$$

$$=\frac{\beta}{\alpha^2}\left[\frac{\alpha T}{z-1}+\frac{\left(1-e^{-\alpha T}\right)}{z-1}\frac{-z+1}{z-e^{-\alpha T}}\right]$$

$$=\frac{\beta}{\alpha^2}\left[\frac{\alpha T}{z-1}-\frac{1-e^{-\alpha T}}{z-e^{-\alpha T}}\right]$$

Discrétisation approchée : remplacer s par $(z-1)/T$ dans $G(s)$:

$$G\left(s\right)=\frac{\beta}{s\left(s+\alpha\right)}\ \Rightarrow\ G'\left(z\right)\approx\frac{\beta T^2}{\left(z-1\right)\left(z-1+\alpha T\right)}$$

C'est bien la limite de la fonction $G'(z)$ exacte quand T tend vers 0 :

$$G'\left(z\right)=\frac{\beta}{\alpha^2}\left[\frac{\alpha T}{z-1}-\frac{1-e^{-\alpha T}}{z-e^{-\alpha T}}\right]$$

$$G'(z) \approx \frac{\beta}{\alpha^2}\left[\frac{\alpha T}{z-1} - \frac{\alpha T}{z-(1-\alpha T)}\right] \approx \frac{\beta T}{\alpha}\left[\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-(1-\alpha T)}\right]$$

$$\approx \frac{\beta T^2}{(z-1)(z-1+\alpha T)}$$

COMMANDABILITÉ ET OBSERVABILITÉ DES SYSTÈMES LINÉAIRES

1. Modèle d'état du processus compensé :

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \omega \\ \dot{\omega} &= \Omega^2\theta - x_3 + u \\ \dot{x}_3 &= \bar{\Omega}u \\ y &= \theta\end{aligned}$$

Donc $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \Omega^2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \bar{\Omega} \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres de A sont 0, $\pm\Omega$, donc le système est toujours instable.

Appliquons le critère de commandabilité : $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\bar{\Omega} \\ 1 & -\bar{\Omega} & \Omega^2 \\ \bar{\Omega} & 0 & 0 \end{pmatrix}$: la matrice n'est plus de rang 3 si $\Omega = \bar{\Omega}$.

2.

$$A' = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} \Omega & 0 & 0 \\ 0 & -\Omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec $T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\Omega & 0 \\ 0 & 0 & \Omega^2 \end{pmatrix}$, $T = \frac{1}{2\Omega^2}\begin{pmatrix} \Omega^2 & \Omega & -1 \\ \Omega^2 & -\Omega & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

d'où $B' = TB = \frac{1}{2\Omega^2}\begin{pmatrix} \Omega - \bar{\Omega} \\ -(\Omega + \bar{\Omega}) \\ 2\bar{\Omega} \end{pmatrix}$, $C' = CT^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Les équations d'état deviennent alors :

$$\begin{aligned}\dot{x}'_1 &= \Omega x'_1 \\ \dot{x}'_2 &= -\Omega x'_2 - \frac{1}{\Omega}u \\ \dot{x}'_3 &= \frac{1}{\Omega}u \\ y &= x'_1 + x'_2 + x'_3\end{aligned}$$

On voit immédiatement que la variable x'_1 est instable (puisque $\Omega > 0$) et non gouvernable.

SENSIBILITÉ AUX PERTURBATIONS PARAMÉTRIQUES

Exercice 1 :

Par définition $S_p^M = \dfrac{dM(s;p)/M(s;p)}{dp/p}$; or $M(s;p) = \dfrac{G_c(s)G_p(s;p)}{1+H(s)G_C(s)G_p(s;p)}$. Donc

$$\frac{dM(s;p)}{M(s;p)} = \frac{d\left(G_c(s)G_p(s;p)\right)}{G_c(s)G_p(s;p)} - \frac{d\left(1+H(s)G_C(s)G_p(s;p)\right)}{1+H(s)G_C(s)G_p(s;p)}$$

$$= \frac{d\left(G_p(s;p)\right)}{G_p(s;p)} - \frac{H(s)G_C(s)d\left(G_p(s;p)\right)}{1+H(s)G_C(s)G_p(s;p)}$$

$$= \frac{d\left(G_p(s;p)\right)}{G_p(s;p)}\left[1 - \frac{G_p(s;p)H(s)G_C(s)}{1+H(s)G_C(s)G_p(s;p)}\right]$$

$$= \frac{d\left(G_p(s;p)\right)}{G_p(s;p)} \frac{1}{1+H(s)G_C(s)G_p(s;p)}$$

ce qui démontre le résultat.

Exercice 2 :

On a comme précédemment $M(s;p) = \dfrac{G_c(s)G_p(s;p)}{1+H(s)G_C(s)G_p(s;p)}$. Donc

$$\frac{dM(s;p)}{M(s;p)} = -\frac{d\left(1+G_C(s)G_p(s)H(s;p)\right)}{1+G_C(s)G_p(s)H(s;p)}$$

$$= -\frac{G_C(s)G_p(s)d\left(H(s;p)\right)}{1+G_C(s)G_p(s)H(s;p)}$$

$$= -\frac{d\left(H(s;p)\right)}{H(s;p)} \frac{G_C(s)G_p(s)H(s;p)}{1+G_C(s)G_p(s)H(s;p)}$$

ce qui démontre le résultat.

Exercice 3 :

Appliquons le résultat de l'exercice 1 avec $H(s) = 1$ et $G(s;K) = \dfrac{K}{1+\tau s}$. On a donc :

$$\frac{dM(s;K)/M(s;K)}{dK/K} = \frac{1}{1+G(s;K)} \frac{dG(s;K)/G(s;K)}{dK/K}.$$

Or $\dfrac{dG(s;K)}{G(s;K)} = \dfrac{\dfrac{dK}{1+\tau s}}{\dfrac{K}{1+\tau s}} = \dfrac{dK}{K}$, donc $\dfrac{dM(s;K)/M(s;K)}{dK/K} = \dfrac{1}{1+G(s;K)} = \dfrac{1+\tau s}{1+K+\sigma s}$

soit encore $dM\left(s;K\right)=\dfrac{1+\tau s}{1+K+\sigma s}M\left(s;K\right)\dfrac{dK}{K}$. Pour obtenir le gain statique γ de l'asservissement, on se rappelle que c'est la limite de la réponse indicielle aux temps longs :

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty}\left[H(t)L^{-1}\left(dM(s;K)\right)\right] &= \lim_{s\to 0} s\frac{1+\tau s}{1+K+\tau s}M(s;K)\frac{dK}{K}\frac{1}{s}\\
&= \frac{1}{1+K}\frac{dK}{K}\lim_{s\to 0} M(s;K)\\
&= \frac{1}{1+K}\frac{dK}{K}\lim_{t\to\infty}\left[H(t)L^{-1}M(s;K)\right]
\end{aligned}
$$

Donc $\dfrac{d\gamma}{\gamma}=\dfrac{1}{1+K}\dfrac{dK}{K}$; par conséquent si $\dfrac{dK}{K}=1\%$ on a bien $\dfrac{d\gamma}{\gamma}\approx 10^{-4}$.

Dans ce cas simple, on peut obtenir le résultat de manière plus directe en remarquant que $M(s)=\dfrac{\dfrac{K}{1+\tau s}}{1+\dfrac{K}{1+\tau s}}=\dfrac{K}{1+K+\tau s}$, ce qui est la fonction de transfert d'un premier ordre de gain statique $\gamma=\dfrac{K}{1+K}$ et de constante de temps $\dfrac{\tau}{1+K}$. Donc $\dfrac{d\gamma}{\gamma}=\dfrac{dK}{K}-\dfrac{dK}{1+K}=\dfrac{1}{1+K}\dfrac{dK}{K}$ ce qui est bien le résultat obtenu précédemment.

ANALYSE

DIAGRAMMES DE NYQUIST, EXEMPLE 1

$$G(s)=\frac{50}{s+10}$$

Bouclage à retour unitaire : $M(s)=\dfrac{G(s)}{1+G(s)}=\dfrac{\dfrac{50}{s+10}}{1+\dfrac{50}{s+10}}=\dfrac{50}{s+60}$, stable.

CONCEPTION D'ASSERVISSEMENTS

RÉGULATION PAR RETOUR D'ÉTAT (5)

Pendule inversé : $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ \Omega^2 & -\alpha\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0\\ \beta\end{pmatrix}$.

Polynôme caractéristique :

$$\begin{vmatrix} s & -1 \\ -\Omega^2 & s+\alpha \end{vmatrix} = s^2 + \alpha s - \Omega^2 \quad .$$

On a donc : $W = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ b & -\alpha b \end{pmatrix}$, donc $Q\,W = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$.

Par conséquent $\left(Q\,W\right)^T = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$, et $\left[\left(Q\,W\right)^T\right]^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/\beta \\ 1/\beta & 0 \end{pmatrix}$.

On a donc finalement : $\left(g_1\, g_2\right)^T = \begin{pmatrix} 0 & 1/\beta \\ 1/\beta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 - a_1 \\ d_2 - a_2 \end{pmatrix}$,

d'où $\boxed{g_1 = \dfrac{1}{\beta}\left(d_2 + \Omega^2\right) \;,\; g_2 = \dfrac{1}{\beta}\left(d_1 - \alpha\right)}$.

DISCRÉTISATION D'UN CORRECTEUR À AVANCE DE PHASE (2)

Discrétisation par Euler :

$$G_c(z) = \frac{1 + 10\,(z-1)}{1 + (z-1)} = \frac{10\,z - 9}{z} = 10 - 9\,z^{-1}$$

Loi de commande :

$$U(z) = \left(10 - 9\,z^{-1}\right) E(z)$$

$$u(kT) = 10\,e(kT) - 9\,e\left((k-1)\,T\right)$$

CONCEPTION DIRECTE D'UN CORRECTEUR NUMÉRIQUE (5)

Fonction de transfert CNA+processus+CAN :

$$G_P(z) = (1 - z^{-1})\, Z\, L^{-1}\left[\frac{G(s)}{s}\right] = \frac{T^2}{2}\, \frac{z^{-1}\left(1 + z^{-1}\right)}{\left(1 - z^{-1}\right)^2}$$

$$2\left(1 - z^{-1}\right)^2 Y(z) = T^2 z^{-1}\left(1 + z^{-1}\right) U(z)$$

$$2\,y(k) - 4\,y(k-1) + 2\,y(k-2) = T^2\,u(k-1) + T^2\,u(k-2)$$

$$y(k) = 2\,y(k-1) - y(k-2) + \frac{T^2}{2}\left[u(k-1) + u(k-2)\right]$$

On part de $y(0) = 0$, $e(0) = 1$, $u(0) = 1 / T^2$.

$$y(1) = \frac{T^2}{2}\left[\frac{1}{T^2}\right] = 0{,}5 \;;\; e(1) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$$

$$u(1) = -\frac{0{,}5}{T^2} + \frac{1}{T^2}\left[\frac{1}{2} - 1\right] = -\frac{1}{T^2}$$

$$y(2) = 1 + \frac{T^2}{2}\left(-\frac{1}{T^2} + \frac{1}{T^2}\right) = 1 \; ; e(2) = 0$$

$$u(2) = \frac{0{,}5}{T^2} + \frac{1}{T^2}\left[0 - 0{,}5\right] = 0$$

$$y(3) = 2 - 0{,}5 + \frac{T^2}{2}\left[0 - \frac{1}{T^2}\right] = 1 \; ; e(3) = 0$$

$$u(3) = 0 + \frac{1}{T^2}\left[0 - 0\right] = 0$$

$$y(4) = 2 - 1 + \frac{1}{T^2}\left[0 + 0\right] = 1$$

…